Beskiba

Lehrbuch

für die

juristische, politische und kameralistische

Arithmetik.

Von

Josef Beskiba

Ritter des k. k. Franz Joseph-Ordens, Vice-Direktor des k. k. polytechnischen Institutes,
Professor der juristisch-politisch- und kameralistischen Arithmetik ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Neue Ausgabe.

Wien, 1862.

Wilhelm Braumüller

k. k. Hofbuchhändler.

Lehrbuch

für die

juristische, politische und kameralistische

Arithmetik.

Von

Josef Beskiba,

Ritter des k. k. Franz Joseph-Ordens, Vice-Direktor des k. k. polytechnischen Institutes,
Professor der juristisch-politisch- und kameralistischen Arithmetik 2c. 2c. 2c.

Neue Ausgabe.

Wien, 1861.

Wilhelm Braumüller

k. k. Hofbuchhändler.

Die Ansicht, dass vorliegendes Buch ein älteres Werk und nur mit neuem Titelblatte versehen sey, gewinnt auch dadurch an Wahrscheinlichkeit, dass in Tabelle XIX & ffi. den zahlreichen Veränderungen im Münz-, Maaß- u. Gewichtswesen seit dem ersten Erscheinen des Buches (1839?) in keiner Weise Rechnung getragen ist. Es gibt keinen 20 fl-, keinen 24 fl-, 24½ fl- u. 14 Thalerfuß mehr; ebenso existirt die Kölner-Mark nicht mehr. Das Münz- und Gewichtswesen Neapels ist ein anderes geworden. Die Ellen Dänemarks und Preußens sind als gleich angegeben; und ist doch 1 dänische Elle = 0,94118 preuß. Ellen. Der Verfasser kannte wohl daher, daß der dänische Fuß und der preußische vollkommen gleich und 2 dänische Fuß = 1 Elle sind; aber es sind nicht auch 2 preußische Füße = 1 Elle, sondern erst 25½ Zoll geben eine preuß. Elle. Ebenso haben Preußen, Hannover, Württemberg in neuerer Zeit das Zoll-Pfund angenommen, und sind daher die Vergleichungen ihrer alten Gewichte werthlos u. s. w. Mit einem Worte, die „neue Ausgabe" ist keineswegs auch neu ausgearbeitet. —

Seiner Hochwohlgeboren

Herrn Herrn

Johann Baptist Weiß

Edlem von Starkenfels,

Commandeur des päpstlichen Ordens vom heiligen Gregor dem Großen, kaiserl. königl. Hofrathe, staatsräthlichen Referenten, Doctor der Rechte und Mitgliede der juridischen Fakultät, im Jahre 1840 gewesenem Rector Magnificus der Wiener Universität, Ehrenmitgliede des Museums Franzisco-Carolinum für Oesterreich ob der Enns und Salzburg, und des Vereins für geognostisch-montanistische Durchforschung von Tirol und Vorarlberg ꝛc. ꝛc. ꝛc.

ehrfurchtsvoll gewidmet.

Hochwohlgeborner Herr!

Oesterreichs erhabene Regenten haben schon seit einer langen Reihe von Jahren **Ihre** wichtigen Verdienste für den Staat anerkennend gewürdiget, und **Hochdieselben** den mannigfaltigsten Geschäftszweigen als Leiter vorgesetzt. Wie richtig **Ihre** Urtheile verbunden mit der höchsten Humanität sind, welchen zu Folge **Sie** das anerkannte Gut nach allen **Ihren** Kräften unterstützen und befördern, wissen jene am besten, welchen das Glück zu Theil wurde, **Sie** als ihren Vorstand verehren zu dürfen.

Während meiner Anstellung am k. k. polytechnischen Institute sind mir mehrere Fälle vorgekommen, in welchen ich über verwickelte Abhandlungsgeschäfte, über Pensions- und Rentengeschäfte u. dgl. von Männern zu Rath gezogen wurde, welche den hohen und höchsten Behörden über derlei Fälle zu berichten verflichtet waren. Damals faßte ich die Idee, den Studirenden in außerordentlichen Vorlesungen Gelegenheit zu verschaffen, sich in allen diesen und mehreren andern dem Bedürfnisse der Zeit entsprechenden Geschäften gehörig auszubilden. Vertrauungsvoll wandte ich mich an **Euer Hochwohlgeboren** mit der Bitte, mir **Ihre** Ansicht mitzutheilen, und **Ihren** weisen Rath mir angedeihen zu lassen.

Hochdieselben haben nach Prüfung meines ehrfurchtsvollen Vorschlages, der damals wohl nur die äußersten Umrisse enthalten konnte, denselben nicht nur gut geheißen, sondern insbesondere mich ermuthiget, die abzuhandelnden Gegenstände gehörig zu bearbeiten und durch den Druck zu veröffentlichen.

Für so vieles mir erwiesenes Wohlwollen zum innigsten Danke verpflichtet, wage ich es, **Euer Hochwohlgeboren** diesen Erfolg meiner bisherigen Bemühungen ehrfurchtsvoll zuzueignen, und werde mich glücklich fühlen, wenn **Hochdieselben** aus den vorliegenden Resultaten erkennen sollten, daß **Sie Ihr** Vertrauen und Wohlwollen keinem Unwürdigen geschenkt haben.

Wien, am **24.** Juni **1842.**

Euer Hochwohlgeboren

ergebenster

Joseph Bestiba.

Vorwort.

Die praktische Arithmetik hat zu ihrem Gegenstande die Berechnung zur wechselseitigen Ausgleichung des Eigenthums bei bürgerlichen Geschäften, als z. B. die Berechnung des Preises der Waaren beim Kaufe und Verkaufe, die Berechnung der Zinsen von dargeliehenen Kapitalien, die Berechnung des Lohnes für geleistete Dienste, die Berechnung bei Vertheilung von gemeinsamen Gütern, bei der Vorhineinbestimmung eines zu hoffenden Gewinnes oder eines zu besorgenden Verlustes, die Berechnung der Hoffnungen, welche aus Glücksverträgen entstehen, die Berechnung wegen des successiven Anwachsens angelegter, und wegen der Tilgung aufgenommener Kapitalien, die Berechnung über eine etwaige Versorgung seiner selbst, oder anderer theurer Angehörigen, u. d. gl. m.

Das Bedürfniß für einen Unterricht in dieser Wissenschaft ist nie verkannt worden, und es wird in Folge der Allerhöchsten Anordnungen dieser Unterricht schon in den untersten deutschen Klassen angefangen, in den Gymnasien fortgesetzt, und selbst im ersten Jahrgange der philosophischen Studien in Verbindung mit der Algebra erweitert.

Die auf den genannten Wegen erworbenen Kenntnisse sind aber für Rechtsbeamte, welche mit Abhandlungen nach Sterbefällen, mit Konkursentscheidungen, mit den mannigfaltigsten Entscheidungen über das Eigenthum, mit Pupillargegenständen, mit Prüfungen neu proponirter Anstalten u. s. w. beschäftiget sind, für Statistiker, für Buchhaltungs- und sonst mit den Rechnungswesen beschäftigte Beamte, für Steuerbeamte, für Beamte bei Tax-, Rent-, Münz- und Zimentirungs-Aemtern, für

Kassen- und Kameralbeamte u. s. w. nicht genügend, weder in Hinsicht der Quantität noch in Hinsicht der Qualität, weil der genannte Unterricht nur wenige Zweige der Arithmetik umfaßt und umfassen kann, und selbst diese nicht gehörig erschöpft. Auch haben Jünglinge zu der Zeit, als sie die genannten Lehranstalten besuchen, zu wenig Geschäftskenntnisse, als daß sie für einen ausgedehnteren Unterricht in dieser Wissenschaft empfänglich wären.

Es muß daher für alle, welche in der Folge als Beamte bei einer verrechnenden Branche eine Anstellung zu erlangen wünschen, so wie für alle, welche nach den vollendeten Studien in's bürgerliche Leben zurücktreten, gewiß sehr erwünscht seyn, eine Gelegenheit zu haben, nicht nur das früher Erlernte in's Gedächtniß zurückrufen zu können, sondern dieß auch wohlbegründet, erweitert, nach dem neuesten Stand der Wissenschaft, und mit vielen und den mannigfaltigsten Beispielen erläutert, kennen zu lernen.

Jede Berechnung setzt Angaben oder Bedingungen voraus, die in Zahlen ausgedrückt sind. Die Arithmetik muß sodann lehren, welche Angaben erforderlich, und wie diese, den verschiedenen Rechnungsfragen anpassend, mit einander zu verbinden sind, um durch diese Verbindung die zu suchende Größe gehörig auffinden zu können. Werden die Angaben aus kaufmännischen Geschäften entnommen, so wird die Lehre von dem Verfahren, Aufgaben dieser Art zu lösen, Merkantil-Arithmetik genannt; beziehen sich die Angaben auf juristische, politische oder kameralistische Gegenstände, so heißt die Lehre, welche das Verfahren zur Auflösung von derlei Aufgaben nachweiset, die juristische, politische, kameralistische Arithmetik. Letztere kann die erstere nicht entbehren, wenn sie gleich dieselbe nicht in ihrer ganzen Ausdehnung braucht.

Individuen, welche sich dem Handelsstande widmen, erhalten am k. k. polytechnischen Institute einen ihrer Bestimmung vollkommen entsprechenden Unterricht.

Die erste Hauptsache für den Rechner ist es, genau zu wissen, welche Angaben erforderlich sind, um ein oder das andere Rechnungsverfahren in Anwendung bringen zu können, damit der Rechnende befähiget werde, für den Fall, als ihm unvollständige oder gar unmög-

liche Aufgaben vorkommen sollten, bei den erstern nach der noch mangelnden Bedingung zu forschen, bei den letzteren aber zu bestimmen, warum ihre Auflösung unmöglich ist. Sind die erforderlichen Angaben vorhanden, so muß die Arithmetik sichere Merkmale angeben, wie diese zu verbinden sind, um die in der Frage stehende Unbekannte mit Gewißheit zu erhalten; man nennt dieß die Lehre von dem Ansatze.

Ist die Aufgabe angesetzt, so handelt es sich darum, die Rechnung selbst auf die einfachste, kürzeste und überzeigendste Art auszuführen. Zur Erreichung dieses Hauptzweckes habe ich in der Einleitung die vorzüglichsten Abkürzungsmethoden erläutert, ferner habe ich auch bei der Behandlung des Materials mehrmals für die Auflösung einer und derselben Aufgabe mehrere Auflösungsmethoden angegeben, aus welchen sich der praktische Rechner recht bald die kürzeste ersehen wird.

Alle diese Verkürzungen werden in der Art gelehrt, daß sie sich nicht auf ein sogenanntes Kopfrechnen, oder auf irgend ein Verfahren stützen, welches das Gedächtniß zu sehr in Anspruch nimmt, — was bei verrechnenden Beamten, die für ihre Resultate verantwortlich sind, nie geschehen darf, — auch nicht, daß sie bloß auf einzelne Fälle passen; sondern sie werden in der Art gelehrt, daß jede Ziffer vorhanden ist, auf welche sich die Richtigkeit einer später vorkommenden stützt, ferner, daß diese Vortheile einen allgemeinen Ueberblick verschaffen, wodurch jeder mit denselben Vertraute für besonders vorkommende Fälle sich selbst eigene, seinem jeweiligen Bedürfnisse entsprechende Vortheile zu erfinden vermag.

Aus derselben Ursache und auch wegen der Mannigfaltigkeit der abzuhandelnden Gegenstände sind mehrere Hunderte in ämtlichen Fällen und im bürgerlichen Leben vorkommende Aufgaben aufgestellt und aufgelöset, oder doch wenigstens die Resultate dafür angegeben, so daß der praktische Rechner sich hieraus eine solche Fertigkeit verschaffen kann, daß er auch in allen Fällen, die ihm weder beim Vortrage noch sonst in seinen Geschäften vorgekommen seyn dürften, dennoch die Auflösung zu bewirken im Stande seyn wird.

Schlüßlich glaube ich noch erwähnen zu müssen, daß es außer dem Zwecke des vorliegenden Lehrbuches ist, alle darin vorkommenden Gegenstände in ihrer vollsten Ausdehnung zu behandeln, wie dieß hauptsächlich

bei den äußerst wichtigen Abhandlungen, die in den letzteren Abschnitten vorkommen, der Fall ist, wo über den Inhalt eines jeden einzelnen ganze Werke, selbst von mehreren Bänden, verfaßt worden sind. Mein Bestreben ging dahin, diese Gegenstände in der Art zu behandeln, daß sich der Leser eine vollständige Ansicht hierüber verschaffen, und die betreffenden nothwendigen Kalkulazionen ausführen kann. — Aus dieser Ursache sind auch die über diese Gegenstände erschienenen größeren Werke am Schlusse jeder Abhandlung aufgeführt, und ich nähre die Hoffnung, daß Jeder, der das im Lehrbuche Enthaltene durchgearbeitet hat, bei Durchlesung der ausführlicheren Werke, nicht leicht einen bedeutenden Anstand finden wird.

Ich füge nur noch den Wunsch bei, daß dieses Lehrbuch für die Studirenden jenen Nutzen verschaffen mag, welchen ich ihnen zu verschaffen redlich beabsichtige. Ist dieser Wunsch erfüllt, so habe ich den Lohn meiner Bemühungen geerntet.

Wien, am 21. August 1839.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

I.

Vortheilhaftere Auflösungen der Multiplikazions-Aufgaben.

II.

Vortheilhaftere Auflösungen der Divisionsaufgaben.

III.

Kennzeichen der Theilbarkeit und der Primzahlen, Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

Seite

IV.

Zusätze zur Lehre von den gemeinen Brüchen.

V.

Von den Dezimalbrüchen.

VI.

Von dem Gebrauche der Logarithmen.

VII.

Von den Münzen, Maßen und Gewichten.

Erster Abschnitt.

Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Von der wälschen Praktik.

Dritter Abschnitt.

Von der Regel de Tri.

Seite

Vierter Abschnitt.

Von der Kettenrechnung.

Fünfter Abschnitt.

Von der Münz- und Pari-Rechnung.

Sechster Abschnitt.

Von den Interessen-Rechnungen.

Siebenter Abschnitt.

Von den Berechnungen wegen einer früheren Bezahlung.

Achter Abschnitt.

Von den Berechnungen wegen des Diskontes.

Seite

Neunter Abschnitt.

Von den Berechnungen bei Terminzahlungen.

Zehnter Abschnitt.

Von der Durchschnittsrechnung.

Eilfter Abschnitt.

Von der Gesellschaftsrechnung.

Zwölfter Abschnitt.

Von der Allegazionsrechnung.

Seite

Dreizehnter Abschnitt.

Von den Staatspapieren.

Vierzehnter Abschnitt.

Von der Zinseszinsen-Rechnung.

Seite

Fünfzehnter Abschnitt.

Berechnungen, welche wegen Rückzahlung aufgenommener Kapitale Statt finden können.

Sechzehnter Abschnitt.

Von der Kombinazionslehre.

Siebzehnter Abschnitt.

Von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Achtzehnter Abschnitt.

Von der Zahlen-Lotterie.

Seite

Neunzehnter Abschnitt.

Von den Klassen-Lotterien.

Zwanzigster Abschnitt.

Von den Realitäten-Lotterien.

Einundzwanzigster Abschnitt.

Von den Sterblichkeits-Tafeln.

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Von den Veränderungen in der Bevölkerung eines Landes.

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Von den Berechnungen der Pensionen und Renten.

Tabellen.

Einleitung.

I.

Vortheilhaftere Auflösung der Multiplikazions-Aufgaben.

§. 1. Jede nur immer mögliche dekadische Zahl N, kann durch die allgemeine Form:

$$N = a.10^0 + b.10^1 + c.10^2 + d.10^3 + e.10^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + x.10^{m-3} + y.10^{m-2} + z.10^{m-1}$$ dargestellt werden, wo

a den Werth der Figur der Ziffer an der Stelle der Einheiten,
b " " " " " " " " " Zehner,
c " " " " " " " " " Hunderte u. s. w.;
z " " " " " " " " " höchsten Stelle,
y " " " " " " " der höchsten vorhergehenden Stelle u. s. w. bezeichnet.

Hieraus ist es ersichtlich, daß man aus der höchsten Potenz von 10, von der sich in irgend einer Zahl ein Vielfaches vorfindet, die Menge ihrer Ziffer erkennt, welche immer um Eins größer ist, als der Exponent dieser höchsten Potenz. — Weiß man dagegen die Menge Ziffer, mit welcher eine Zahl geschrieben wird, so ist auch bekannt, von der wie vielten Potenz von 10 die Ziffer an der höchsten Stelle ein Vielfaches ist; der Exponent dieser Potenz muß immer um Eins kleiner, als die Anzahl der Ziffer seyn. Es muß daher eine Zahl mit m Ziffer geschrieben werden, wenn ihre höchste Stelle ein Vielfaches der $(m-1)^{ten}$ Potenz von 10 ist; und eine mit p Ziffer geschriebene Zahl muß in ihrer höchsten Stelle ein Vielfaches der $(p-1)^{ten}$ Potenz von 10 seyn.

Der einfacheren Darstellung wegen wollen wir fernerhin bei der Darstellung von N die Wurzel 10 nicht mehr schreiben, und den zu jeder Ziffer gehörigen Exponenten dieser Wurzel über diese Ziffer selbst setzen. Sonach werden wir schreiben:

$$N = \overset{0}{a} + \overset{1}{b} + \overset{2}{c} + \overset{3}{d} + \overset{4}{e} + \ldots . + \overset{m-3}{x} + \overset{m-2}{y} + \overset{m-1}{z}.$$

Jede andere mögliche dekadische Zahl *N* können wir sonach, um sie von N zu unterscheiden, auf folgende Weise darstellen:

$$\mathcal{N} = \overset{0}{\alpha} + \overset{1}{\beta} + \overset{2}{\gamma} + \overset{3}{\delta} + \overset{4}{\varepsilon} + \ldots . + \overset{p-3}{\chi} + \overset{p-2}{\psi} + \overset{p-1}{\omega}.$$

§. 2. Wir wollen nunmehr, um die bei der Multiplikazion der dekadischen Zahlen üblichen Verfahrungsweisen zu begründen, die für N und *N* aufgestellten Ausdrücke mit einander multipliziren, wobei bekanntlich jeder Theil des einen Faktors mit jedem Theile des andern multiplizirt werden muß,

zugleich aber wollen wir die gleichartigen Theilprodukte, d. i. jene Theilprodukte, welche Vielfache von derselben Potenz von **10** sind, unter einander setzen:

$$\overset{0}{a}+\overset{1}{b}+\overset{2}{c}+\overset{3}{d}+\dots\dots+\overset{m-3}{x}+\overset{m-2}{y}+\overset{m-1}{z}$$
$$\overset{0}{\alpha}+\overset{1}{\beta}+\overset{2}{\gamma}+\overset{3}{\delta}+\dots\dots+\overset{p-3}{\chi}+\overset{p-2}{\psi}+\overset{p-1}{\omega}$$

$$\overset{0}{a\alpha}+\overset{1}{b\alpha}+\overset{2}{c\alpha}+\overset{3}{d\alpha}+\dots+\overset{m-3}{x\alpha}+\overset{m-2}{y\alpha}+\overset{m-1}{z\alpha}+$$
$$+a\beta+b\beta+c\beta+\dots\dots+x\beta+y\beta+$$
$$+a\gamma+b\gamma+\dots\dots\dots+x\gamma+$$
$$a\delta+\dots\dots\dots$$
$$+\overset{p-3}{a\chi}+\overset{p-2}{b\chi}+\overset{p-1}{c\chi}+\dots+\overset{m+p-6}{x\chi}+\overset{m+p-5}{y\chi}+\overset{m+p-4}{z\chi}$$
$$+a\psi+b\psi+\dots\dots+x\psi+y\psi+\overset{m+p-3}{z\psi}$$
$$+a\omega+\dots\dots\dots+x\omega+y\omega+\overset{m+p-2}{z\omega}$$

Hieraus ergeben sich folgende Schlüsse:

1. Alle Produkte aus α, d. i. alle Produkte aus den Einheiten des Multiplikators mit den einzelnen Ziffern des Multiplikands, stehen an derselben Stelle, an welcher letztere stehen, z. B. das Produkt aus

$$\overset{0}{\alpha}\times\overset{m-2}{y}=\overset{m-2}{y\;\alpha}.$$

2. So oft ein aus zwei Ziffern entwickeltes Theilprodukt größer als **10** ist, so sind die Einheiten desselben gleichartig mit der Stelle, die man eben entwickelt hat, folglich seine Zehner gleichartig mit der nächst höheren oder jener Stelle, welche zunächst zu entwickeln kommt; daher auch blos seine Einheiten angeschrieben, die Zehner desselben aber zu dem zunächst zu entwickelnden Theilprodukte beigezählt zu werden pflegen.

3. Das Produkt aus β mit den Einheiten des Multiplikands gibt $\overset{1}{a\beta}$ oder Zehner, welche mit ihren Einheiten unter die gleichnamige Stelle des früheren Theilproduktes, d. i. um eine Stelle weiter gegen die Linke geschrieben werden. Es ist zugleich klar, daß die fernerhin wegen $\overset{1}{\beta}$ der Ordnung nach entwickelten Theilprodukte um die Zehner aus dem unmittelbar vorher aufgefundenen Theilprodukte vermehrt, in die nächst höhere Stelle übergehen, weil jeder Exponent irgend eines Theils des Multiplikands wegen des Exponenten Eins von β um Eins größer werden muß, und daher auch stufenweise unter die nächst vorhergehenden Stellen des früheren Theilproduktes zu schreiben kommen.

Eben so ist jedesmal die niederste Stelle der für γ, δ, ε u. s. w. entwickelten Theilprodukte übereinstimmend mit jener Stelle des Multiplikators, für welche diese Theilprodukte entwickelt werden. Aus dieser Ursache wird bei der gewöhnlichen Auflösung der Multiplikazions-Aufgaben mit den dekadischen Zahlen zuerst das Produkt wegen der Einheiten des Multiplikators entwickelt, und sodann werden die für die Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w. des Multiplikators der Ordnung nach entwickelten Theilprodukte immer um Eine Stelle weiter gegen die Linke zu schreiben angefangen, wodurch sogleich jede weiter entwickelte Ziffer unter die ihr gleichartige zu stehen kommt.

Ist eine Ziffer im Multiplikator Null, so wird das ganze Theilprodukt dafür auch Null, daher wird für dasselbe gar nichts geschrieben, sondern es wird sogleich zur nächst höheren bedeutenden Ziffer des Multiplikators übergegangen, und die Ziffer an der niedersten Stelle dieses Theilproduktes unter der gleichnamigen Stelle des früheren Theilproduktes zu schreiben angefangen.

4. Da das Produkt aus z^{m-1} mit ω^{p-1} gleich $z\omega^{m+p-2}$ ist, so folgt, daß dasselbe wenigstens (m+p—1) Stellen haben muß, daß es aber auch um Eine Stelle mehr, oder (m+p) Stellen bekommen kann, wenn das Produkt $z\omega$ eine zweizifferige Zahl ist. Es bekömmt daher jedes Produkt eben so viele Stellen, als beide Faktoren zusammen Stellen haben, oder um eine weniger, wenn das Produkt aus $z\omega$ nur einzifferig ist, und nebenbei auch durch das Übertragen der früheren Theilsumme nicht zweizifferig wird.

Beispiele.

```
I. 8005037×845793.          II. 845793×810502037
       24015111                    5920551
      72045333                    2537379
     56035259                    1691586
    40025185                   4228965
   32020148                   845793
  64040296                   6766344
  6770604259341.             685516949380341.
```

§. 3. In den meisten Fällen ist es zweckdienlicher, sich bei der Entwicklung der Theilprodukte nicht genau an die genannte Ordnung zu halten, sondern das erste Theilprodukt für irgend eine andere beliebige Stelle des Multiplikators zu entwickeln, was auch geschehen kann, wenn man nur berücksichtiget, daß jedes Theilprodukt in seiner niedersten Stelle mit jener Stelle des Multiplikators übereinstimmt, für welche es entwickelt wird. Die übrigen Theilprodukte können in jeder beliebigen Ordnung entwickelt werden, und man hat nur immer darauf Rücksicht zu nehmen, daß jede niederste Ziffer irgend eines neu entwickelten Theilproduktes an ihre gehörige Stelle gesetzt wird.

Wir wollen die Ordnung der Aufeinanderfolge der einzelnen Theilprodukte durch über die entsprechenden Ziffer des Multiplikators gesetzte Buchstaben bezeichnen.

```
               abc de                       dec ab
III. 876543×729018          IV. 876543×729018
     6135801                       876543
      1753086                     7012344
       7888887                   7888887
         876543                 6135801
          7012344               1753086
     639015624774.              639015624774.
```

§. 4. Ein bei allen Multiplikazions-Aufgaben anwendbarer Vortheil besteht in dem Einzählen des zuletzt entwickelten Theilproduktes. Man schreibt

nämlich das letztentwickelte Theilprodukt nicht mehr an, sondern, nachdem irgend eine Ziffer desselben aufgefunden worden ist, zählt man von den früher entwickelten Theilprodukten alle an derselben Stelle sich befindenden Ziffer dazu, und setzt in das Hauptprodukt die dieser Summe entsprechende Ziffer.

V. 987654×63 (a b)
5925924
62222202.

VI. 875432×54 (b a)
3501728
47273328.

VII. 876543×729108 (a b c d e)
6135801
1753086
7888887
876543
639094513644

VIII. 876543×729108 (d e c a b)
876543
7012344
7888887
6135801
639094513644.

IX. 765432×540927 (c d a e b)
6888888
5358024
3827160
3061728
414042835464.

X. 9875643×708 (a b)
69129501
6991955244.

§. 5. Findet sich im Multiplikator die Ziffer Eins vor, so lasse man für diese Ziffer den Multiplikand selbst als erstes Theilprodukt stehen, und entwickle blos die Theilprodukte für die noch übrigen Ziffer des Multiplikators.

XI. 876543×1025 (a bc)
1753086
898456575.

XII. 954639×718 (b ac)
6682473
685430802.

XIII. 954302×7143286 (b a c d e f g)
6680114
3817208
2862906
1908604
7634416
6816852116372.

XIV. 234567×98760531 (d e f g c b a)
703701
1172835
2111103
1876536
1641969
23165961475077.

§. 6. Hieraus folgt, daß man, sobald der Multiplikator nur zwei bedeutende Ziffer hat, wovon die eine Eins ist, jedesmal das vollständige Produkt sogleich hinschreiben kann.

XV. 987654×13 (a b)
12839502.

XVI. 876543×71 (b a)
62234553.

XVII. 765432×11 (a b)
8419752.

XVIII. 796857×1008 (a b)
803231856.

XIX. 654321×105 (a b)
68703705.

XX. 918273645×8001 (b a)
7347107433645.

§. 7. Um die Addizion der Theilprodukte zu ersparen, pflegt man nicht selten den Multiplikator als das Produkt seiner Faktoren zu betrachten, und den Multiplikand mit dem einen derselben, ferner das auf diese Weise erhaltene Produkt mit dem andern zu multipliziren u. s. w.

9×7
987654×63
8888886
62222202

9×6
875432×54
7878888
47273328

7×5×9
XXI. 7654321×315
53580247
267901235
2411111115.

b a s
7654321×315
22962963
2411111115.

Vergleicht man die zwei ersten von diesen Auflösungen mit **V.** und **VI.** im §. **4**, und löset die **XXI**. Aufgabe auch nach §. **5** auf, so wird man keinen besonderen Vortheil dabei erkennen. Jedoch gewährt diese letzterwähnte Methode bei den später vorkommenden Rechnungsfällen oft bedeutende Vortheile, daher sie auch hier erwähnt zu werden verdient.

§. 8. Oftmals ereignet sich der Fall, daß zwei neben einander stehende Ziffer im Multiplikator ein Vielfaches von einer andern Ziffer desselben sind. In diesem Falle ist es sehr vortheilhaft, das Produkt für diese beiden Ziffer auf Einmal aufzustellen, welches erhalten wird, wenn man das aus der entsprechenden einzelnen Ziffer aufgestellte Theilprodukt mit der Zahl multiplizirt, welche anzeigt, das wie Vielfache die zweizifferige Zahl von der einzifferigen enthält.

Wird ein Theilprodukt für mehrere Ziffer des Multiplikators zugleich entwickelt, so ist die niederste Stelle desselben immer mit der Ziffer an der niedersten Stelle dieser mehreren Ziffer übereinstimmend, also ist es auch an diese Stelle zu setzen, oder, falls es das letzte wäre, an dieser Stelle einzuzählen; weil die Ziffer an den höheren Stellen als in Einheiten von der gebrauchten niedersten Stelle aufgelöset zu beachten sind.

a b
XXII. 987654×872
7901232
861234288.
72=8×9.

b a
XXIII. 876543×567
6135801
496999881.
56=7×8.

c a b
XXIV. 765432×35107
5358024
26872021224.
35=7×5

d b c a
XXV. 654321×4504297
4580247
27481482
5888889
2947256117337.

c b a d e
XXVI. 876543×7291749
7888887
63111096
6135801
6391531543707

e a c b d
XXVII. 4321098×420172097
38889882
311119056
30247686
1815604808002506

§. 9. Wenn dem Multiplikator nur Eine Einheit abgeht, um einem Vielfachen von einer Potenz von 10 gleich zu seyn, oder wenn der Multiplikator an allen Stellen 9 hat, mit Ausnahme der Ziffer an der höchsten Stelle, so multiplizire man den Multiplikand mit dieser nächst größeren Zahl, und ziehe vom Produkte den Multiplikand ab.

XXVIII. 9876543 × 7999 (8000—1)
79012344000
―――――
79002467457

XXIX. 8765432 × 499999 (500000—1)
4382716000000
―――――
4382707234568

XXX. 754938 × 4579909 (c a b)
603950400
―――――
603195462
6794442
―――――
3457547340642.

XXXI. 6453821 × 69999049 (70000—1, b)
451767470000
―――――
451761016179
―――――
451761332416229.

§. 10. Wenn dem Multiplikator nur mehr einige Einheiten bis zur nächst höheren dekadischen Einheit fehlen, oder wenn der Multiplikator lauter 9 hat, mit Ausnahme der Ziffer an der Stelle der Einheiten, so multiplizire man mit dieser nächst höheren dekadischen Einheit (man hänge so viele Nullen an, als der Multiplikator Stellen hat), und ziehe von dem so veränderten Multiplikande das eben so Vielfache desselben ab, als wie viele Einheiten zur nächst höhern dekadischen Einheit noch mangeln.

XXXII. 987654 × 997 (1000—3)
000
―――――
984691038.

XXXIII. 876543 × 4599969 (c 10000—4, b)
0000
―――――
8761923828
7888887
―――――
4032070627167.

XXXIV. 7654321 × 64899993 (c b 100000—7)
00000
―――――
765378519753
61234568
―――――
496765379319753.

§. 11. Soll irgend eine Zahl mit 25 multiplizirt werden, so hänge man derselben zwei Nullen an, und dividire den so veränderten Multiplikand mit 4, weil nämlich der Multiplikator 25 der ¼ Theil von 100 ist.

XXXV. 9876543 × 25
00
―――――
246913575

XXXVI. 8765432 × 25
00
―――――
219135800

XXXVII. 765432 × 9025036 (b a c)
00
―――――
19135800
6888888
―――――
6908051355552.

§. 12. Soll eine Zahl mit 75 multiplizirt werden, so multiplizire man das 25fache derselben mit 3, oder man subtrahire das 25fache vom 100fachen; weil 75=25×3, und auch 75=100—25.

```
XXXVIII. 3456789×75          XXXIX. 91827364×75
                00                           00
         86419725                    2295684100
        259259175                    6887052300

         XL. 7654321×25075
                      00
               191358025
            191932099075
```

§. 13. Soll eine Zahl mit 125 multiplizirt werden, so hänge man derselben 3 Nullen an, und dividire den so veränderten Multiplikand mit 8; denn es ist 125 gleich ⅛ von 1000.

```
XLI. 9876543×125      XLII. 918273645×125
              000                     000
       1234567875            114784205625

      XLIII. 7654321×712549
                       000
                 956790125
              53580247
           5454078774229.
```

§. 14. Soll eine Zahl mit 375, 625 oder 875 multiplizirt werden, so multiplizire man das 125fache derselben mit 3, 5 oder 7; denn es 375=125×3; 625=125×5; 875=125×7.

```
XLIV. 981276×375   XLV. 892167×625   XLVI. 5387649×875
             000                000                 000
       122659500          111520875           673456125
      367978500.          557604375          4714192875
```

Mit 875 wird auch noch multiplizirt, wenn man das 125fache vom 1000fachen subtrahirt; denn es ist auch 875=1000—125.

§. 15. Jede Zahl wird mit der m^{ten} Potenz von 5 multiplizirt, wenn man ihr m Nullen anhängt, und den so veränderten Multiplikand durch die m^{te} Potenz von 2 dividirt.

Wir wollen auf die aus diesen Betrachtungen sich ergebenden Rechnungsvortheile keine weitere Rücksicht nehmen, weil einestheils die früher angegebenen Verkürzungen in solchen Fällen schon bedeutende Vortheile gewähren, und weil anderntheils späterhin noch vorkommende Rechnungsvortheile die hier angeführten entbehrlich machen.

§. 16. Da es bei Zahlen, die mit mehreren Ziffern geschrieben werden, z. B. bei Zahlen, welche schon sieben Ziffer haben oder Millionen enthalten, in den meisten Fällen nicht mehr nothwendig ist, auch die letzten Ziffer, z. B. die Hunderte, Zehner und Einheiten genau zu wissen; so ist es zweckdienlich, ein Verfahren auszumitteln, welches das Produkt bis auf irgend eine verlangte Stelle genau angibt, wornach die nicht mehr weiter zu bestimmenden Stellen niederer Art mit Nullen besetzt werden können.

Zur Erreichung dieses Zweckes verfahre man auf nachstehende Weise: Man schreibe

1. die Einheiten des Multiplikators unter jene Stelle des Multiplikands, mit welcher abgebrochen werden soll, und setze seine Ziffer in umgekehrter Ordnung.

Anmerkung. Da bekanntlich die Faktoren in jeder beliebigen Ordnung multiplizirt dasselbe Produkt geben, so kann man was immer für einen der gegebenen Faktoren als Multiplikand setzen. In der Regel ist es am vortheilhaftesten, den größeren Faktor als Multiplikand anzunehmen.

2. Hat kein Faktor Einheiten einer so hohen Ordnung, als mit welchen im Produkte abgebrochen werden soll, so setze man die Ziffer an der höchsten Stelle des Multiplikators unter die Stelle des Multiplikands, mit der sie Einheiten der verlangten Ordnung gibt, und kehre den Multiplikator um.

3. Die leeren Stellen, welche der Multiplikand über den noch vorhandenen Stellen des Multiplikators hat, werden mit Nullen besetzt, oder wenigstens mit diesen besetzt gedacht. Von den Stellen des Multiplikators, welche außerhalb der höchsten Stelle des Multiplikandes zu stehen kommen sollen, behalte man blos die erste bei, alle übrigen lasse man weg.

4. Man fange die Entwicklung jedes abgekürzten Theilproduktes mit jeden zwei über einander stehenden Stellen an.

5. Man vermehre jedesmal die Ziffer an der niedersten Stelle eines Theilproduktes mit den Zehnern jenes Theilproduktes, welches aus der Ziffer des Multiplikators in die Ziffer des Multiplikands, welche die nächste hinter der darüberstehenden ist, erhalten wurde. Sind die Einheiten eines solchen Theilproduktes schon 4 oder noch mehr, so nehme man die Vermehrung um den nächst höheren Zehner vor. Eine Vermehrung dieser Art wird Korrektur genannt.

6. Die niederste Stelle jedes auf diese Weise aufgestellten abgekürzten Theilproduktes ist gleichnamig mit der Stelle, mit welcher im Produkte abgebrochen werden soll; folglich werden auch alle diese Theilprodukte, nach dieser Stelle geordnet, als Addizionsposten unter einander geschrieben.

7. Werden alle Theilprodukte addirt, und der Summe so viele Nullen angehängt, als erforderlich sind, um die niederste Ziffer der Summe an die Stelle zu bringen, mit welcher das Produkt abbrechen soll.

Anmerkung. Da es der Raum nicht gestattet, über alle diese aufgestellten Regeln die letzten Gründe anzugeben, so verweisen wir deßwegen Diejenigen, welchen um eine ausführliche Nachweisung zu thun ist, auf das: Lehrbuch der Arithmetik — Wien, bei Joh. B. Wallishausser, 1839; zweite Auflage — und behalten uns vor, beim mündlichen Vortrage diese Gegenstände umständlich zu erörtern.

XLVII. Im Produkte soll mit 100000 abgebrochen werden.

8765432×394857
758493
26296296
7888889
350617
70123
4383
613
3461092100000.

XLVIII. Im Produkte soll mit Millionen abgebrochen werden.

7546983×918273604
406372819
6792284700
75469830
60375864
1509397
528289
22641
4528
30
6930195279000000

XLIX. Im Produkte soll mit zehn Millionen abgebrochen werden.

695438×594683
86495
34772
6259
278
42
5
413560000000.

§. 17. Oftmals ist es bei der Auflösung einer Aufgabe hinreichend, **blos die höchsten Stellen des Produktes** aufzusuchen, wobei die letzteren nicht mehr berücksichtiget werden dürfen. Um bei den Aufgaben dieser Art das überflüssige Rechnen zu ersparen, verfahre man auf folgende Art:

1. Man untersuche, ob die Ziffer an der höchsten Stelle des Multiplikands mit der an der höchsten Stelle des Multiplikators ein einzifferiges oder ein zweizifferiges Produkt gibt. Im erstern Falle schneide man im Multiplikande, von der höchsten Stelle angefangen, eben so viele Stellen ab, als im Produkte verlangt werden, oder im zweiten um Eine weniger.
2. Hat keiner der beiden Faktoren so viele Stellen, als für den Multiplikand abgeschnitten werden sollen, so hänge man dem größeren so viele Nullen an, als erforderlich sind, um diese Anzahl Stellen zu haben.
3. Setze man die Ziffer an der höchsten Stelle des Multiplikators unter die an der niedersten Stelle des abgeschnittenen Multiplikands, und kehre den Multiplikator um.
4. Man verfahre ferner auf die in Nr. 4, 5, 6 u. 7 des §. 16 angegebene Weise.
5. Um den Werth der Stelle auszumitteln, an welcher die niederste aufgefundene Ziffer des Produktes steht, darf man nur untersuchen, zu welcher Ordnung die Einheiten gehören, die durch was immer für ein Paar über einander gestellter Ziffern der gehörig geordneten Faktoren erhalten werden, woraus sich die Menge der, dem aufgefundenen abgekürzten Produkte, anzuhängenden Nullen ergibt.

L. Es sollen die **fünf** höchsten Stellen des Produktes entwickelt werden.

1573249×4876247
426784
62930
12586
1101
94
3
1
7671500000000.

LI. Es sollen die **sechs** höchsten Stellen des Produktes entwickelt werden.

645321×4504297
924054
258129
32266
258
13
6
2906720000000.

LII. Es sollen die **acht** höchsten Stellen des Produktes entwickelt werden.

346827×122634
00
436221
34682700
6936540
693654
208096
10405
1387
42532782000.

II.

Vortheilhaftere Auflösung der Divisions-Aufgaben.

§. 18. Ein bei jeder Divisions-Aufgabe anwendbarer äußerst wichtiger Vortheil besteht darin, daß man die Produkte aus den einzelnen Quozienten mit dem Divisor nicht unter die Theildividende setzt, und erst hernach subtrahirt; sondern daß man sogleich zu jeder einzelnen aufgefundenen Ziffer eines solchen Produktes den Ergänzungstheil zu der ihr gleichartigen Ziffer des Theildividendes bestimmt, und ihn unter diese Ziffer setzt, wodurch man sogleich den Rest erhält.

I. 861234288 : 872 = 987654
7643
6674
5702
4708
3488
= = = =

II. 26872021224 : 35107 — 765432
229712
190701
151662
112342
70214
= = = = =

III. 2947256117337 : 4504297 — 654321
24467791
19463067
14458793
9459023
4504297
= = = = = = =

IV. 1815604808002506 : 420172097 — 4321098
1349164200
886479090
461348962
4117686550
3361376776
= = = = = = = = = =

V. 639015624774 : 729018 — 876543
5580122
4769964
3958567
3134777
2187054
= = = = = = =

VI. 6770604259341 : 8005037 — 845793
36657465
46373179
63479943
74446844
24015111
= = = = = = = =

§. 19. Soll eine Zahl durch eine Potenz von 5 dividirt werden, so multiplizire man sie mit der eben so vielten Potenz von 2, und schneide im Produkte so viele von den letzten Ziffern weg, als die wie vielte Potenz von 5 der Divisor ist. Denn, denkt man sich auch den Divisor mit der eben so vielten Potenz von 2 multiplizirt, so bleibt der Quozient beständig, und der Divisor geht in eine dekadische Einheit über, durch welche dividirt wird, wenn man im Dividende so viele von den letzten Ziffern abschneidet, als wie viele Nullen sie hat. Um aber aus den weggeschnittenen Ziffern den dem Divisor entsprechenden Rest zu erhalten, braucht man diese blos mit jener Potenz von 2 zu dividiren, mit welcher man das Dividend multiplizirt hat.

Dem Gesagten zur Folge wird eine Zahl mit 5 dividirt, wenn man sie mit 2 multiplizirt, und im Produkte die letzte Ziffer wegschneidet, welche mit 2 dividirt den entsprechenden Rest gibt.

VII. 9876543210 : 5
1975308642,0
Rest 0.

VIII. 4321098765 : 5
864219753,0
Rest 0.

IX. 123456789 : 5
24691357,8
Rest 4.

Eine Zahl wird mit 25 dividirt, wenn man sie mit 4 multiplizirt, und im Produkte die zwei letzten Ziffer wegschneidet. Diese geben mit 4 dividirt den entsprechenden Rest.

X. 1234567850 : 25	XI. 7986437975 : 25	XII. 9081726354 : 25
49382714,00	319457519,00	363269054,16
Rest 0.	Rest 0.	Rest 4.

Eine Zahl wird mit 125 dividirt, wenn man sie mit 8 multiplizirt, und im Produkte die drei letzten Ziffer wegschneidet, welche mit 8 dividirt den entsprechenden Rest geben.

XIII. 1234690875 : 125	XIV. 9874301625 : 125	XV. 549321876 : 125
9877527,000	78994413,000	4394575,008
Rest 0.	Rest 0.	Rest 1.

Eine Zahl wird mit 625 dividirt, wenn man sie mit 16 multiplizirt, und im Produkte die 4 letzten Ziffer wegschneidet, die mit 16 dividirt den wahren Rest geben:

XVI. 987654375 : 625	XVII. 12345678750 : 625
1580247,0000	19753086,0000
Rest 0.	Rest 0.

XVIII. 123456789 : 625

197530,8624

Rest 539.

§. 20. Mehrmals ist der Divisor ein, aus zwei oder mehreren Faktoren zusammengesetztes Produkt. Für diesen Fall läßt sich die Auflösung der Aufgabe in eben so viele Divisionen mit einfachen Faktoren zerlegen, als in wie viele Faktoren der Divisor zerlegt werden kann. Man dividire sonach das Dividend mit den ersten Faktor, und bemerke nebenbei den etwaigen Rest; den Quozienten dividire man durch den zweiten Faktor, den neuen Quozienten mit den dritten Faktor u. s. w., bis man mit allen Faktoren des Divisors dividirt hat.

XIX. 9876543 : 315 ($5 \times 7 \times 9$)	XX. 876543 : 432 ($9 \times 8 \times 6$)	XXI. 9876543210 : 1344 (8 . 7 . 6 . 4)
5) $1975308\frac{3}{5}$	9) $97393\frac{6}{9}$	8) $1234567901\frac{2}{8}$
7) $282186\frac{33}{35}$	8) $12174\frac{15}{72}$	7) $176366843\frac{2}{56}$
9) $31354\frac{33}{315}$.	6) $2029\frac{15}{432}$	6) $29394473\frac{282}{336}$
		4) $7348618\frac{618}{1344}$.

Um aber die Beschwerden bei der Bestimmung des Endrestes zu erleichtern, pflegt man bei den einzelnen Divisionen die aus den Ganzen gefundenen Reste vorläufig zu bemerken, und den letzten Rest dadurch zu bestimmen, daß man den aus der letzten Theildivision gefundenen Rest mit dem vorletzten Divisor multiplizirt, und das Produkt um den vorletzten Rest vermehrt, sodann diese Summe wieder mit dem nächst früheren Divisor multiplizirt, und das Produkt abermals um den vorhergehenden Rest vermehrt, und auf diese Weise so lange fortfährt, bis man den bei der ersten Theildivision erhaltenen Rest eingezählt hat, durch welche Summe der Hauptrest gefunden ist.

9×7×5×3	3.9.11	5.7.9.11
XXII. 12345678 : 945	XXIII. 3456789 : 297	XXIV. 7654321097 : 3465
9) 1371742 „ 0	3) 1152263 „ 0	5) 1530864219 „ 2
7) 195963 „ 1	9) 128029 „ 2	7) 218694888 „ 3
5) 39192 „ 3	11) 11639 „ 0	9) 24299432 „ 0
3) 13064 „ 0		11) 2209039 „ 3
$0 \times 5 + 3 = 3$	$0 \times 9 + 2 = 2$	$3 \times 9 + 0 = 27$
$3 \times 7 + 1 = 22$	$2 \times 3 + 0 = 6$	$27 \times 7 + 3 = 192$
$22 \times 9 + 0 = 198$	Rest $\frac{6}{297}$.	$192 \times 5 + 2 = 962$
Rest $\frac{198}{945}$.		Rest $\frac{962}{3465}$.

*) Hinsichtlich des durch eine solche Auflösung erreichbaren Vortheils gilt dasselbe, was über das im §. 7 angeführte Verfahren bemerkt wurde.

§. 21. Wenn dem Divisor nur eine kleine Zahl zur Ergänzung auf die nächst höhere dekadische Einheit fehlt, so kann die Auflösung sehr vortheilhaft auf nachstehende Weise erfolgen:

1. Man schneide im Dividende so viele von den niedersten Stellen ab, als der Divisor Ziffer hat. Hierdurch wird eigentlich das Dividend mit der nächst höheren dekadischen Einheit dividirt. Da nun der Divisor größer genommen ist, als er gegeben war, so muß der Quozient kleiner als der wahre seyn, auf welchen er auf folgende Weise ergänzt wird:
2. Man multiplizire mit der Ergänzung des Divisors zur nächst höheren dekadischen Einheit jene Zahl, welche durch das Abschneiden auf die linke Seite des Striches zu stehen kommt, und setze das Produkt von den Einheiten des Dividendes angefangen unter dasselbe.
3. Kommen durch diese Multiplikazion wieder eine oder mehrere Ziffer auf die linke Seite des Striches, so verfahre man mit diesen eben so, wie vorher. Dies Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis man auf der linken Seite keine Ziffer mehr erhält.
4. Die Summe aller zur Rechten des Striches stehenden Zahlen gibt den Rest der Aufgabe an.
5. Geht bei der Bestimmung des Restes wieder eine Ziffer auf die linke Seite des Striches über, so verfahre man mit dieser wie mit denjenigen Zahlen, welche früher auf diese Seite zu stehen kamen, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis auch durch die Addizion keine Ziffer mehr zur Linken des Striches erhalten wird.
6. Findet sich am Ende ein Rest vor, der dem Divisor gleich ist, so ist wegen desselben noch Eine Einheit auf die linke Seite zu setzen, und der Rest aus der Aufgabe ist für diesen Fall Null.
7. Die Summe der zur Linken des Striches stehenden Zahlen gibt die Ganzen des Quozienten.

XXV. (Divisor: $9993 = 10000-7$)

98765	4321 : 9993
69	1355
	483
98834	$\frac{6159}{9993}$.

XXVI. (Divisor: $99992 = 100000-8$)

8765432	98734 : 99992
701	23456
	5608
1	27798
	8
8766134	$\frac{27806}{99992}$.

XXVII. (Divisor: $9988 = 10000-12$)

54987634	6295 : 9988
65985	1608
79	1820
	948
1	0671
	12
55053699	$\frac{683}{9988}$

XXVIII. (Divisor: $9975 = 10000-25$)

5934729	6834 : 9975
14836	8225
37	0900
	925
1	6884
	25
5949603	$\frac{6909}{9975}$

XXIX. (Divisor: $999 = 1000-1$)

6358764	295 : 999
6358	764
6	358
	6
1	423
	1
6365129	$\frac{424}{999}$

XXX. (Divisor: $99993 = 100000-7$)

7685408	98371 : 99993
537	97856
	3759
1	99986
	7
1	$\frac{99993}{99993}$
7685947,,0.	

§. 22. In vielen Fällen ist es hinreichend, den Quozienten zu kennen, ohne daß es nothwendig seyn würde, auch noch den Divisionsrest besonders zu berechnen. Für diesen Fall wende man folgendes Verfahren an:

1. Man bestimme sich den ersten Theilquozienten und bemerke, an welcher Stelle derselbe steht, was sich aus der Betrachtung ergibt, daß die höchste Stelle des Quozienten immer mit jener Stelle des Dividendes übereinstimmend ist, unter welche das Produkt der Einheiten des Divisors mit diesem Quozienten zu stehen kommt. Hierdurch ist zugleich bekannt, wie viele Stellen der Quozient erhalten wird.
2. Man bestimme den abgekürzten Divisor, welcher jedesmal so viele Stellen haben muß, als der Quozient hat. Hat der gegebene Divisor mehr Stellen, so schneide man die noch übrigen weg.
3. Man bestimme das abgekürzte Dividend, welches entweder eben so viele Stellen hat, als der Quozient, oder um Eine mehr, je nachdem auch das erste Theildividend eben so viele Stellen hat als der Divisor, oder um Eine mehr.
4. Man dividire nach den Regeln der gemeinen Division so lange fort, bis die Ziffer an der niedersten Stelle des abgekürzten Dividendes herab-

gesetzt wurde, wenn dies nicht schon beim Anfange der Auflösung geschehen seyn sollte.

5. Ist die letzte Ziffer des abgekürzten Dividendes schon in Rechnung gekommen, so schneide man bei Bestimmung jedes folgenden Theilquozienten die letzte noch vorhandene Ziffer des Divisors ab, multiplizire den neuen Theilquozienten mit den noch übrigen Stellen des Divisors, und nehme jedesmal noch aus der zuletzt weggeschnittenen Ziffer des Divisors die Korrektur in dieses Produkt auf.

6. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet, wornach der Quozient vollständig seyn muß.

Es soll in folgenden Aufgaben der Quozient nach der abgekürzten Division gesucht werden:

XXXI.	
67706042	59341 : 8‚4‚5‚7‚9‚3
42602	8005037
312	
58	
"	

XXXII.	
54321	0897 : 1‚2‚3‚4‚5
4941	44002
3	
"	

XXXIII.	
987654	3210 : 5‚4‚7‚6‚3
440024	180350
1920	
277	
3	

XXXIV.	
12345	6789 : 8‚7‚6‚5‚4
3579	1408
73	
3	

XXXV.	
6390156	24774 : 7‚2‚9‚0‚1‚8
558012	876543
47699	
3958	
313	
21	

XXXVI.	
79002	467457 : 9‚8‚7‚6‚543
9866	7999
977	
89	
1	

§. **23**. Will man nicht alle, sondern *nur einige von den höchsten Stellen des Quozienten* wissen, so erhält der Divisor eben so viele Stellen, als der Quozient haben soll, die übrigen werden weggeschnitten; das Dividend bekommt wieder eben so viele oder um Eine Stelle mehr, nach den Bedingungen des §. **22**. Der Quozient wird ganz nach den eben daselbst angegebenen Bedingungen entwickelt, nur hat man dem auf diese Weise aufgefundenen Quozienten noch so viele Nullen anzuhängen, als erforderlich sind, um die letztbestimmte Ziffer des Quozienten an ihre gehörige Stelle zu bringen. Ist nach Nro. **1** des §. **22** die Menge der Ziffer des Quozienten bekannt, so ist hieraus auch die Menge der, dem bisher aufgefundenen Quozienten, anzuhängenden Nullen erkennbar.

XXXVII. Vom Quozienten sind die *drei* höchsten Stellen zu suchen.

987	654321 : 7‚6‚5‚432
221	1290
68	

XXXVIII. Vom Quozienten sind die *vier* höchsten Stellen zu suchen.

9876	54321 : 3‚2‚7‚5
51	301500
18	
2	

XXXIX. Vom Quozienten sollen die *vier* höchsten Stellen gesucht werden.

18156	048002506 : 4‚2‚0‚1‚727
1349	
89	4321000.
5	
1	

III.

Kennzeichen der Theilbarkeit und der Primzahlen, Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

§. **24.** Unter den Gesetzen der Theilbarkeit versteht man jene Merkmahle, aus deren Eintreffen man von irgend einer Zahl sogleich vorhersagen kann, ob sie durch was immer für eine andere theilbar ist, ohne die Theilung wirklich vorzunehmen. Die Kenntniß dieser Merkmahle ist für den praktischen Rechner von besonderer Wichtigkeit.

Diese Merkmahle sind von viererlei Gattung; es ist nämlich **a)** schon aus der letzten oder aus mehreren der letzten (niedersten) Stellen ersichtlich, ob sich die ganze Zahl durch die in der Frage stehende Zahl ohne Rest theilen lasse; oder es ist dieß

b) aus der Ziffersumme, oder

c) aus der Anwendung der Divisionsreste von den Potenzen der Zahl **10** erkennbar; oder es ist

d) dieses Merkmahl von je zwei oder auch von allen dreien der früheren Merkmahle vereinigt, abhängig.

Die Merkmahle der unter **a)** begriffenen Art, finden sich bei allen Potenzen von den Zahlen **10**, **2** oder **5**. Irgend eine Zahl ist durch die mte Potenz von **10**, **2** oder **5** theilbar, wenn die m letzten Ziffer diese Eigenschaft haben. Es ist daher eine Zahl

durch **10** theilbar, wenn ihre letzte (niederste) Ziffer Null ist,
„ **2** „ „ sie eine gerade Zahl ist,
„ **5** „ „ ihre letzte Ziffer **0** oder **5** ist,
„ **100** „ „ ihre zwei letzten Ziffer Nullen sind,
„ **4** „ „ „ „ „ „ diese Eigenschaft haben,
„ **25** „ „ „ „ „ „ **25, 50, 75** oder **00** sind,
„ **1000** „ „ „ drei „ „ Nullen sind,
„ **8** „ „ „ „ „ „ diese Eigenschaft haben,
„ **125** „ „ „ „ „ „ **125, 250, 375, 500, 625, 750, 875** oder **000** sind u. s. w.

b) Eine Zahl ist durch **3** oder **9** theilbar, wenn ihre Ziffersumme diese Eigenschaft hat.

c) Für alle noch nicht vorgekommenen Primzahlen, so wie für die Potenzen von **3**, und die Potenzen jener Primzahlen, bestimmt sich das Theilbarkeitsgesetz aus den Divisionsresten, wenn man die Potenzen von **10** durch die in Frage stehende Primzahl dividirt.

Anmerkung. Da es auch hier wieder der Raum nicht gestattet, über die einfachste Entwicklung und den mannigfaltigen Gebrauch der Divisionsreste, ferner über die allgemeine Anwendbarkeit derselben, und über den aus denselben für jede nur immer gedenkbare auch noch so große Zahl auf eine sehr einfache Weise aufzustellenden Proberest das Erforderliche anzugeben, so wird das Nothwendige hierüber beim mündlichen Vortrage erinnert werden. Überdieß verweise ich auf mein Lehrbuch der Arithmetik, zweite Auflage 1839, Wien, bei J. B. Wallishauser.

Die Methode aus den Divisionsresten die Theilbarkeitsgesetze abzuleiten, ist so allgemein, daß man selbst für die Zahlen, für welche wir die Gesetze

unter a und b aufgestellt haben, sie anwenden kann; wodurch man bald auf die früher aufgefundenen Sätze selbst gelangt, bald auch noch andere hierfür auffindet.

d) Endlich sind die Kennzeichen der Theilbarkeit von je zwei der früheren oder auch von allen drei vereinigt abhängig. Dieß ist der Fall bei den zusammengesetzten Zahlen, wofür die zu untersuchenden Zahlen die Merkmahle ihrer Faktoren vereinigt enthalten müssen. Hierbei ist nur noch zu bemerken, daß man, wenn sich die Zahl auf mehrere Arten in Faktoren zerlegen läßt, immer jene Faktoren zu wählen hat, welche Primzahlen unter einander sind. So würde man z. B. bei der Bestimmung des Theilbarkeitsgesetzes für **24** unrichtig verfahren, wenn man dieses aus den Faktoren **4** und **6** ableiten wollte; man erhält aber das richtige Gesetz, wenn man es aus den Faktoren **3** und **8** ableitet.

Diesem zu Folge ist eine Zahl

mit **6**	theilbar,	wenn	sich	die	Merkmahle	für	**2**	und	**3**	in ihr vereinigt	vorfinden,
„ **12**	„	„	„	„	„	„	**4**	„	**3**	„ „	„
„ **14**	„	„	„	„	„	„	**2**	„	**7**	„ „	„
„ **15**	„	„	„	„	„	„	**3**	„	**5**	„ „	„
„ **18**	„	„	„	„	„	„	**2**	„	**9**	„ „	„
„ **20**	„	„	„	„	„	„	**4**	„	**5**	„ „	„
„ **21**	„	„	„	„	„	„	**3**	„	**7**	„ „	„
„ **22**	„	„	„	„	„	„	**2**	„	**11**	„ „	„
„ **24**	„	„	„	„	„	„	**3**	„	**8**	„ „	„
„ **30**	„	„	„	„	„	„	**2**, **3**	und	**5**	„ „	„
„ **36**	„	„	„	„	„	„	**4**	und	**9**	„ „	„
„ **42**	„	„	„	„	„	„	**2**, **3**	und	**7**	„ „	„

u. s. w.

§. 25. Um zu erkennen, ob eine zu untersuchende Zahl eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist, untersuche man, ob sie durch **2**, **3**, **5**, **7** oder **11** theilbar ist, mittelst der Theilbarkeitsgesetze. Treffen die Bedingungen hierfür nicht ein, so dividire man diese Zahl fernerhin nach und nach durch die folgenden Primzahlen in ihrer natürlichen Ordnung, nämlich durch **13**, **17**, **19**, **23**, **29**, **31** u. s. w., und setze diese Divisionen so lange fort, bis ein Quozient erhalten wird, welcher kleiner ist, als sein Divisor, wornach man mit Gewißheit schließen kann, daß die untersuchte Zahl eine Primzahl ist.

Beispiele.

I. Es soll untersucht werden, ob die Zahl **421** eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

421 : 13 = 32	421 : 17 = 24	421 : 19 = 22	421 : 23 = 18
31	81	41	191
5	13	3	7

Antwort: Eine Primzahl.

II. Es soll untersucht werden, ob die Zahl **1051** eine Primzahl, oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

1051 : 13 = 80	1051 : 17 = 61	1051 : 19 = 55	1051 : 23 = 45
11	31	101	131
	14	6	16

1051 : 29 = 36	1051 : 31 = 33	1051 : 37 = 28
181	121	311
7	28	15

Antwort: Diese Zahl ist eine Primzahl.

III. Es soll untersucht werden, ob die Zahl 10783 eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

10783 : 13 = 829	10783 : 17 = 634	10783 : 19 = 567	10783 : 23 = 468
38	58	128	158
123	73	143	203
6	5	10	19
10783 : 29 = 371	10783 : 31 = 347	10783 : 37 = 291	10783 : 41 = 263
208	148	338	258
53	243	53	123
24	26	16	: : :

Antwort: Aus der letzten Division zeigt sich, daß die untersuchte Zahl ein Produkt der beiden Primzahlen 41 und 263, keineswegs aber selbst eine Primzahl ist.

Tabelle aller Primzahlen, welche kleiner als 1000 sind.

	1	3	5	7	9		1	3	5	7	9		1	3	5	7	9
0	0	0	0	0	3	34	11	7	3	0	0	68	3	0	5	3	13
1	0	0	3	0	0	35	3	0	5	3	0	69	0	3	5	17	3
2	3	0	5	3	0	36	19	3	5	0	3	70	0	19	3	7	0
3	0	3	5	0	3	37	7	0	3	13	0	71	3	23	5	3	0
4	0	0	3	0	7	38	3	0	5	3	0	72	7	3	5	0	3
5	3	0	5	3	0	39	17	3	5	0	3	73	17	0	3	11	0
6	0	3	5	0	3	40	0	13	3	11	0	74	3	0	5	3	7
7	0	0	3	7	0	41	3	7	5	3	0	75	0	3	5	0	3
8	3	0	5	3	0	42	0	3	5	7	3	76	0	7	3	13	0
9	7	3	5	0	3	43	0	0	3	19	0	77	3	0	5	3	19
10	0	0	3	0	0	44	3	0	5	3	0	78	11	3	5	0	3
11	3	0	5	3	7	45	11	3	5	0	3	79	7	13	3	0	17
12	11	3	5	0	3	46	0	0	3	0	7	80	3	11	5	3	0
13	0	7	3	0	0	47	3	11	5	3	0	81	0	3	5	19	3
14	3	11	5	3	0	48	13	3	5	0	3	82	0	0	3	0	0
15	0	3	5	0	3	49	0	17	3	7	0	83	3	7	5	3	0
16	7	0	3	0	13	50	3	0	5	3	0	84	29	3	5	7	3
17	3	0	5	3	0	51	0	3	5	11	3	85	23	0	3	0	0
18	0	3	5	11	3	52	0	0	3	17	23	86	3	0	5	3	11
19	0	0	3	0	0	53	3	13	5	3	7	87	13	3	5	0	3
20	3	7	5	3	11	54	0	3	5	0	3	88	0	0	3	0	7
21	0	3	5	7	3	55	19	7	3	0	13	89	3	19	5	3	29
22	13	0	3	0	0	56	3	0	5	3	0	90	17	3	5	0	3
23	3	0	5	3	0	57	0	3	5	0	3	91	0	11	3	7	0
24	0	3	5	13	3	58	7	11	3	0	19	92	3	13	5	3	0
25	0	11	3	0	7	59	3	0	5	3	0	93	7	3	5	0	3
26	3	0	5	3	0	60	0	3	5	0	3	94	0	23	3	0	13
27	0	3	5	0	3	61	13	0	3	0	0	95	3	0	5	3	7
28	0	0	3	7	17	62	3	7	5	3	17	96	31	3	5	0	3
29	3	0	5	3	13	63	0	3	5	7	3	97	0	7	3	0	11
30	7	3	5	0	3	64	0	0	3	0	11	98	3	0	5	3	23
31	0	0	3	0	11	65	3	0	5	3	0	99	0	3	5	0	3
32	3	17	5	3	7	66	0	3	5	23	3						
33	0	3	5	0	3	67	11	0	3	0	7						

Die in senkrechter Richtung gestellten Zahlen bedeuten Zehner, wo zu jeder Anzahl derselben die Zahlen **1**, **3**, **5**, **7**, **9** in der horizontalen Reihe die Einheiten angeben. Man findet daher in dieser Tabelle alle ungeraden Zahlen, welche kleiner als **1000** sind. Wollte man z. B. die Zahl **613** aufsuchen, so suche man die Anzahl Zehner derselben oder die Zahl **61** in der aufrechtstehenden Reihe, wozu dann wegen der Ziffer **3** an der Stelle der Einheiten das zweite, oder das unter dieser Ziffer **3** stehende Zeichen **0** gehört. Wo man immer bei dieser Untersuchung auf das Zeichen **0** kommt, ist dies das Merkmahl, daß die aufgesuchte Zahl eine Primzahl ist; findet man an dem betreffenden Platze was immer für eine bedeutende Zahl, so ist die zu untersuchende Zahl keine Primzahl, sondern diese gefundene Zahl ist die kleinste Primzahl, durch welche die aufgesuchte Zahl theilbar ist; so z. B. findet man beim Aufsuchen der Zahl **799** an dem betreffenden Platze die Zahl **17**, welche somit die kleinste Primzahl ist, durch welche **799** ohne Rest getheilt werden kann.

§. **26.** Das größte gemeinschaftliche Maß wird von den praktischen Rechnern bei kleineren Zahlen sogleich aus dem Übereintreffen desselben Theilbarkeitsgesetzes erkannt, bei größeren Zahlen aber immer durch die Staffeldivision bestimmt. Man setze sich jene zwei Zahlen, zu welchen ihr größtes gemeinschaftliches Maß gesucht werden soll, neben einander, dividire die größere durch die kleinere, dann diese kleinere durch den Rest u. s. w., immer den nächst vorhergehenden Divisor durch den neuen Rest, bis endlich kein Rest mehr bleibt. Der letzte Divisor ist das größte gemeinschaftliche Maß.

IV.		
90840	**12696**	**7**
1968	**888**	**6**
192	**120**	**2**
72	**48**	**4**
24	" "	**1**
		1
		1
		2

Es ist daher für diese beiden Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß die Zahl **24**.

V.		
389855	**54487**	**7**
8446	**3811**	**6**
824	**515**	**2**
309	**206**	**4**
103	" " "	**1**
		1
		1
		2

Es ist daher für diese beiden Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß die Zahl **103**.

VI.		
3785	**529**	**7**
82	**37**	**6**
8	**5**	**2**
3	**2**	**4**
1	"	**1**
		1
		1
		2

VII.		
20736	**3125**	**6**
1986	**1139**	**1**
847	**292**	**1**
263	**29**	**1**
2	**1**	**2**
"		**1**
		9
		14
		2

Findet sich bei dieser Bestimmungsart des größten gemeinschaftlichen Maßes der letzte Divisor gleich Eins, so sind die untersuchten Zahlen Primzahlen unter einander, wie in den Beispielen **VI.** und **VII.**

Soll für mehr als zwei Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß bestimmt werden, so bestimme man es für zwei, ferner das größte gemeinschaftliche Maß aus dem gefundenen und der dritten gegebenen Zahl u. s. w. Das letztgefundene ist das größte gemeinschaftliche Maß für alle Angaben.

§. **27.** Um das kleinste gemeinschaftliche Vielfache oder jene kleinste Zahl, welche durch mehrere gegebene Zahlen theilbar ist, mit Zuverläßigkeit zu finden, setze man diese neben einander, und lasse sodann diejenigen davon weg, durch welche andere gegebene Zahlen theilbar sind. Findet man, daß von den noch übrigen Zahlen zwei oder mehrere einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so schreibe man diesen an, dividire durch denselben

alle hierdurch theilbaren Zahlen, und schreibe die Quozienten, so wie auch die hierdurch nicht theilbaren Zahlen in eine Reihe neben einander. Diese Reihe betrachte man als eine neue, zu demselben Zwecke gegebene Anzahl von Zahlen, mit welchen man daher wie mit den zuerst gegebenen Zahlen verfährt, und dieses Verfahren so lange fortsetzt, bis man auf eine Reihe kommt, die nur Primzahlen unter einander enthält. Das Produkt aller Zahlen dieser letzten Reihe mit den schon früher bemerkten gemeinschaftlichen Theilern wird das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache seyn.

Es soll **VIII.** das kleinste gemeinschaftliche Vielfache folgender Zahlen bestimmt werden:

	2,	**3,**	**4,**	**5,**	**6,**	**8,**	**10,**	**15,**	**16,**	**18,**	**20,**	**24,**	**25.**
2								**15,**	**8,**	**9,**	**10,**	**12,**	**25.**
2								**15,**	**4,**	**9,**	**5,**	**6,**	**25.**
2								**15,**	**2,**	**9,**		**3,**	**25.**
3								**5,**	**2,**	**3,**			**25.**

Also ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache **2.3.25.2.2.2.3 = 3600.**

Es soll **IX.** die kleinste Zahl bestimmt werden, welche durch nachfolgende Zahlen ohne Rest getheilt werden kann:

	2,	**3,**	**4,**	**5,**	**6,**	**7,**	**8,**	**9,**	**10,**	**11,**	**12,**	**15,**	**18,**	**20,**	**24,**	**25,**	**27,**	**30.**
2						**7,**				**11,**			**9,**	**10,**	**12,**	**25,**	**27,**	**15.**
2						**7,**				**11,**				**5,**	**6,**	**25,**	**27,**	**15.**
3						**7,**				**11,**					**2,**	**25,**	**9,**	**5.**

Also ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache **2.2.3.7.11.2.25.9 = 415800.**

Es soll **X.** das kleinste gemeinschaftliche Vielfache folgender Zahlen bestimmt werden:

	5,	**6,**	**9,**	**10,**	**12,**	**15,**	**18,**	**20,**	**25,**	**30,**	**36,**	**45,**	**50,**	**60,**	**75,**	**90,**	**100.**
2											**18,**			**30,**	**75,**	**45,**	**50.**
2											**9,**			**15,**	**75,**	**45,**	**25.**
3															**25,**	**15,**	
5															**5,**	**3,**	

Antwort: **2.2.3.5.5.3 = 900.**

IV.

Zusätze zur Lehre von den gemeinen Brüchen.

§. 28. Das Verfahren, einen gemeinen Bruch auf einen andern Nenner zu bringen, wenn der neue Nenner ein Vielfaches des gegebenen ist, ist eine bekannte Sache, eben so das Verfahren, mehrere Brüche mittelst eines gemeinschaftlichen Nenners auszudrücken. Sind aber diese Nenner bedeutend große Zahlen, und der Brüche mehrere, so kann dieses Geschäft ziemlich mühsam werden. In vielen Fällen aber ist es hinreichend, einen oder mehrere Brüche auf einen andern Nenner zu bringen, ohne daß der neue Nenner ein Vielfaches aller gegebenen Nenner ist. Für diese Fälle sind zwar die neu aufgestellten Brüche nicht mathematisch genau den gegebenen gleich, und noch um so weniger ein sonst auf diese Weise aufgefundenes Rechnungsresultat, insbesondere dann nicht, wenn es aus mehreren auf solche Art abgeleiteten Brüchen aufgestellt wird; jedoch sind solche Brüche genau

genug für den praktischen Gebrauch. So ist es bei unserem Gelde gewiß hinreichend, ein Resultat in Acht- und Sechzehntheilchen von Kreuzern genau bestimmt zu haben, da man selbst Viertel- und halbe Kreuzer nicht mehr wirklich auszugleichen pflegt.

Um das Verfahren aufzufinden, einen Bruch $\frac{Z}{N}$ auf einen andern, z. B. auf den Nenner n zu bringen, multiplizire man Zähler und Nenner mit n, wodurch man den seinem Werthe nach ungeänderten Bruch $\frac{Zn}{Nn}$ erhält, welcher in einen Bruch von dem Nenner n übergeht, indem man Zähler und Nenner mit N dividirt. Auf diese Weise findet man den Bruch $\frac{Zn:N}{n}$, woraus sich das entsprechende Verfahren von selbst ergibt. Um nämlich einen gegebenen Bruch auf einen beliebigen andern Nenner zu bringen, multiplizirt man seinen Zähler mit dem neuen Nenner, und dividirt das Produkt durch den alten Nenner; der Quozient ist der zu bestimmende Zähler. Findet sich bei der erwähnten Division ein Rest, der der Hälfte von n gleichkommt oder sie übersteigt, so nehme man den um Eins größeren Quozienten als Zähler, wodurch man der Wahrheit noch näher kommt. Es soll z. B. der Bruch $\frac{7411}{8796}$ auf 64 Theile gebracht werden:

$$\begin{array}{l} 7411 \times 64 \\ \hline 44466 \\ \hline 474304 : 8796 = 53 \\ \;\; 34504 \\ \;\;\; 8116 \end{array}$$

Da 8116 > 4398, oder größer als die Hälfte vom Divisor ist, so setze man $\frac{54}{64}$; für diesen Fall hat man $\frac{680}{8796 \times 64}$ zu viel genommen, während durch den Bruch $\frac{53}{64}$ um $\frac{8116}{8796 \times 64}$ zu wenig genommen würde, welcher Fehler um $\frac{7436}{8796 \times 64}$ geringer ist.

Aufgabe I. Es sollen die Brüche $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{9}{17}$, $\frac{13}{25}$ und $\frac{29}{36}$ addirt, und die Summe 1. genau, 2. in 64 Theilen, 3. in 1000 Theilen angegeben werden.

$$\begin{array}{r|l} & 6,\ 8,\ 10,\ 11,\ 17,\ 25,\ 36 \\ 2 & 4,\ 5,\ 11,\ 17,\ 25,\ 18 \\ 2 & 2,\ 11,\ 17,\ 25,\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 8.11.17.25.9 \\ \hline 88.425.9 \\ 37400.9 \\ \hline 336600 \end{array}$$

der gemeinschaftliche Nenner.

$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{336600} \\ \hline 56100 & 280500 \\ 42075 & 294525 \\ 33660 & 302940 \\ 30600 & 214200 \\ 19800 & 178200 \\ 13464 & 175032 \\ 9350 & 271150 \\ \cline{2-2} & 1716547 : 336600 \\ & 33547 \quad\;\; \overline{\;\;5\;\;} \\ \cline{2-2} & 336600 \end{array}$$

Also ist die vollständig genaue Summe gleich $5\frac{33547}{336600}$.

Wegen der zweiten Bedingung:

$\frac{5\times 64^{32}}{6_{3}} = 160 : 3 = 53$ (Rest 1)

$\frac{7\times 64^{8}}{8} = 56$

$\frac{9\times 64}{10} = 57{,}6$

$\frac{7\times 64}{11} = \frac{448}{11} = 40\frac{8}{11}$

$\frac{9\times 64}{17} = 576 : 17 = 33$ (66, 15)

$\frac{13\times 64}{25} = \frac{832}{25} = 33$ (16)

$\frac{29\times 64}{36_{9}} = \frac{464}{9} = 51\frac{5}{9}$

64
53
56
58
41
34
33
52
$327 : 64 = 5\frac{7}{64}$.

Dies Resultat ist um $\frac{209192}{21542400}$, d. i. beinahe um $\frac{1}{103}$ größer als es seyn soll, welcher Fehler bei der praktischen Anwendung nicht mehr zu berücksichtigen kommt.

Wegen der dritten Bedingung:

	1000
$5000 : 6 = 833\frac{1}{3}$	833
$7000 : 8 = 875$	875
$9000 : 10 = 900$	900
$7000 : 11 = 636\frac{4}{11}$	636
$9000 : 17 = 529\frac{7}{17}$	529
$13000 : 25 = 520$	520
$29000 : 36 = 805\frac{5}{9}$	806
	5,099

Es ist daher die Summe $5\frac{99}{1000}$, welche Summe um $\frac{223600}{336600000}$, oder um $\frac{559}{241500}$ gegen das wahre Resultat zu klein ist; ein Fehler, der gewiß nicht mehr berücksichtigungswürdig ist.

Diese Fehler sind im ersten Falle bedeutend kleiner als $\frac{1}{64}$, im andern kleiner als $\frac{1}{1000}$. Wäre jedoch für eine größere Einheit, z. B. für Einen Zentner, Eine Meile u. s. w. $\frac{1}{64}$ oder $\frac{1}{1000}$ noch bedeutend, so dürfte man nur einen größeren Nenner nach Belieben wählen. Es steht mithin durch Anwendung des genannten Verfahrens in unserer Macht, jedes Rechnungsresultat so genau zu bestimmen, daß es von dem mathematisch genauen um weniger als den beliebig kleinsten Theil abweicht.

§. 29. Das im vorhergehenden §. genannte Verfahren dient auch zum Abkürzen eines sonst durch zu große Zahlen ausgedrückten Bruches. Es soll z. B. II. der Bruch $\frac{13579}{24680}$ so abgekürzt werden, daß der abgekürzte Bruch um weniger als $\frac{1}{64}$ von dem gegebenen abweicht.

$\frac{13579\times 64^{8}}{24680_{3085}}$ $108632 : 3085 = 35$ (16082, 657) Das Resultat ist $\frac{35}{64}$.

Eine andere Methode, Brüche abzukürzen, besteht darin, daß man in beiden Bruchgliedern eine gleich große Anzahl von Ziffern an den niedersten Stellen abschneidet, und nur die noch übrigen Ziffer an den höchsten Stellen

beibehält. So setzt man z. B. statt des Bruches $\frac{13579}{24680}$ den Bruch $\frac{13}{24}$. Dies Verfahren soll man aber nie anwenden, wenn der neue Bruch noch fernerfort in eine weitere Rechnungsverbindung gebracht werden soll, sondern nur bei Endresultaten.

Eine fernere Abkürzung der Brüche besteht darin, daß man statt derselben die daraus gebildeten Näherungs- oder die denselben entsprechenden Dezimalbrüche nimmt.

§. 30. Sollen mehrere Brüche mit einander multiplizirt werden, so gibt das Produkt der Zähler den Zähler des Produktes, das Produkt der Nenner den Nenner desselben. Z. B. III. $\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{16}\times\frac{5}{7}\times\frac{10}{11}=\frac{3\times8\times7\times5\times10}{4\times9\times16\times7\times11}$.

Bringt man diese Reihe in eine aufrechte Stellung, so erhält man:

4	3
9	8
16	7
7	5
11	10

Diese Stellung ist für die meisten späteren Rechnungsverbindungen bequemer. Man nennt die rechts des Striches stehende Seite die Dividendseite, die links des Striches die Divisorseite, und setzt alle Zahlen, je nachdem sie Faktoren des Dividends oder Divisors sind, auf die entsprechende Seite, kürzt beiderseits durch das gemeinschaftliche Maß ab, und dividirt das Produkt der rückständigen Faktoren auf der Dividendseite durch das Produkt der rückständigen Faktoren auf der Divisorseite, der Quozient ist das verlangte Resultat.

3	4	3	1
	9	8	1
2 1	16	7	1
1	7	5	
1	11	10	5

$25:132=\frac{25}{132}$

§. 31. Bei Auflösung der Divisionsaufgaben setze man das Dividend auf die Dividendseite, den Divisor auf die Divisorseite, versetze die Nenner von jeder Seite auf die andere, und verfahre sodann, wie früher erwähnt wurde. Es sey IV. $\frac{3}{4}$ zu dividiren durch $\frac{7}{8}$. Durch das Übertragen des Nenners eines Bruches auf die andere Seite wird sowohl das Dividend als der Divisor mit derselben Zahl multiplizirt, also bleibt der Quozient ungeändert, eben so, wie er auch durch das Abkürzen auf beiden Seiten ungeändert bleiben muß. Der Quozient ist 6/7.

7/8	3/4
1 4	8 2

V. Es soll das Produkt aus $4^3/_4\times5^1/_2\times6^3/_4\times7^5/_7$ dividirt werden durch das Produkt aus $2^3/_4\times6^1/_3\times4^1/_2\times1^2/_7$.

1 11 2¾	4¾ 19 1
1 19 6⅓	5½ 11 1
1 9 4½	6¾ 27 3
1 9 1²⁄₇	7⁵⁄₇ 54 6 3
1 4	4 1
2	3
2 4	2 1
1 7	7 1

Werden alle Brüche eingerichtet, und wird ferner nach der früher erwähnten Weise verfahren, so erhält man zum Resultate 27 : 2 oder $13^1/_2$.

V.

Von den Dezimalbrüchen.

§. 32. Dezimalbrüche sind Brüche, deren Nenner Potenzen von 10 sind.

Anmerkung. Die Art und Weise, Dezimalbrüche zu schreiben und abzulesen, so wie das Verfahren, gemeine Brüche in Dezimalbrüche zu verwandeln, wird als bekannt vorausgesetzt.

Die Form, welche ein aus einem gemeinen Bruche aufgestellter Dezimalbruch erhält, ist immer von den Eigenschaften des Nenners im gemeinen Bruche abhängig und aus diesem vorhinein erkennbar, die Eigenschaft des Zählers mag was immer für eine seyn.

A. Soll ein gemeiner echter Bruch, dessen Zähler und Nenner durch Primzahlen unter einander ausgedrückt sind, in einen Dezimalbruch verwandelt werden, so wird sich dieser nur dann genau bestimmen lassen, wenn der Nenner des erstern eine Potenz von **2** oder **5**, oder ein Produkt aus solchen Potenzen ist, und zwar erhält der zu bestimmende Dezimalbruch so viele Stellen, als die wie vielte Potenz von **2** oder **5** sich im Nenner vorfindet, oder wenn dieser ein Produkt aus solchen Potenzen ist, so viele Stellen, als der höhere Exponent anzeigt; was aus Folgendem erhellet:

Die allgemeine Form eines jeden Dezimalbruches ist $\frac{Z}{10^m}$. Die Form eines gemeinen Bruches, dessen Nenner eine Potenz von **2** oder **5** ist, wird seyn: $\frac{Z}{2^m}$ oder $\frac{Z}{5^m}$. Es ist aber $\frac{Z}{2^m} = \frac{Z.5^m}{2^m.5^m} = \frac{Z.5^m}{10^m}$; und $\frac{Z}{5^m} = \frac{Z.2^m}{5^m.2^m} = \frac{Z.2^m}{10^m}$.

Da sowohl **Z** als 5^m und 2^m ganze Zahlen sind, so sind auch die Produkte $Z.5^m$ und $Z.2^m$ ganze Zahlen, der Nenner 10^m aber bezeichnet einen Dezimalbruch von m Stellen, d. i. einen Dezimalbruch von eben so vielen Stellen, als die wie vielte Potenz von **2** oder **5** die gemeinen Brüche in ihren Nennern haben.

Beispiele: **I.** $1/2 = 0{\cdot}5$; $3/4 = 0{\cdot}75$; $7/8 = 0{\cdot}875$; $7/16 = 0{\cdot}4375$; $7/32 = 0{\cdot}21875$.

II. $4/5 = 0{\cdot}8$; $9/25 = 0{\cdot}36$; $113/125 = 0{\cdot}904$; $123/625 = 0{\cdot}1968$; $123/3125 = 0{\cdot}03936$.

Jeder Bruch, dessen Nenner ein Produkt aus einer Potenz von **2** und einer andern Potenz von **5** ist, läßt sich durch die allgemeine Form $\frac{Z}{2^\alpha.5^\beta}$ darstellen. Es ist aber $\frac{Z}{2^\alpha.5^\beta} = \frac{Z.5^\alpha.2^\beta}{2^\alpha.5^\beta.5^\alpha.2^\beta} = \frac{Z.5^\alpha.2^\beta}{2^{\alpha+\beta}.5^{\alpha+\beta}} = \frac{Z.5^\alpha.2^\beta}{10^{\alpha+\beta}}$.

Wenn gleich gegen die Richtigkeit der Form dieses Bruches keine Einwendung gemacht werden kann, so ist er doch keineswegs auf die einfachste Weise dargestellt.

Setzt man $\alpha = \beta$, so geht dieser Bruch über in $\frac{Z.10^\alpha}{10^{2\alpha}} = \frac{Z}{10^\alpha}$, d. h. wenn der Nenner eines gemeinen Bruches ein Produkt aus irgend einer Potenz von **2** und der eben so vielten Potenz von **5** ist, so ist dieser Bruch selbst schon ein Dezimalbruch, wie sich dieß wohl auch schon von selbst versteht.

Setzt man $\alpha > \beta$; oder $\alpha = \beta + \delta$; so ist

$$\frac{Z.5^\alpha.2^\beta}{10^{\alpha+\beta}} = \frac{Z.5^{\beta+\delta}.2^\beta}{10^{\beta+\delta+\beta}} = \frac{Z.10^\beta.5^\delta}{10^{2\beta+\delta}} = \frac{Z.5^\delta}{10^{\beta+\delta}} = \frac{Z.5^\delta}{10^\alpha}$$

(Form eines Dezimalbruches mit α Stellen.)

Setzt man $\alpha < \beta$, oder $\alpha + \vartheta = \beta$, so ist

$$\frac{Z.5^{\alpha}.2^{\beta}}{10^{\alpha+\beta}}=\frac{Z.5^{\alpha}2^{\alpha+\vartheta}}{10^{\alpha+\alpha+\vartheta}}=\frac{Z.10^{\alpha}.2^{\vartheta}}{10^{2\alpha+\vartheta}}=\frac{Z.2^{\vartheta}}{10^{\alpha+\vartheta}}=\frac{Z.2^{\vartheta}}{10^{\beta}}.$$

(Form eines Dezimalbruches von β Stellen).

Beispiel III. $\frac{9}{20}=\frac{9}{2^2.5}=0{\cdot}45$; $\frac{113}{250}=\frac{113}{2.5^3}=0{\cdot}452$;

$$\frac{27}{80}=\frac{27}{2^4.5}=0{\cdot}3375.$$

B. Alle gemeinen Brüche, deren Nenner (mit Ausnahme der Zahlen **2** und **5**) Primzahlen, oder Produkte aus solchen, oder Potenzen dieser Primzahlen sind, geben, wenn sie in Dezimalbrüche verwandelt werden, eine Reihe von Dezimalen, die sich immerfort wieder erneuert, ohne daß sich der Dezimalbruch jemals abschließt. Diese sich beständig fort wiederholende Reihe von Ziffern wird eine Periode genannt, deren erste und letzte Ziffer mit einem darüber gesetzten Punkte bezeichnet werden.

IV. $^2/_3=0{\cdot}666\ldots\ldots=0{\cdot}\dot{6}$
$^5/_9=0{\cdot}555\ldots\ldots=0{\cdot}\dot{5}$

Für die Nenner **3** und **9** kommt Eine einzige fortlaufende Ziffer vor, welche bei dem Nenner **9** der Zähler des zu verwandelnden Bruches ist.

Bei allen übrigen Brüchen muß diese Periode spätestens dann aufgefunden seyn, wenn man um Eine Dezimalstelle weniger entwickelt hat, als wie viele Einheiten der Nenner enthält; z. B.

$$\text{V.}\quad ^5/_7=0{\cdot}714285714285\ldots\ldots=0{\cdot}\dot{7}1428\dot{5}.$$

Oftmals enthält die Periode auch weniger Stellen; jedoch ist die Menge Ziffer einer solchen Periode immer durch irgend Einen Faktor des um Eins verminderten Nenners darstellbar; daher kann eine Periode, welche bei der halben Anzahl Stellen, die der um Eins verminderte Nenner angibt, noch nicht geschlossen ist, sich auch nicht schließen, bis man genau so viele Stellen bestimmt hat, als der um Eins verminderte Nenner Einheiten enthält; z. B.

VI. $^7/_{11}=0{\cdot}\dot{6}\dot{3}$; $^7/_{13}=0{\cdot}\dot{5}3846\dot{1}$; $^7/_{37}=0{\cdot}\dot{1}8\dot{9}$; $^7/_{41}=0{\cdot}\dot{1}707\dot{3}$;

$^7/_{33}=0{\cdot}\dot{2}\dot{1}$; $^7/_{91}=0{\cdot}\dot{0}7692\dot{3}$; $^7/_{19}=0{\cdot}\dot{3}6842105263157894\dot{7}$.

C. Sind die Nenner der gemeinen Brüche Produkte von Potenzen aus **2** oder **5** mit den in **B.** bemerkten Zahlen, so fängt die Periode erst nach jener Anzahl Stellen an, welche durch den Potenzexponenten angezeigt ist; oder es gehen der Periode so viele Stellen vorher, als die wie vielte Potenz von **2** oder **5** sich im Nenner als Faktor vorfindet. Die Form der Periode richtet sich nach dem andern Faktor. Z. B.

VII. $^5/_6=\frac{5}{2.3}=0{\cdot}8\dot{3}$; $^2/_{75}=\frac{2}{5^2.3}=0{\cdot}02\dot{6}$; $^7/_{72}=\frac{7}{2^3.9}=0{\cdot}097\dot{2}$;

$^5/_{28}=\frac{5}{2^2.7}=0{\cdot}17\dot{8}5714\dot{2}$; $^7/_{275}=\frac{7}{5^2.11}=0{\cdot}02\dot{5}\dot{4}$;

$^{71}/_{208}=\frac{71}{2^4.13}=0{\cdot}3413\dot{4}6153\dot{8}$; $^{997}/_{4625}=\frac{997}{5^3.37}=0{\cdot}215\dot{5}6\dot{7}$.

Anmerkung. Über die Formen der Dezimalbrüche, welche aus gemeinen Brüchen entstehen, deren Nenner Produkte sind aus verschiedenen Primzahlen oder Potenzen von Primzahlen, ohne oder in Verbindung von Faktoren, die Potenzen von 2 oder 5 enthalten, bleibt das Ausführlichere dem mündlichen Vortrage vorbehalten.

§. **33.** Bei Divisionsaufgaben in ganzen Zahlen pflegt man oftmals, wenn am Schlusse der Ausarbeitung ein Rest bleibt, dieses Restes wegen den Quozienten noch weiter fort in Dezimalen zu bestimmen, indem man diesem Reste, so wie jedem späteren, Eine Nulle anhängt und fort dividirt. In den meisten Fällen genügen drei oder vier Dezimalen; jedoch kann man auf diese Weise bis auf jede beliebige Stelle fortrechnen, wodurch das Resultat um weniger als Eine Einheit an der Dezimalstelle der zuletzt entwickelten Ziffer von dem absolut wahren Resultate verschieden ist; wenn also drei Dezimalen bestimmt werden, muß der Unterschied kleiner als Ein Tausendtheilchen seyn, bei sechs Dezimalen um weniger als Ein Milliontheilchen.

VIII. In der Aufgabe **59876543 : 79583** soll der Quozient um weniger als Ein Zehntausendtheilchen von dem absolut wahren verschieden seyn, oder mit **4** Dezimalen bestimmt werden:

59876543 : 79583 = 752·3785
416844
189293
301270
625210
681290
446260
48345

Das wahre Resultat ist um weniger als ein Zehntausendtheilchen größer als der hier aufgefundene Quozient. Ist der letzterhaltene Rest größer als die Hälfte des Divisors, wie hier **48345 > 39791**, so korrigire man die letztgefundene Ziffer um Eins, und der auf diese Weise korrigirte Quozient **752·3786** ist um weniger als Ein Zehntausendtheilchen größer als der wahre Quozient, und diesem noch etwas näher, als der früher nicht korrigirte Quozient.

Bei solchen Auflösungen wird, besonders wenn der Divisor viele Stellen hat, meistens die abgekürzte Division (§. **22**) mit besonderem Vortheile angewendet, wobei aber, um die letztzubestimmende Ziffer des Quozienten nöthigen Falls noch zu korrigiren, diese vorzunehmende Korrektur nicht aus dem letzten Reste mit Zuverlässigkeit erhalten wird, sondern man entwickelt um Eine Dezimale mehr als verlangt werden, und schneidet die letztgefundene weg. Ist diese **5** oder größer als **5**, so ist die Korrektur vorzunehmen; wäre sie kleiner als **5**, so wird keine Korrektur vorgenommen.

In den nachstehenden Beispielen ist der Quozient mit **3** Dezimalen zu bestimmen:

IX. 918273645 : 7.2.9.8.2.7.3 = 125·8206
1884463
424808 oder genauer **125·821**
59894
1508
48
5

X. 4327986.3479 : 9.8.7.6.5.4.321 = 43·8208
377369
81073 oder genauer **43·821.**
2061
86
7

§. **34.** Um einen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, sind die verschiedenen Formen, in welchen Dezimalbrüche vorkommen, zu unterscheiden.

A. Dezimalbrüche ohne Perioden werden in gemeine Brüche verwandelt, wenn man ihnen blos die Form der Dezimalbrüche nimmt, was dadurch geschieht, daß man die Dezimalen als Zähler eines Bruches schreibt, dessen Nenner die so vielte Potenz von **10** ist, als wie viele Stellen der Dezimalbruch hat, wie dies aus der Natur der Dezimalbrüche erhellet. Jeder so gefundene gemeine Bruch wird sodann noch weiter abgekürzt; z. B.

XI. $0{\cdot}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $0{\cdot}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$; $0{\cdot}875 = \frac{875}{1000} = \frac{7}{8}$; $0{\cdot}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $0{\cdot}4375 = \frac{4375}{10000} = \frac{7}{16}$; $0{\cdot}21875 = \frac{21875}{100000} = \frac{7}{32}$; $0{\cdot}36 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$; $0{\cdot}904 = \frac{904}{1000} = \frac{113}{125}$; $0{\cdot}1968 = \frac{1968}{10000} = \frac{123}{625}$.

B. Ist ein periodischer Bruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so ist diese Periode der Zähler des gemeinen Bruches, dessen Nenner so viele Neuner sind, als die Periode Stellen hat; welcher Bruch sodann noch nach Möglichkeit abzukürzen ist. Die Richtigkeit des Verfahrens erhellet aus Folgendem:

Es sey die gegebene Periode p, und die Anzahl Stellen derselben m, der gemeine Bruch aber **B**; so muß offenbar

$$B = \frac{p}{10^m} + \frac{p}{10^{2m}} + \frac{p}{10^{3m}} + \frac{p}{10^{4m}} + \frac{p}{10^{5m}} + \frac{p}{10^{6m}} + \ldots\ldots$$

Multiplizirt man die Gleichung mit 10^m, so ist

$$B.\ 10^m = p + \frac{p}{10^m} + \frac{p}{10^{2m}} + \frac{p}{10^{3m}} + \frac{p}{10^{4m}} + \ldots\ldots$$

$B.\ 10^m = p + B$, also $B\ (10^m - 1) = p$, und mithin $B = \dfrac{p}{10^m - 1}$.

XII. $0{\cdot}\dot{7}1428\dot{5} = \frac{714285}{999999} = \frac{79365}{111111} = \frac{7215}{10101} = \frac{2405}{3367} = \frac{5}{7}$.

Hieraus folgt, daß, wenn p eine einzifferige Zahl ist, der entsprechende Nenner **9** seyn muß.

XIII. $0{\cdot}\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $0{\cdot}\dot{7} = \frac{7}{9}$.

XIV. $0{\cdot}\dot{6}\dot{3} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$;

$0{\cdot}\dot{5}3846\dot{1} = \frac{538461}{999999} = \frac{59829}{111111} = \frac{19943}{37037} = \frac{1813}{3367} = \frac{7}{13}$.

$0{\cdot}\dot{1}8\dot{9} = \frac{189}{999} = \frac{21}{111} = \frac{7}{37}$; $0{\cdot}\dot{1}707\dot{3} = \frac{17073}{99999} = \frac{1897}{11111} = \frac{7}{41}$;

$0{\cdot}\dot{0}7692\dot{3} = \frac{76923}{999999} = \frac{2849}{37037} = \frac{7}{91}$.

C. Ist der zu verwandelnde Dezimalbruch (**$0{\cdot}02\dot{5}\dot{4}$**) ein periodischer mit wie viel immer vorhergehenden Stellen, so ziehe man demselben die der Periode vorhergehenden Stellen ab (**0254 — 02**), die Differenz (**252**) ist der Zähler des zu suchenden gemeinen Bruches, dessen Nenner so viele Neuner hat, als die Periode Stellen, mit so vielen angehängten Nullen, als der Periode Stellen vorausgehen (**9900**); dem-

nach ist XV. $0{\cdot}0254 = {}^{252}/_{9900}$, welcher Bruch, noch weiter abgekürzt, in $^{7}/_{275}$ übergeht. — Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich aus Folgendem:

Es seyen die gegebene Periode durch p, die Menge ihrer Stellen durch m, die der Periode vorhergehende Zahl durch A, die Menge ihrer Stellen durch M, und der gemeine Bruch durch β ausgedrückt, so muß offenbar

$$\beta = \frac{A}{10^M} + \frac{p}{10^{M+m}} + \frac{p}{10^{M+2m}} + \frac{p}{10^{M+3m}} + \frac{p}{10^{M+4m}} + \ldots\ldots\ldots \text{ seyn.}$$

Hieraus folgt:

$$\beta = \frac{A}{10^M} + \frac{1}{10^M}\left(\frac{p}{10^m} + \frac{p}{10^{2m}} + \frac{p}{10^{3m}} + \frac{p}{10^{4m}} + \ldots\ldots\ldots\right).$$

Der zwischen den Klammern stehende Ausdruck ist aber das im vorhergehenden Falle aufgefundene B, oder gleich $\frac{p}{10^m - 1}$, woraus folgt:

$$\beta = \frac{A}{10^M} + \frac{1}{10^M}\left(\frac{p}{10^m - 1}\right)$$

$$= \frac{A\,(10^m - 1) + p}{10^M\,(10^m - 1)} = \frac{A.10^m - A + p}{10^M\,(10^m - 1)} = \frac{(A.10^m + p) - A}{10^M\,(10^m - 1)}.$$

Die hier aufgefundene Formel ist für alle wiederholende und periodische Brüche anpassend, es mögen noch einige Stellen vorhergehen oder nicht.

Setzt man $A = o$, folglich auch $M = 0$, so wird $\beta = \frac{p}{10^m - 1}$, wie im vorhergenannten Falle.

Setzt man unter dieser Bedingung noch $m = 1$, so wird $\beta = \frac{p}{9}$, oder man erhält die Formel für die wiederholenden Brüche ohne eine vorhergehende Stelle.

Setzt man blos $m = 1$, so ist $\beta = \frac{(A.10 + p) - A}{10^M.9}$, oder man erhält eine Formel für die wiederholenden Brüche mit wie viel immer vorhergehenden Stellen.

$$\text{XVI. } 0{\cdot}8\dot{3} = \frac{83 - 8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6};\ 0{\cdot}097\dot{2} = \frac{972 - 97}{9000} = \frac{875}{9000} = \frac{7}{72}.$$

$$0{\cdot}215\dot{5}6\dot{7} = \frac{215352}{999000} = \frac{26919}{124875} = \frac{2991}{13875} = \frac{997}{4625}.$$

D. Soll ein Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch von einem beliebigen Nenner verwandelt werden, so schreibe man die Einheit des gegebenen Nenners unter die Zehntheile des Dezimalbruches, und kehre den gegebenen Nenner um; dann verfahre man nach der Anleitung im §. 16. Wird im Produkte die letzte Ziffer weggeschnitten, so geben die noch vorhandenen Ziffer den zu bestimmenden Zähler, welche für den Fall, als die weggeschnittene Ziffer 5 oder größer als 5 ist, noch um Eins vermehrt werden muß.

XVII. Es sollen nachstehende Brüche erstens auf den Nenner 64, dann auf 360 gebracht werden:

0·875;	$0{\cdot}\dot{7}$;	$0{\cdot}8\dot{3}$;	$0{\cdot}9\dot{7}\dot{2}$;	$0{\cdot}21\dot{5}56\dot{7}$.
0·875	0·777	0·833	0·972	0·215
46	46	46	46	46
525	466	500	583	129
35	31	33	39	9
56,0	49,7	53,3	62,2	13,8
$\frac{56}{64}$;	$\frac{50}{64}$;	$\frac{53}{64}$;	$\frac{62}{64}$;	$\frac{14}{64}$.
0·875;	0·7777;	0·8333	0·9722;	0·2155
063	063	063	063	063
2625	2333	2500	2917	647
525	466	500	583	129
315,0	279,9	300,0	350,0	77,6
$\frac{315}{360}$	$\frac{280}{360}$	$\frac{300}{360}$;	$\frac{350}{360}$;	$\frac{78}{360}$.

§. 35. Es sollen folgende Größen addirt, und die Summe mit 4 Dezimalen angegeben werden: $0{\cdot}75 + 0{\cdot}7954 + 0{\cdot}509\dot{8}75 + 0{\cdot}\dot{3} + 0{\cdot}8\dot{3} + 0{\cdot}\dot{9}3\dot{6} + 0{\cdot}\dot{7}$.

Ferner sollen die Größen $43\frac{5}{8} + 19{\cdot}875 + 76\frac{5}{9} + 0{\cdot}09\dot{2}\dot{7} + \frac{5}{6} + \frac{9}{11} + 113$ addirt, und die Summe mit 4 Dezimalen angegeben werden.

XVIII.		XIX.
0·75		43·625
0·7954		19·875
0·5099		76·55556
0·3333		0·09273
0·8333		0·83333
0·9364		0·81818
0·7778		113·
4·9361		254·7998

§. 36. Subtrakzions-Aufgaben.

XX.						
9·8753,	3·7854,	20·03	, 13 . ,	25·77.,	$5\frac{3}{8}$ oder	5·375;
6·4298	1·94	18·9546	6·2483	19·83	4·875	4·875
3·4455,	1·8454	1·0754	6·7516,	5·94		0·5

6·2485 oder	6·2485
$3\frac{7}{11}$	3·6364
	2·6121

§. 37. (1.) Aus der Aufgabe $\frac{Z}{10^m} \times 10^p$ folgt das Resultat $\frac{Z}{10^{m-p}}$.

Hieraus ergibt sich, daß ein Dezimalbruch mit einer Potenz von 10 multiplizirt wird, wenn man um so viele Dezimalen weniger abschneidet, als mit welcher Potenz von 10 die Multiplikazion verrichtet werden soll, oder wenn man

man das Dezimalzeichen um eben so viele Stellen weiter gegen die Rechte rückt.

XXI. $0{\cdot}875 \times 10^2 = 87{\cdot}5$; $25{\cdot}73542 \times 10^4 = 257354{\cdot}2$;
$0{\cdot}00\dot{4}\dot{5} \times 10^5 = 454{\cdot}\dot{5}\dot{4}$; $0{\cdot}8\dot{3} \times 10^3 = 833{\cdot}\dot{3}$.

Ist $m = p$, so sind hierunter jene Aufgaben begriffen, in welchen ein Dezimalbruch mit der eben so vielten Potenz von **10** multiplizirt werden soll, als wie viele Stellen er hat, und in diesem Falle fällt blos das Dezimalzeichen weg.

XXII. $0{\cdot}875 \times 10^3 = 875$; $18{\cdot}94375 \times 10^5 = 1894375$.

Ist $p > m$, so hat man dem gegebenen Dezimalbruche noch so viele Nullen anzuhängen, als um wie viele Einheiten p größer als m ist, und das Dezimalzeichen wegzulassen.

XXIII. $0{\cdot}875 \times 10^5 = 87500$; $2{\cdot}75 \times 10^6 = 2750000$.

(2.) Aus der Aufgabe $\frac{Z}{10^m} : 10^p$ folgt das Resultat $\frac{Z}{10^{m+p}}$. Hieraus ergibt sich, daß ein Dezimalbruch mit einer Potenz von **10** dividirt wird, wenn man im Dividende um so viele Dezimalen mehr abschneidet, als mit welcher Potenz von **10** dividirt werden soll, oder wenn man das Dezimalzeichen um eben so viele Stellen weiter gegen die Linke rückt. Ist die Anzahl der bedeutenden Stellen nicht so groß, als um wie viele das Vorrücken des Dezimalzeichens geschehen soll, so ist die noch mangelnde Anzahl von Stellen durch vorzusetzende Nullen zu ergänzen.

XXIV. $25{\cdot}365 : 10 = 2{\cdot}5365$; $25{\cdot}365 : 10^2 = 0{\cdot}25365$;
$25{\cdot}365 : 10^6 = 0{\cdot}000025365$.

(3.) Aus der Aufgabe $\frac{Z}{10^m} \times \frac{1}{10^p}$ folgt das Resultat $\frac{Z}{10^{m+p}}$, woraus sich ergibt, daß es gleichgiltig ist, ob man einen Dezimalbruch mit irgend einer Potenz von **10** dividirt, oder ob man ihn mit einer Dezimaleinheit derselben Ordnung multiplizirt. Die Aufgabe **XXV.** $9{\cdot}875 : 100$, und die Aufgabe $9{\cdot}875 \times \frac{1}{100}$ geben dasselbe Resultat $0{\cdot}09875$.

(4.) Aus der Aufgabe $\frac{z}{10^m} : \frac{1}{10^p}$ folgt das Resultat $\frac{z}{10^{m-p}}$, woraus sich ergibt, daß es gleichgiltig ist, ob man einen Dezimalbruch mit irgend einer Potenz von **10** multiplizirt, oder ob man ihn mit einer Dezimaleinheit derselben Ordnung dividirt. Die Aufgabe **XXVI.** $9{\cdot}875 \times 1000$, und die Aufgabe $9{\cdot}875 : \frac{1}{1000}$ geben dasselbe Resultat 9875.

(5.) Aus der Aufgabe $\frac{z}{10^m} \times a = a \times \frac{z}{10^m}$, weil es gleichgiltig ist, in welcher Ordnung die Faktoren mit einander multiplizirt werden, ist das Resultat $\frac{az}{10^m}$, d. h. soll ein Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl oder eine ganze Zahl mit einem Dezimalbruche multiplizirt werden, so multiplizire man den Dezimalausdruck mit dem andern Faktor, und schneide im Produkte so viele Ziffer als Dezimalen ab, als der mit Dezimalen gegebene Faktor Dezimalstellen hat.

XXVII. $0{\cdot}875 \times 9 = 7{\cdot}875$; $25 \times 0{\cdot}375 = 9{\cdot}375$;
$0{\cdot}000925 \times 108 = 0{\cdot}099900 = 0{\cdot}0999$.

(6.) Aus der Aufgabe $\frac{z}{10^m} : a = \frac{z : a}{10^m}$ ergibt sich, daß ein Dezimalbruch durch eine ganze Zahl dividirt wird, wenn man den Dezimalausdruck durch diese ganze Zahl dividirt, und im Quozienten eben so viele Stellen für die Dezimalen abschneidet, als das Dividend Dezimalstellen hat.

XXVIII. $0{\cdot}875 : 7 = 0{\cdot}125$; $28{\cdot}6125 : 125 = 0{\cdot}2289$;
$33{\cdot}47625 : 8927 = 0{\cdot}00375$.

Bleibt bei einer derlei Division noch ein Rest, so kann wegen desselben (nach §. 33) der Quozient noch weiter fort in Dezimalen fortgesetzt werden, bis entweder der Dezimalbruch sich schließt, oder in eine Periode übergeht.

XXIX. $27{\cdot}3925 : 125 = 0{\cdot}21914$; $1021{\cdot}935 : 37 = 27{\cdot}61986\dot{4}$.

(7.) Aus der Aufgabe $\frac{z}{10^m} \times \frac{a}{b} = \frac{z \times a : b}{10^m}$ folgt, daß ein Dezimalbruch mit einem gemeinen Bruche multiplizirt wird, wenn man den Dezimalbruch (nach 5) mit dem Zähler des gemeinen Bruches multiplizirt, und dieses Produkt (nach 6) mit dem Nenner dieses Bruches dividirt.

XXX. $0{\cdot}24357 \times \frac{2}{3} = 0{\cdot}48714 : 3 = 0{\cdot}16238$;
$24{\cdot}84648 \times \frac{5}{8} = 124{\cdot}2324 : 8 = 15{\cdot}52905$.

$$0{\cdot}32875 \times 4\tfrac{1}{6} = \frac{0{\cdot}32875 \times 25}{6} = 8{\cdot}21875 : 6 = 1{\cdot}369791\dot{6}.$$

(8.) Aus der Aufgabe $\frac{z}{10^m} : \frac{a}{b} = \frac{z \times b : a}{10^m}$ folgt, daß ein Dezimalbruch mit einem gemeinen Bruche dividirt wird, wenn man den Dezimalbruch (nach 5) mit dem Nenner des Divisors multiplizirt, und das Produkt (nach 6) mit dem Zähler dieses Bruches dividirt.

XXXI. $0{\cdot}24357 : \frac{2}{3} = 0{\cdot}73071 : 2 = 0{\cdot}365355$;
$24{\cdot}84648 : \frac{5}{8} = 198{\cdot}77184 : 5 = 39{\cdot}754368$.

$0{\cdot}32875 : 4\frac{1}{6} = 0{\cdot}32875 : \frac{25}{6} = 1{\cdot}9725 : 25 = 0{\cdot}0789$.

(9.) Aus der Aufgabe $\frac{z}{10^m} \times \frac{\omega}{10^p} = \frac{z\omega}{10^{m+p}}$ folgt, daß Dezimalbrüche mit Dezimalbrüchen multiplizirt werden, wenn man von dem Produkte der Dezimalausdrücke so viele von den letzten Stellen als Dezimalen abschneidet, als beide Faktoren zusammengenommen Dezimalstellen haben. Hat das Produkt weniger Stellen, als Dezimalen abgeschnitten werden sollen, so ist die noch abgängige Menge durch vorgesetzte Nullen zu ergänzen.

XXXII. $0{\cdot}8 \times 0{\cdot}34 = 0{\cdot}272$; $0{\cdot}625 \times 0{\cdot}875 = 0{\cdot}546875$;
$0{\cdot}125 \times 0{\cdot}08326 = 0{\cdot}01040750$.

(10.) Aus der Aufgabe $\frac{z}{10^m} : \frac{\omega}{10^p} = \frac{z}{\omega} \times 10^{p-m}$ folgt, wenn $p = m$ ist $\frac{z}{10^m} : \frac{\omega}{10^p} = \frac{z}{\omega}$; d. h.: Haben Dividend und Theiler gleich viel Dezimal-

stellen, so findet man den Quozienten, wenn man in beiden Divisionsgliedern das Dezimalzeichen wegläßt, und die Division wie bei ganzen Zahlen verrichtet. Der Quozient ist eine ganze Zahl. Bleibt noch ein Rest, oder ist der Quozient sogleich ein Bruch, so wird dieser erst weiter fort in einen Dezimalbruch verwandelt.

XXXIII. $0{\cdot}75 : 0{\cdot}25 = 75 : 25 = 3$; $15{\cdot}49625 : 0{\cdot}31625 = 1549625 : 31625 = 49$; $15{\cdot}49625 : 0{\cdot}00175 = 1549625 : 175 = 8855$;

$$15{\cdot}49625 : 108{\cdot}47375 = 1549625 : 10847375 = 0{\cdot}\dot{1}4285\dot{7}.$$

Ist $m > p$, oder $m = p + d$, so wird $\frac{z}{10^m} : \frac{\omega}{10^p} = \frac{z}{\omega} \times 10^{-d} = \frac{z}{\omega} \times \frac{1}{10^d}$, d. h.: Hat das Dividend mehr Dezimalen als der Divisor, so entwickle man zuerst den Quozienten aus den beiden Divisionsgliedern mit Hinweglassung der Dezimalzeichen, und schneide im Quozienten so viele von den letztern Stellen als Dezimalen ab, als wie viele Dezimalen im Dividende mehr als im Divisor sind.

XXXIV. $0{\cdot}0409375 : 0{\cdot}3275 = (409375 : 3275) \times \frac{1}{10^3} = 0{\cdot}125.$

$$646{\cdot}069025 : 5238{\cdot}3975 = (646069025 : 52383975) \times \frac{1}{10^2} = 0{\cdot}12\dot{3}.$$

Ist $m < p$, oder $m + \delta = p$, so wird $\frac{z}{10^m} : \frac{\omega}{10^p} = \frac{z}{\omega} \times 10^{m+\delta-m} = \frac{z}{\omega} \times 10^\delta$, d. h.: Hat das Dividend weniger Dezimalen als der Divisor, so entwickle man vorläufig aus den beiden Divisionsgliedern nach Hinweglassung der Dezimalzeichen den Quozienten, und multiplizire diesen mit der so vielten Potenz von 10, als wie viele Dezimalen der Divisor mehr hat als das Dividend.

XXXV. $28{\cdot}875 : 2{\cdot}75325 = (28875 : 275325) \times 10^2 = 0{\cdot}10487 \ldots \times 10^2 = 10{\cdot}487 \ldots$; $203{\cdot}453 : 8{\cdot}20375 = (203453 : 820375) \times 10^2 = 0{\cdot}248 \times 10^2 = 24{\cdot}8.$

Unter diesem letzten Falle sind auch jene Aufgaben begriffen, in welchen das Dividend eine ganze Zahl ist; denn setzt man $m = o$, so ist

$$\frac{z}{10^m} : \frac{\omega}{10^p} = \frac{z}{\omega} \times 10^p.$$

XXXVI. $28 : 0{\cdot}875 = (28 : 875) \times 10^3 = 0{\cdot}032 \times 10^3 = 32$; $13 : 2{\cdot}93625 = (13 : 293625).\ 10^5 = 0{\cdot}0000442 \times 10^5 = 4{\cdot}42$, besser $4{\cdot}43$.

(11.) Die Division eines gemeinen Bruches oder einer vermischten Zahl durch einen Dezimalbruch wird meistens am bequemsten dadurch verrichtet, daß man auch das Dividend mit Dezimalen darstellt, und sonach (nach **10**) die Aufgabe auflöset.

XXXVII. $5\frac{3}{4} : 0{\cdot}125 = 5{\cdot}75 : 0{\cdot}125 = (575 : 125)\ 10 = 4{\cdot}6 \times 10 = 46.$

$$\tfrac{3}{8} : 5{\cdot}25 = (0{\cdot}375 : 5{\cdot}25) = (375 : 525)\ \tfrac{1}{10} = 0{\cdot}\dot{7}1428\dot{5} \times \tfrac{1}{10} = 0{\cdot}0\dot{7}1428\dot{5}.$$

§. 38. Wenn bei Multiplikazions-Aufgaben Einer oder beide Faktoren Dezimalbrüche mit Perioden sind, so ist es einleuchtend, daß man das Produkt in wenigen Fällen (nämlich nur dann, wenn der andere Faktor ein Vielfaches von der die Periode veranlassenden Primzahl ist) ohne einer Periode aufzustellen vermag. Das Aufsuchen der Periode ist viel zu mühsam und zwecklos, indem für jeden praktischen Rechnungsfall schon wenige Dezimalstellen das Produkt mit hinreichender Genauigkeit angeben. Aus dieser Ursache ist es zweckdienlich, alle diese Multiplikazions-Aufgaben, so wie auch die meisten übrigen, in welchen zwar keine Perioden, jedoch mehr Dezimalen erhalten werden, als wie viele Dezimalen im Produkte erforderlich sind, durch die abgekürzte Multiplikazion aufzulösen.

Das Verfahren hierbei besteht darin, daß man die Einheiten des einen Faktors (es ist gleichgültig, welcher Faktor als Multiplikand, und welcher als Multiplikator genommen wird) unter jene Dezimalstelle des andern Faktors setzt, mit welcher das Produkt schließen soll, die übrigen Ziffer des ersteren Faktors in umgekehrter Ordnung schreibt, und übrigens nach der im §. 16 gegebenen Anleitung verfährt. Sollte der Fall eintreten, daß das auf diese Weise entwickelte Produkt weniger Stellen haben würde, als es der Anordnung gemäß haben sollte, so ist die noch mangelnde Anzahl von bedeutenden Stellen durch vorgesetzte Nullen zu ergänzen. Es soll z. B. für die nachstehenden Aufgaben das Produkt mit 4 Dezimalstellen entwickelt werden:

XXXVIII. 9·876543 × 145·8765432;

45 678541
———
9 876543
3 950617
493827
79012
6913
592
49
4
———
1440·7557

5·987368 × 2·83;

33 3382
———
1 19747
47899
1796
180
18
2
———
16·9642

26·54 × 0·018;

26·545
181 81
———
26 55
21 23
27
21
———
0·4826.

7·5 × 0·00045

54
———
30
4
———
0·0034

§. 39. Bei den Divisions-Aufgaben mit Dezimalen wird in den meisten Fällen die abgekürzte Division (§. 22) mit besonderem Vortheile angewendet. Man bestimme sich zuerst den Werth der Stelle des höchsten Theilquozienten (dieser ist immer übereinstimmend mit jener Stelle des Dividendes, unter welche das Produkt aus den Einheiten des Divisors mit diesem Quozienten entweder wirklich zu stehen kommt, oder unter welche es kommen

müßte, wenn der Divisor Einheiten haben würde) so wird man wissen, ob und wie viele Ziffer der Quozient als ganze Zahl hat, oder die wie vielte Dezimalstelle die höchste bedeutende Ziffer des Quozienten ist. Hieraus und aus der Menge der Dezimalstellen, die der Quozient haben soll, bestimmt sich die Menge aller Ziffer des Quozienten, woraus man sonach das abgekürzte Dividend und den abgekürzten Divisor bestimmen kann. Hat das Dividend weniger Ziffer, als das abgekürzte Dividend haben soll, so wird die noch mangelnde Anzahl derselben durch angehängte Nullen ergänzt. Das Weitere der Auflösung ist aus §. 22 bekannt.

Zugleich ist das Verfahren in der Art allgemein, daß man die weiteren Unterschiede wegen der größeren Anzahl der Dezimalen in dem einen oder dem andern Divisionsgliede nicht mehr zu berücksichtigen braucht.

LXIX. In den nachfolgenden Aufgaben sollen die Quozienten mit 4 Dezimalen bestimmt werden:

28·6125 : 1,2,5 = 0·2289;
3 61
1 11
11

33·47625 : 8,9,27 = 0·0037;
6 6
4

5·7204 : 2,6·,8 = 0·2134
360
92
11

0·24357 : 0·6
24357 : 6,6,6,6,6 = 0·3653
4357
357
24
4.

0·32875 : 4·,1,6,6 = 0·0789;
371
38
1

24·84648 : 0·6,2,5 = 39·7543;
6 096
4714
3398
273
23
4

0·75 : 0·25 = 3
= =
15·49625 : 0·31625 = 49
2 84625
= = = = = =

0·875 : 0·0025 = 350
125
= = =

15·49625 : 0·00175 = 8855;
1 496
962
875
= = =

15·49,625 : 1,0,8,·4,7365 = 0·1428;
4 64
30
8
=

0·375 : 5·25
3 750 : 5,2,5 = 0·0714
75
22
1

54·983 : 0·98765
54 98333 : 9,8,7,6,5 = 55·6708
5 69083
66258
6999
86
7

646·0,69025 : 5,2,3,8·,39 = 0·1233;
122 2
17 4
1 7
1

28·875 : 2·,7,5,3,2,5 = 10·4876
0
1 3425
2412
209
16

13 : 2·93625

130000 : 2,9,3,6,2,5 = 4·4274
12550
805
218
13
1

79·83 : 629·63

79 83 : 6,2,9,6,3 = 0·1268
16 87
4 28
50

25·8324 : 0·5,4,3,9 = 47·4947;

25 83240
4 0764
26910
5154
259
42
4

25·7324 : 0·025

25 732400 : 25 = 1029·296;
232
74
240
150

0·54,37 : 1,2,8·7329 = 0·0042
3

675 : 0·83

67500000 : 8333333,3 = 810
833333

VI.

Von dem Gebrauche der Logarithmen *).

§. 40. Logarithmen sind Exponenten, welche angeben, zu welcher Potenz irgend eine bestimmte, unveränderliche Zahl, erhoben werden muß, um nach und nach allen möglichen Zahlen gleich gesetzt werden zu können. Man betrachtet nämlich alle möglichen Zahlen als Potenzgrößen, die aber alle aus einer und derselben Wurzel entstanden sind. Die Exponenten, welche dieser Wurzel zukommen, werden Logarithmen genannt.

Diejenige unveränderliche Zahl, welche als die beständige Wurzel angenommen wird, heißt Grundzahl (Basis). Unter einem logarithmischen Sisteme versteht man alle Logarithmen, die man aus einer und derselben Grundzahl für alle möglichen Zahlen in ihrer natürlichen Folge auffindet. Das gewöhnlichste Sistem, dessen man sich in der Anwendung bedienet, ist das Brigg'sche Sistem, oder das Sistem der gemeinen Logarithmen, welches die Zahl 10 zur Basis hat.

---

*) Nach dem Zwecke dieses Lehrbuches soll weder eine ausführliche Theorie der Logarithmen, noch das Verfahren zur Anfertigung der Tabellen in demselben enthalten seyn, sondern es soll bloß das Nothwendige über die Rechnungs-Verbindungen der Logarithmen für den praktischen Gebrauch angegeben werden.

§. 41. Die Lehren der Algebra weisen nach, daß bei Rechnungs-Verbindungen der Potenzgrößen von derselben Wurzel das Resultat immer wieder eine Potenzgröße von eben dieser Wurzel seyn muß, deren Exponent durch die nächst niedere Rechnung derselben Gattung bestimmt wird. So wird 1. bei den Vermehrungs-Rechnungen a) der Exponent des Produktes durch Addizion der Exponenten der Faktoren; b) der Exponent einer auf eine höhere Potenz zu erhebenden Potenzgröße durch Multiplikazion der Exponenten bestimmt. Ferner wird 2. bei den Verminderungs-Rechnungen c) der Exponent des Quozienten gefunden, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendes subtrahirt, und endlich d) der Exponent einer aufzufindenden Wurzel, indem man den Exponenten der Potenzgröße durch den Wurzel-Exponenten dividirt.

Da aber die Logarithmen Exponenten von einer und derselben Wurzel sind, so folgt hieraus, daß bei Auflösung der Rechnungs-Aufgaben durch Logarithmen der Logarithmus des Resultates immer dadurch bestimmt wird, daß man die Logarithmen der Angaben durch die nächst niedere Rechnung derselben Gattung verbindet. Hieraus folgt:

a) Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren;
b) der Logarithmus eines Quozienten wird gefunden, wenn man den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividendes subtrahirt;
c) der Logarithmus einer Potenzgröße ist gleich dem Produkte aus dem Logarithmus der Wurzel mit dem Exponenten;
d) der Logarithmus einer zu bestimmenden Wurzel wird gefunden, wenn man den Logarithmus der Potenzgröße durch den Wurzel-Exponenten dividirt.

§. 42. In jedem logarithmischen Sisteme ist der Logarithmus von 1 gleich 0, weil $a^0 = 1$ ist.

Im Brigg'schen Sisteme haben blos die Potenzen von 10 ganze Zahlen zu Logarithmen; denn da $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ u. s. w. ist, so folgt, daß log. 1 = 0, log. 10 = 1, log. 100 = 2, log. 1000 = 3 u. s. w. ist.

Die Logarithmen aller Zahlen, welche nicht Potenzen von 10 sind, sind demnach entweder Brüche oder vermischte Zahlen. Weil ferner die Logarithmen um so größer werden, zu je größeren Zahlen sie gehören, so folgt, daß die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 größer als 0 und kleiner als 1 seyn, müssen, daß sie also Brüche allein sind. Für die Logarithmen werden ausschließend die Dezimalbrüche gewählt, welche als Logarithmen, oder als Bestandtheile derselben, Mantissa genannt werden. — Ferner folgt, daß die Logarithmen der Zahlen von 10 bis 100 größer als 1 und kleiner als 2, also 1 mit einer Mantissa seyn müssen; ferner, es müssen die Logarithmen aller Zahlen zwischen 100 und 1000 größer als 2 und kleiner als 3, also 2 mit irgend einer Mantissa seyn. Auf dieselbe Weise schließt man, daß die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10^m und 10^{m+1} größer als m und kleiner als $m+1$, also m mit irgend einer Mantissa seyn müssen. — Hieraus ist zugleich ersichtlich, daß jeder Logarithmus irgend einer ganzen Zahl zwei Bestandtheile hat, nämlich außer der Mantissa noch eine vorzusetzende ganze Zahl oder eine vorzusetzende Nulle. Der letztgenannte Bestandtheil eines Logarithmus wird Karakteristik genannt. Man wird sehr bald bemerken, daß die Karakteristik immer von der Anzahl Ziffer abhängt, mit welchen die ganze

Zahl, deren Logarithmus gesucht werden soll, geschrieben wird, und um Eins kleiner ist, als diese Anzahl Ziffer. Weil nun diese Karakteristik blos durch das Abzählen der Ziffer bestimmbar ist, so wird sie auch in den Tabellen nicht angegeben, und es enthalten diese blos die Mantissen.

Die Mantissen ändern sich nicht, es mögen einer gegebenen ganzen Zahl wie viel immer Nullen angehängt werden. Die durch das Anhängen der Nullen bewirkte Vergrößerung der früheren Zahl ist blos allein aus der Karakteristik erkennbar; denn es sey z. B.

(1) Die Mantissa für die Zahl **3456** gleich m, so ist $\log. 3456 = 3{\cdot}m$; ferner ist

$$\log. 345600 = \log. 3456 + \log. 100 = 3{\cdot}m + 2 = 5{\cdot}m\text{, und}$$
$$\log. 34560000 = \log. 3456 + \log. 10000 = 3{\cdot}m + 4 = 7{\cdot}m\text{, u. s. w.}$$

Hieraus ist ersichtlich, daß sich die Karakteristik eines Logarithmus immer auf den Werth der Stelle, die Mantissa aber auf den Werth der Figur der in der Frage stehenden Zahl bezieht, daß also bei dem aufgefundenen Logarithmus eines Resultates die Mantissa die Ziffer angibt, mit welcher das Resultat zu schreiben ist, daß aber der Stellenwerth dieser Ziffer blos allein aus der Karakteristik erkennbar ist, und zwar, daß von den durch die Mantissa bestimmten Ziffern an den höchsten Stellen immer um Eine mehr, als die Karakteristik Einheiten hat, für die Ganzen des Resultates zu nehmen sind.

Soll der Logarithmus eines gemeinen Bruches aufgestellt werden, so ist dieß dadurch möglich, daß man den Logarithmus des Nenners vom Logarithmus des Zählers subtrahirt, wofür wir das entsprechende Verfahren bei der Lehre von der Subtrakzion angeben werden. Des kürzeren Verfahrens wegen zieht man es gewöhnlich vor, den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln, und von diesem den Logarithmus zu bestimmen.

Der Logarithmus eines Dezimalbruches hat dieselbe Mantissa, als ob die Ziffer desselben Ziffer einer ganzen Zahl wären, nur ändert sich die Karakteristik, welche negativ wird und so viele Einheiten enthält, als die wie vielte Dezimalstelle die höchste bedeutende ist. Die negative Karakteristik wird hinter die Mantissa geschrieben; denn es sey wieder wie früher $\log. 3456 = 3{\cdot}m$, so ist

$$(2)\quad \log. 0{\cdot}3456 = \log. \frac{3456}{10000} = \log. 3456 - \log. 10000 = 3{\cdot}m - 4 = 0{\cdot}m - 1.$$

Eben so ist $\log. 0{\cdot}0003456 = \log. \dfrac{3456}{10^7} = 3{\cdot}m - 7 = 0{\cdot}m - 4$, u. s. w.

Der Logarithmus einer Zahl mit einem angehängten Dezimalbruche hat dieselbe Mantissa, als ob in der gegebenen Zahl gar kein Dezimalzeichen stehen würde, die Karakteristik aber richtet sich blos nach der gegebenen ganzen Zahl; denn wenn

(3) $\log. 3456 = 3{\cdot}m$ ist, so ist $\log. 345{\cdot}6 = \log. \dfrac{3456}{10} = 3{\cdot}m - 1 = 2{\cdot}m$;

und $\log. 3{\cdot}456 = \log. \dfrac{3456}{1000} = 3{\cdot}m - 3 = 0{\cdot}m$.

§. 43. Um die einer gegebenen Zahl angehörige Mantissa richtig zu bestimmen, muß man nach der verschiedenen Einrichtung der Tabellen ein verschiedenes Verfahren beobachten. In dieser Hinsicht können die Tabellen ent-

weder a) blos die Mantissen enthalten, ohne die Differenzen von je zwei unmittelbar auf einander folgenden anzugeben, oder b) es können auch diese Differenzen angegeben seyn, oder es sind c) auch noch die den einzelnen Ziffern entsprechenden Proporzionaltheile angegeben.

Sind blos die Mantissen allein ohne Differenzen angegeben, so suche man die Mantissa für diejenige größte Zahl, die mit den Ziffern an den höchsten Stellen der gegebenen Zahl geschrieben wird, und die sich in den Tabellen vorfindet. Hierbei ergibt sich von selbst, daß, wenn die Tabellen mit größern Zahlen anfangen, als wofür der Logarithmus zu bestimmen ist, man sich zur gegebenen Zahl noch Nullen hinzugesetzt denkt, bis man eine Zahl erhält, die sich schon in den Tabellen findet. Fangen z. B. die Mantissen erst bei der Zahl **10000** an, und man soll die Mantissa für die Zahlen **9**, **90**, **900**, **9000** suchen, so nehme man die Mantissa für die Zahl **90000**, welche ebenfalls für alle diese Zahlen gelten muß, indem bekanntlich die Logarithmen der genannten Zahlen blos in der Karakteristik von einander unterschieden sind. Für alle diese Zahlen ist die Mantissa **9542425**, welcher wegen **9** die Karakteristik **0**, wegen **90** die Karakteristik **1**, wegen **900** die Karakteristik **2**, und wegen **9000** die Karakteristik **3** vorzusetzen ist.

Die drei oder vier von den höchsten Ziffern einer gegebenen Zahl finden sich in den Tabellen in ihrer natürlichen Folge immer in der äußersten Spalte zur Linken in einer vertikalen Reihe. In zehn von der Linken zur Rechten fortlaufenden Spalten, welche von **0** bis **9** bezeichnet sind, findet man die Mantissa für die früher bemerkte Zahl sammt der nächstfolgenden gegebenen Ziffer der Angabe. So ist

(4) in den Tabellen, welche mit der Zahl **10000** anfangen, die Mantissa für die Zahl **23450** gleich **3701428**, die Mantissa für die Zahl **23456** gleich **3702540**.

Wäre nun für den Fall a) in den Tabellen keine Differenz zwischen dieser Mantissa und der nächstfolgenden größern **3702725** angegeben, und es sollte die Mantissa für die Zahl **2345654** aufgesucht werden, so bestimme man die zwischen diesen beiden nächsten Mantissen vorkommende Differenz, welche **185** ist, und löse die Proporzion auf: **100 : 185 = 54 : ?** woraus man zum Resultate die Zahl **100** erhält. Die früher gefundene kleinere Mantissa **3702540** um dieses Resultat vermehrt, gibt die der gegebenen Zahl **2345654** entsprechende wahre Mantissa. Es ist sonach log. **2345654 = 6·3702640**.

Wäre für den Fall b) die Differenz in der letzten Spalte zur Rechten schon bemerkt, so würde mit dieser wie mit der früher gefundenen Zahl **185** zu verfahren seyn.

In den neuern und größern Tabellen sind aber immer noch die Proporzionaltheile für die später noch vorkommenden Ziffer enthalten, wodurch das Ausmitteln der wahren Mantissa bedeutend erleichtert wird. Es soll z. B. wieder der log. **2345654** gesucht werden, so findet man wegen **2345** und in der Spalte bei **6** die Mantissa **3702540**; wegen **5** den noch zu addirenden Proporzionaltheil **93**, und wegen **4** den Proporzionaltheil **74**, wovon aber die letzte Ziffer **4** wegzuschneiden ist. Es ist sonach die Summe der Proporzionaltheile **93 + 7 = 100**, woraus man wie früher findet: log. **2345654 = 6·3702640**.

(5) Es soll log. 1098·7689 gesucht werden:

	log. 1098·7 = 3·0408791		
Wegen der folgenden Ziffer.	6	die Korrektur 238	
	8	31	8
	9	3	57

Es ist daher log. 1098·7689 = 3·0409064.

Die Karakteristik ist 3. Um die Mantissa zu erhalten, schlage man die Zahl 1098 auf und nehme die Mantissa in der Spalte bei 7, und eben so wegen der späteren Ziffer die Proporzionaltheile, von welchen der erste vollständig zu nehmen, jeder spätere aber um Eine Stelle weiter gegen die Rechte zu rücken ist, als sein unmittelbar vorhergehender. — Die Summe aus allen ist der verlangte Logarithmus.

Wären in der gegebenen Zahl noch mehrere Ziffer gegeben, so würde eine Korrektur wegen derselben nur mehr in den späteren Ziffern der Mantissa eine Veränderung verursachen, die nicht mehr weiter berücksichtiget werden kann, da die zuerst aufgestellte Mantissa die späteren Stellen nicht mehr enthält. — Es ist in diesem Falle gleichgültig, ob diese spätern Stellen wirklich gegeben sind oder nicht, man kann sich diese daher mit Nullen besetzt denken.

(6) Man suche den Log. 123456789; so findet man:

log. 123450000 = 8·0914911		
wegen 6	212	
„ 7	24	7
„ 8	2	82
„ 9	0	
log. 123456789 = 8·0915150		

Auch könnte man der größern Genauigkeit wegen so verfahren, daß man statt log. 123456789, wo wegen 9 keine Korrektur mehr erhalten wird, den log. 123456790 bestimmt, und man erhält:

8·0914911	
212	
24	7
3	18
8·0915151	(88.

§. 44. Soll aus dem Logarithmus irgend eines Resultates das Resultat selbst bestimmt werden, so hat man vorläufig die Karakteristik nicht zu berücksichtigen, sondern blos die Ziffer zu suchen, die der Mantissa entsprechen. Sind diese Ziffer bestimmt, so wird durch die Karakteristik die Stelle ausgemittelt, an welcher jede Ziffer im Resultate stehen muß, wornach das Resultat selbst bekannt wird.

Für jeden Fall wird in den Mantissenspalten jene Mantisse aufgesucht, welche mit der vorhandenen gleich groß oder zunächst kleiner ist. Im erstern Falle sind die zu dieser Mantisse gehörigen Ziffer in derselben Linie in der äußersten Spalte zur Linken zu finden, welcher noch als die nächstfolgende jene anzuhängen kommt, die sich ober der Spalte befindet, aus welcher die Mantisse genommen wurde. — In dem Falle aber, als irgend eine Mantissenspalte die vorhandene Mantisse nicht genau enthält, gibt die nächst kleinere in den Tafeln enthaltene Mantisse die Ziffer an den höchsten Stellen der

zu bestimmenden Zahl an. — Um im letztern Falle die nachfolgenden Ziffer an den niederen Stellen aufzufinden, suche man die Differenz zwischen der vorhandenen und der in den Tafeln enthaltenen nächst kleinern Mantisse auf, und es sind wieder nach Verschiedenheit der zu benützenden Tafeln die schon im vorigen §. genannten drei Fälle zu berücksichtigen. — Wenn gar keine Differenz angegeben ist, so suche man diese zwischen der nächst größern und nächst kleinern Mantisse und löse die Proporzion auf: So wie sich die Differenz der Tafeln zur früher gefundenen Differenz verhält, so verhält sich auch (je nachdem 2 oder 3 spätere Ziffer gesucht werden sollen) die Zahl **100** oder **1000** zu diesen **2** oder **3** weiter fort zu bestimmenden Ziffern. Eben dieses geschieht auch, wenn, wie in b) bemerkt, die Differenz der zunächst auf einander folgenden Mantissen in den Tafeln angegeben ist. — Enthalten c) die Tafeln die Proporziontheile, so suche man wieder die der nächst kleinern Mantisse entsprechenden Ziffer, welche an den höchsten Stellen des Resultates stehen werden. Wird die Differenz zwischen der gegebenen und der nächst kleinern Mantissa bei den angeführten Proporzionaltheilen aufgefunden, so ist die nebenbei zur Linken stehende Ziffer die auf die früher gefundenen noch nachfolgende. Ist aber diese Differenz unter den Proporzionaltheilen nicht vorhanden, so nehme man die nächst kleinere Zahl, und die nebenbei zur Linken stehende Ziffer ist die zunächst folgende Ziffer des Resultates. Man sucht für diesen Fall ferner die Differenz zwischen der frühern Differenz und jener Zahl, aus welcher sich die letzte zu bestimmende Ziffer ergab, hänge derselben Eine Nulle an, und suche wieder unter den für die Proporzionaltheile aufgestellten Zahlen diese selbst, oder die nächst kleinere auf; die nebenbei zur Linken stehende Ziffer ist die nächst folgende des Resultates. Bleibt noch eine Differenz, so werden dieser zwei Nullen angehängt, und die so veränderte Differenz wird unter den betreffenden, für die Proporzionaltheile aufgestellten Zahlen aufgesucht, wo sich wieder, wie früher, die nächst nachfolgende Ziffer des Resultates ergibt. — Ist sonach der Werth der Figur für die Resultate ausgemittelt, so ergibt sich der Stellenwerth derselben aus der Karakteristik; von den aufgefundenen Ziffern gehört immer Eine mehr für die Ganzen, als die positive Karakteristik Einheiten hat. — Verlangt die positive Karakteristik mehr Ziffer als aufgefunden worden sind, so ist die noch mangelnde Anzahl von Ziffern durch angehängte Nullen zu ergänzen. — Ist die Karakteristik negativ, so ist die gefundene höchste bedeutende Ziffer an der so vielten Dezimalstelle, als diese negative Karakteristik Einheiten hat, was bekanntlich dadurch angezeigt wird, daß man um Eine Nulle weniger vorsetzt, als diese negative Karakteristik Einheiten hat, mit dem noch weiters vorgesetzten Dezimalzeichen.

(7) log. A = **4·7846173**. Hieraus findet man A = **60900**,
log. B = **3·5295074**. „ „ „ B = **3384·6**,
log. C = **1·0736542**. „ „ „ C = **11·84825**.

Wegen C nehme man aus der Mantissenspalte die zunächst kleinere Mantisse **0736450**, wozu die Ziffer **1184** mit der angehängten Ziffer **8** gehören. Sucht man die Differenz aus den Tafeln, so findet man **367**; die Differenz der gegebenen und der nächst kleinern Mantisse ist **92**. Will man noch zwei Ziffer, so löse man die Proporzion auf: **367 : 92 = 100 : ?**, wodurch man **25** auffindet, die den früher gefundenen Ziffern noch anzuhängen sind. Wegen der Karakteristik Eins gehören die zwei höchsten gefundenen Ziffer für die Ganzen, die **5** übrigen aber sind Dezimalen, und es ist sonach C = **11·84825**.

(8) log. D = 8·0313376, woraus man findet D = 107482400, wie folget: Die nächst kleinere Mantisse ist 0313277, wozu die Ziffer 1074, und wegen der Spalte unter 8, die Ziffer 10748 gehören. Die Differenz zwischen der gegebenen und der nächst kleineren Mantisse ist 99; unter den Proporzionaltheilen findet man, als die nächst kleinere Zahl, die Zahl 81 ist, bei welcher zur Linken die Ziffer 2 steht, die also die folgende zu bestimmende Ziffer ist. Die Differenz zwischen 99 und 81 ist 18, welcher Zahl Eine Nulle anzuhängen kommt. Zunächst kleiner als 180 ist die Zahl 162, wozu die zunächst zu bestimmende Ziffer 4 gehört. Der neue Unterschied ist wieder 18, welcher mit zwei angehängten Nullen 1800 gibt, was größer ist, als jede für die Proporzionaltheile vorhandene Zahl. Endlich muß wegen der Karakteristik 8, die Zahl D 9 Stellen haben; da aber nur 7 aufgefunden werden konnten, so müssen noch 2 Nullen angehängt werden, und es ist sonach D = 107482400.

(9) log. E = 0·3456789 — 1; E = 0·2216557,
log. F = 0·1234567 — 3; F = 0·001328792.

§. 45. Bei den Verbindungen der Logarithmen, um hieraus den Logarithmus des Resultates zu erhalten, muß immer darauf gesehen werden, daß dieser nur Eine einzige Karakteristik enthält; wenn daher zwei Karakteristiken aufgefunden werden, so sind sie in Eine zu vereinigen, was dadurch geschieht, daß man die, welche weniger Einheiten hat, von der mit mehr Einheiten vorhandenen abzieht und sie selbst wegläßt. Letzterer Unterschied mit seinem eigenthümlichen Zeichen ist die Karakteristik des Resultates.

(10)		(11)		(12)	
	2·3456789		2·5946321		0·2345678
	1·2074325		0·4327654—2		0·3456789—3
log. a =	0·1040723	log. b =	1·7294687	log. c =	1·5678901
	1·8765432		0·5431268—1		0·1234567—1
	5·5337269		5·2999930—3		2·2715935—4
a =	341764·4	log. b =	2·2999930	log. c =	0·2715935—2
		b =	199·523.	c =	0·01868931.

Sollen Logarithmen subtrahirt werden, so verändere man das Zeichen des Subtrahendes, folglich, wenn dieser eine negative Karakteristik hat, sowohl das Zeichen der Mantisse, als das der Karakteristik, wornach die Subtrakzion in eine Redukzion übergeht.

(13)		(14)		(15)	
	3·2795432		0·9876543		2·1478329
log. a =	1·5368527	log. b =	0·3456789	log. c =	0·9765321—2
	—		—		— +
log. a =	1·7426905	log. b =	0·6419754		1·1713008+2
a =	55·29559	b =	4·385058	log. c =	3·1713008
				c =	1483·545

Tritt der Fall ein, daß der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, so vermehre man die Karakteristik des Minuendes um so viele Einheiten, daß der Minuend größer als der Subtrahend wird; damit jedoch die Differenz beständig bleibt, hat man im Resultate so viele Einheiten als negative Karakteristik zu setzen, als um wie viele die Karakteristik des Minuends vermehrt wurde.

(16) log. a = { 2·7549328 ; dafür 4·7549328—2
{ 3·9468735 3·9468735

—

log. a = 0·8080593—2

a = 0·06427754.

(17) log. b = { 0·2345678—2 ; dafür 1·2345678—3
{ 0·4567890 0·4567890

—

log. b = 0·7777788—3

b = 0·005994857

(18) log. c = { 0·9432764—2 ; dafür 2·9432764—4
{ 1·9842985 1·9842985

—

log. c = 0·9589779—4

c = 0·0009098668.

(19) log. d = { 0·0243127—2 ; dafür 1·0243127—3
{ 0·8655432—1 0·8655432—1

— +

log. d = 0·1587695—2

d = 0·0144135.

(20) log. e = { 0·1234567—2 ; dafür 1·1234567—3
{ 0·4567890—4 0·4567890—4

— +

0·6666677+1

log. e = 1·6666677

e = 46·416.

(21) log. ⅞ = log. 7 — log. 8 = { 0·8450980 ; dafür 1·8450980—1
{ 0·9030900 0·9030900

—

log. ⅞ = 0·9420080—1

log. 0·875 = 0·9420081—1

Hieraus ist es ersichtlich, daß es bequemer ist, den Logarithmus eines Bruches zu bestimmen, wenn man ihn vorläufig in einen Dezimalbruch verwandelt, und von diesem den Logarithmus sucht. (§. 42.)

(22) log. ⅔ = log. 2 — log. 3 = { 0·3010300 ; dafür 1·3010300—1
{ 0·4771213 0·4771213

—

log. ⅔ = 0·8239087—1

log. 0·6 = 0·8239087—1.

(23) log. $\frac{113}{2355}$ = log. 113 — log. 2355 ....

.... = { 2·0530784 ; dafür 4·0530784—2
{ 3·3719909 3·3719909

log. $\frac{113}{2355}$ = 0·6810875—2

$\frac{113}{2355}$ = 0·047983014 ; log. 0·047983014 = 0·6810875—2.

Die Multiplikazion der Logarithmen geschieht wie die Multiplikazion der Dezimalen.

(24) $\log. a = 1{\cdot}5794382 \times 5$

$$7{\cdot}8971910$$
$$a = 78927000$$

(25) $\log. b = (0{\cdot}5948576 - 2)3$

$$1{\cdot}7845728 - 6$$
$$\log. b = 0{\cdot}7845728 - 5$$
$$b = 0{\cdot}00006089375.$$

Bei der Division eines Logarithmus durch irgend eine Zahl, muß die etwa vorkommende negative Karakteristik durch den Divisor theilbar seyn oder theilbar gemacht werden, welches Letztere dadurch geschieht, daß man zur negativen Karakteristik so viel addirt, daß sie wirklich theilbar wird, jedoch ist in einem solchen Falle auch zur positiven Karakteristik eben dasselbe zu addiren, was zur negativen addirt wurde.

(26) $\log. c = \frac{3{\cdot}5729463}{3}$

$$\log. c = 1{\cdot}1909821$$
$$c = 15{\cdot}52323.$$

(27) $\log. d = \frac{2{\cdot}4376848}{4}$

$$\log. d = 0{\cdot}6094212$$
$$d = 4{\cdot}068377.$$

(28) $\log. e = \frac{0{\cdot}2793456}{5}$

$$\log. e = 0{\cdot}0558691$$
$$e = 1{\cdot}137284.$$

(29) $\log. f = \frac{0{\cdot}7295475 - 5}{5}$

$$\log. f = 0{\cdot}1459095 - 1$$
$$f = 0{\cdot}1399295$$

(30) $\log. g = \frac{0{\cdot}9435608 - 2}{3}$

$$\log. g = \frac{1{\cdot}9435608 - 3}{3}$$
$$\log. g = 0{\cdot}6478536 - 1$$
$$g = 0{\cdot}4444814.$$

(31) $\log. h = 2{\cdot}7954328 \times \frac{3}{4}$

$$\log. h = \frac{8{\cdot}3862984}{4}$$
$$\log. h = 2{\cdot}0965746$$
$$h = 124{\cdot}9035.$$

(32) $\log. i = 0{\cdot}7890123 - 2 \times \frac{7}{8}$

$$\log. i = \frac{5{\cdot}5230861 - 14}{8}$$
$$\log. i = \frac{7{\cdot}5230861 - 16}{8}$$
$$\log. i = 0{\cdot}9403858 - 2$$
$$i = 0{\cdot}08717376.$$

(33) $\log. k = 1{\cdot}4792345 \times 0{\cdot}75$

$$-\,0{\cdot}3698086$$
$$\log. k = 1{\cdot}1094259$$
$$k = 12{\cdot}86547.$$

(34) $\log. l = 0{\cdot}3456789 - 2 \times 0{\cdot}875$

$$0{\cdot}0432099$$
$$0{\cdot}3024690 - 1{\cdot}75$$
$$+\,0{\cdot}25 \qquad -0{\cdot}25$$
$$\log. l = 0{\cdot}5524690 - 2$$
$$l = 0{\cdot}03568365.$$

(35) $\log. m = 0{\cdot}9876543 - 1 : \frac{7}{8}$

$$7{\cdot}9012344 - 8$$
$$6{\cdot}9012344 - 7$$
$$\log. m = 0{\cdot}9858906 - 1$$
$$m = 0{\cdot}968034.$$

(36) $\log. p = 0{\cdot}1234567 - 1 : 0{\cdot}875$

$$+\,0{\cdot}75 \qquad -0{\cdot}75$$
$$(0{\cdot}8734567 - 1{\cdot}75) : 0{\cdot}875$$
$$\log. p = 0{\cdot}9982362 - 2$$
$$p = 0{\cdot}09959469.$$

VII.

Von den Münzen, Maßen und Gewichten.

§. 46. Die praktische Arithmetik hat zu ihrem Gegenstande die Berechnung zur wechselseitigen Ausgleichung des Eigenthums bei bürgerlichen Geschäften, als z. B. die Berechnung des Preises der Waaren beim Kaufe und Verkaufe, die Berechnung der Zinsen bei dargeliehenen Kapitalien, die Vorhineinbestimmung eines zu hoffenden Gewinnes oder eines zu besorgenden Verlustes vor Abschließung eines Geschäftes, die Berechnung des Lohnes für geleistete Dienste, Berechnung der landesfürstlichen und sonstigen Abgaben, die Vertheilung von gemeinsamen Gütern u. dgl.

§. 47. Jede Berechnung setzt Angaben oder Bedingungen der Aufgabe, die in Zahlen ausgedrückt sind, voraus. Die Arithmetik muß sodann lehren, wie diese Angaben, den verschiedenen Rechnungsfragen anpassend, mit einander zu verbinden sind, um durch diese Verbindung die zu suchende Größe gehörig ableiten zu können.

Um die Bedingungen der Aufgaben durch Zahlen auszudrücken, müssen die bekannten Gegenstände gemessen seyn, d. h. es müssen die betreffenden Gegenstände mit ihrer gleichnahmigen Einheit verglichen, und es muß die Zahl ausgemittelt seyn, welche angibt, wie oft die Einheit oder ihr aliquoter Theil in diesen Gegenständen enthalten ist.

§. 48. Diese Einheiten oder Maßstäbe sollten für die verschiedenen Größen so verschiedenartig seyn, als wie viele verschiedene Größen es gibt, sie können aber auf wenigere, und zwar beim Gelde auf die Münzen, bei den übrigen Gegenständen auf die eigentlich so genannten Maße und auf die Gewichte zurückgeführt werden. Außerdem werden verschiedene Gegenstände auch noch nach der Anzahl der einzelnen Stücke bestimmt, welche dann zählende Güter heißen.

Für jeden rechtlichen Geschäftsmann wäre es gewiß zu wünschen, daß alle handeltreibenden Staaten sich gleicher Münzen, Maße und Gewichte bedienen möchten. Es würde hierdurch viel Mühe und Zeit erspart, vielen zufälligen Rechnungsirrungen und vorsetzlichen Übervortheilungen vorgebeugt werden. So lange dieß der Fall nicht ist, wird man sich immer noch jener eigens zu diesem Zwecke bearbeiteten Werke bedienen müssen, in welchen für jeden einzelnen Staat insbesondere angegeben ist:

A. Von den Münzen:

1. Die gewöhnlichen Rechnungsmünzen, nach welchen in denselben gemeiniglich gekauft und verkauft wird.
2. Die Rechnungsmünzen, deren man sich nur bei gewissen Gelegenheiten, z. B. bei Wechselkursen und bei einigen Waarenpreisen bedient.
3. Die Preise der Gold- und Silbermünzen rücksichtlich der darin enthaltenen edlen Metalle.
4. Die wirklich ausgeprägten Landes- oder Nazional-Münzsorten in Gold, Silber, Kupfer, dann die üblichen Papiergelder.
5. Die fremden Gold- und Silbermünzen, welchen in irgend einem Lande der Vortheil des gesetzlichen Umlaufes gestattet ist.

B. Von den Maßen:

1. Längenmaße für größere und kleinere Längen, z. B. Ellen, Ruthen, Klafter, Fuß, Meilen u. s. w.
2. Das Flächen- oder Quadratmaß.
3. Das Körper- oder Kubikmaß;
   a) als geometrisches Maß,
   b) Hohlmaße für trockene Gegenstände, als z. B. Metzen, Scheffel u. s. w.
   c) Hohlmaße für Flüssigkeiten, als: Eimer, Maß, Pinte u. dgl.

C. Von den Gewichten:

1. Das Handelsgewicht;
2. das Gold- und Silbergewicht;
3. das für Juwelen gebräuchliche Gewicht;
4. das Apothekergewicht.

D. Von den zählenden Gütern:

1. Für den Leinwandhandel: Schocke, Stiegen, Weben.
2. Für den Garnhandel: Strehn, Zaspel.
3. Für den Rauhwaarenhandel: Zimmer und Decher.
4. Für den Papierhandel: Ballen, Rieß, Buch, Bogen.
5. Für Schiffsladungen: Lasten und Tonnen u. s. w.

Will man jedoch diese Bücher und Angaben zum praktischen Gebrauche benützen, so sind wieder eigene Kenntnisse über die Vergleichung und Berechnung aus diesen Angaben erforderlich, wovon wir das Nöthige am gehörigen Orte angeben werden.

§. 49. Bei der Bestimmung der Einheiten für die Münzen, Maße und Gewichte sind die französischen Mathematiker von der Ansicht ausgegangen, daß diese Einheiten nicht von einer Willkür abhängig, sondern aus der Natur selbst entnommen seyn sollten, so zwar, daß man, wenn auch alle Maße zugleich verloren gingen, diese doch ohne Schwierigkeit wieder herzustellen im Stande wäre. Der überwiegende Vortheil, welchen die Dezimalrechnung vor der Rechnung mit gemeinen Brüchen gewährt, bestimmte sie ferner, alle Unterabtheilungen der festgesetzten Einheiten nach Zehntheilen, Hunderttheilen, Tausendtheilen u. s. w. vorzunehmen.

Die Natur stellt uns als solche Maße für Linien die Länge des Sekundenpendels und die Länge des Meridiankreises auf. Diese können nur durch außerordentliche Naturereignisse, keineswegs aber durch politische Ereignisse verändert werden. Aus mehreren Gründen (man sehe hierüber das „**Annuaire de Paris pour l' an 1827** présenté **au Roi par le bureau des Longitudes,“ page 44** 2c.) fanden die Mathematiker für zweckdienlicher, zur Bestimmung der Linien-Einheit ein passendes Stück von der Peripherie des Meridiankreises zu wählen. — Wenn gleich die Meridiangrade wegen der abgeplatteten Form der Erde unter verschiedenen geographischen Breiten eine verschiedene Länge haben, so ist doch dieser Unterschied, da das Maß Eines Grades nur der $\frac{1}{400}$ste Theil eines Meridiangrades ist, so geringfügig, daß die aus einem solchen Bogen abgeleiteten kleinen Theile als ganz gleich angesehen werden können, und daß eine merkliche Abweichung sich nur für eine längere geographische Distanz besorgen ließe. Auf ein Gutachten, welches 1791 von der französischen Akademie der Wissenschaften abgefordert wurde, und

wobei Borda, La Grange, La Place, Monge und Condorcet als Kommissäre aufgestellt waren, bestimmte ein Dekret: „daß der Quadrant des Erdmeridians als Basis des neuen Maßsistems, der zehn Millionste Theil desselben die Einheit aller Maße, Gewichte und Münzen seyn, und die Dezimal-Eintheilung dabei durchgehends eingeführt werden sollte.“ — De Lambre und Mechain erhielten den Auftrag, den Meridianbogen zwischen Dünkirchen und Barcellona zu messen, und diese Messung wurde in der Folge von Biot und Arago bis zur Insel Formentera fortgesetzt. Hieraus fand man, daß der $\frac{1}{4}$ Theil des Meridians = **5130740** Toisen ist. Es ist also das Grundmaß oder die Linien-Einheit (**Metre**) = **0·513074** Toisen.

Um die Länge eines **Metre** jedesmal auffinden zu können, ohne erst die Länge eines Grades im Meridian aufzusuchen, hat man das **Metre** auf die Länge des Sekundenpendels zurückgeführt und gefunden, daß ein Pendel, welches täglich **100000** Schwingungen macht, gleich **0·741887 Metre** ist.

Alle übrigen Maße werden aus dem schon bestimmten **Metre** auf eine sehr einfache Weise abgeleitet.

Die Längenmaße sind entweder Vielfache oder aliquote Theile des **Metre**, wobei jedoch immer die Dezimal-Eintheilung Statt findet.

Die Einheit für das Hohlmaß, zu trocknen und flüssigen Waaren, ist der Kubus des zehnten Theils eines **Metre**, und heißt **Litre**.

Die Einheit für das Flächenmaß ist ein Quadrat, welches zu einer Seite zehn **Metre** hat. Man nennt sie **Arc** oder **perche carrée**; sie enthält **100 Metres carrées**.

Die Einheit des Körpermaßes, z. B. für Brennholz u. dgl. ist die **Stere**, d. i. ein Kubus, dessen Seite ein **Metre** ist.

Die Einheit für Gewichte ist das Gewicht des tausendsten Theiles eines Kubik-**Metre** destillirten Wassers in dem Zustande seiner größten Dichtigkeit, welche nicht bei der Temperatur des Gefrierpunktes, sondern ungefähr bei **4** Grad des **100**theiligen Thermometers Statt findet. Diese Gewichts-Einheit heißt **Kilogramme**. Es ist daher Ein **Gramme** der tausendste Theil eines **Kilogramme**.

Die Einheit für die Münzen ist ein **Franc d'argent**, dessen Gewicht gleich **5 Grammes** ist *). Da dieses Gewicht ein aliquoter Theil des **Kilogramme** ist, nämlich der **200**ste Theil desselben, so kann es im Nothfall selbst als Gewicht benützt werden. Die **Francs d'argent** werden immer so ausgeprägt, daß sie $\frac{9}{10}$ Theile fein Silber und $\frac{1}{10}$ Theil Zusatz enthalten.

Übereinstimmend mit der Eintheilung aller Maßeinheiten wollte man auch den Tag in **10** Stunden, die Stunde in **100** Minuten u. s. w. eintheilen, so daß Ein Tag **100000** Sekunden hat, und daß daher jenes Pendel ein Sekundenpendel genannt werden kann, welches an einem Tage **100000** Schwingungen macht. Man hat aber für zweckdienlicher erachtet, das Duodezimalsistem beizubehalten, wornach ein Sekundenpendel in Einem Tage **86400** Schwingungen macht.

Von jedem dieser Grundmaße hat man die niederen und höheren Einheiten so genommen, daß jede höhere Einheit zehn der nächst niederen in sich

*) Nach Verordnung vom 28. März 1803.

begreift. Bei den höheren Einheiten werden die Benennungen der Grundeinheiten mit einem entsprechenden griechischen, bei den niedern Einheiten aber mit einem solchen lateinischen Zahlworte verbunden. Daher werden den ersteren die Worte **Myria**, **Kilo**, **Hecto** und **Deca** statt **10000**, **1000**, **100** und **10**; den letztern aber die Worte **Deci**, **Centi**, **Milli** u. s. w. statt Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. vorgesetzt.

Sistematische Benennungen.		Werthe dafür.
Längenmaße.		
Myriamètre	=	**10000 Mètres**
Kilomètre	=	**1000** "
Hectomètre	=	**100** "
Decamètre	=	**10** "
Mètre	=	Einheit des Längenmaßes.
Decimètre	=	**0·1** Mètre.
Centimètre	=	**0·01** Mètre.
Millimètre	=	**0·001** Mètre.
Flächenmaße.		
Hectare	=	**10000** Quadrat-Mètre.
Arc	=	**100** Quadrat-Mètre.
Centiare	=	**1** Quadrat-Mètre.
Hohlmaße für Flüssigkeiten.		
Decalitre	=	**10** Kubik-Decimètre.
Litre	=	**1** Kubik-Decimètre.
Decilitre	=	**0·1** Kubik-Decimètre.
Hohlmaße für trockene Körper.		
Kilolitre	= Ein Kubik-Mètre =	**1000** Kubik-Decimètre.
Hectolitre	=	**100** Kubik-Decimètre.
Decalitre	=	**10** Kubik-Decimètre.
Litre	=	**1** Kubik-Decimètre.
Körpermaße.		
Stère	=	**1** Kubik-Mètre.
Decistère	=	**0·1** Kubik-Mètre.
Gewichte.		
Millier	=	**1000 Kilogrammes** (Eine Schiffs-Tonne).
Quintal	=	**100 Kilogrammes.**
Kilogramme	=	der Einheit.
Hectogramme	=	**0·1** Kilogramme.
Decagramme	=	**0·01** Kilogramme.
Gramme	=	**0·001** Kilogramme.
Decigramme	=	**0·0001** Kilogramme.

Die Münzen können, wie schon früher bemerkt wurde, sogleich als Gewicht benützt werden.

Ein Silberstück von **2 Francs**, oder Ein Kupferstück von **5 Centimes**	wiegt Ein **Decagramme.**
4 Silberstücke von **5 Francs** **10** „ von **2 Francs** **10** Kupferstücke von **5 Centimes**	wiegen Ein **Hectogramme.**
155 Goldstücke zu **20 Francs** **40** Silberstücke zu **5 Francs**	wiegen Ein **Kilogramme**

u. s. w.

Die verschiedenen französischen Münzen haben auch verschiedene Durchmesser. Eine Ausnahme von dieser Regel machen die **2Francs**-Stücke, welche mit den **5Centimes**-Stücken denselben Durchmesser haben, jedoch sind sie einestheils durch das Gepräge von einander verschieden, ferner sind erstere aus Kupfer und letztere aus Silber geprägt. Die Ursache, warum diese Münzen mit verschiedenen Durchmessern ausgeprägt werden, ist, daß, wenn man sie in Rollen stellt, jede Verwechslung sogleich bemerkbar wird.

Alle Münzstücke derselben Gattung haben denselben Durchmesser, sie mögen in was immer für Münzanstalten im Königreiche geprägt seyn, so daß sie, in eine Rolle gestellt, einen vollkommenen Zylinder geben müssen. Überdies ist auch die Dicke der gleichartigen Münzstücke von der Art, daß aufgestellte Rollen von gleicher Höhe auch immer eine gleiche Anzahl Stücke enthalten, wodurch das Zählen der Geldstücke bedeutend erleichtert wird.

Die Durchmesser der Münzen sind so bestimmt, daß diese gehörig neben einander gelegt, auch als Längenmaß gebraucht werden können. So geben

32 Stück à **40 Francs** und **8** Stück à **20 Francs** **11** „ „ „ „ „ **34** „ „ „ „ **10** „ „ **5** „ „ **11** „ „ **2** „ **20** „ { „ **2** „ / „ **5 Centimes** } und **20** Stück à **1 Franc**	Ein **Mètre.**

Bei Vergleichung dieser metrologischen Bestimmungen geht hervor, daß das ganze metrische System, welches aus der Grundeinheit der Längemaße die Flächenmaße, aus dieser die Körpermaße, aus diesen die Gewichte, und aus den Gewichten die Münzeinheiten herleitet, sehr gut und in sich selbst abgeschlossen ist.

1. Von den Münzen.

§. 50. Das Geld, welches von gelten oder werth seyn seine Benennung ableitet, ist das unter allen kultivirten Völkern durch das Bedürfniß eingeführte allgemeine Tausch-, Vergütungs-, Ersatz- und Umsatzmittel, welches für verschiedene Güter in verschiedener Menge als gleiche Werthgröße (als Äquivalent) angenommen wird. Es ist Bedürfniß, weil man nicht immer für jede Waare jede andere beliebige Waare eintauschen kann, indem der, welcher die gewünschte andere Waare hat, äußerst selten gerade diejenige Waare braucht, die ihm zum Tausche angebothen wird. Es war daher nothwendig, einen allgemeinen Stellvertreter für alle Waaren aufzusuchen, welchen man für jede Waare erhält, und wofür man wieder jede andere Waare einkaufen kann. Dieses allgemeine Mittel dient auch sehr gut zur Vergütung für aufgewendete Zeit und Mühe, oder als Lohn für geleistete Dienste.

Soll das zur Vergütung für alle Waaren und andere Gegenstände dienende Mittel passend seyn, so muß es einen allgemein anerkannten Werth haben. Dieser findet sich insbesondere in den Metallen, und vorzugsweise in den edleren. Gold und Silber entlehnen ihren Werth aus ihrer Nützlichkeit im Gebrauche, weil sie, besonders das erstere, in den meisten Säuren und Alkalien unauflösbar, daher zur Darstellung von verschiedenen Gefäßen und Zierrathen, zum Schmucke u. dgl. ganz besonders geschätzt sind. Überdies sind sie selten, und werden nur mit beträchtlicher Mühe und Aufwand aus der Erde genommen, wodurch sich ihr Werth noch mehr erhöht. Auch die innern Eigenschaften dieser edleren Metalle machen sie zum Geldgebrauche sehr geeignet, diese sind: ihr Glanz, ihre Dichtigkeit, ihre Empfänglichkeit für jede beliebige Form, ihre leicht mögliche Theilbarkeit, unbeschadet ihres innern Werthes u. dgl.

Anfänglich wog man diese Metallstücke blos zu. Da aber hierbei Übervortheilungen sowohl in Hinsicht der Feinheit der Metalle, als auch beim Abwägen selbst ohne Ende möglich sind, so wurden in der Folge die Metallstücke unter öffentlicher Autorität ausgeprägt, sie erhalten eine bestimmte Form, ferner Schrift, Namen und Wappen des Prägeherrn, wodurch die Reinheit des Metalles und die Richtigkeit des Gewichtes verbürgt wird. Solche Metall- oder Geldstücke heißen Münzen, die Bildseite der Münzen heißt die Hauptseite (Avers), die Schrift- oder Wappenseite wird Rückseite (Revers) genannt.

Der Werth der Münzen ist abhängig von dem Materiale, aus welchem sie geprägt sind, von der Feinheit dieses Materiales, und von ihrem Gewichte. Die aus Gold und Silber geprägten Münzen haben einen allgemein anerkannten Werth. Ferner werden auch Münzen aus Kupfer geprägt, die gewöhnlich nur in jenen Ländern einen bestimmten Preis haben, in welchen sie geprägt sind, und welche blos dazu dienen, um sehr kleine Ausgleichungen möglich zu machen. Diese heißen auch Scheidemünzen. Um solche kleine Ausgleichungen treffen zu können, werden auch kleinere Silbermünzen, aber nur aus minder reinem Silber geprägt, damit sie für den Gebrauch nicht zu klein ausfallen.

Gold und Silber können nie ganz rein zu Münzen verarbeitet werden, weil sie viel zu weich sind, und daher der Abnützung zu sehr unterworfen wären. Aus dieser Ursache werden sie mit Kupfer legirt, welches Zusatz genannt wird. Dieser Zusatz darf aber nicht zu bedeutend seyn, sonst verlieren die Münzen die vorzüglichsten Eigenschaften des Geldes, es wird nämlich ihr innererer Werth hierdurch verringert, und sie werden zu schwer zum Transportiren. Die Feinheit des Metalles bei einer Münze wird das Korn, das absolute Gewicht derselben das Schrot genannt.

Als vergleichender Maßstab für die Gold- und Silbergewichte wird in Deutschland größtentheils die köllnische Mark gebraucht. Beim Silbergewichte wird diese Mark in **16** Lothe, Ein Loth in **18** Grane; beim Goldgewichte aber in **24** Karate, und Ein Karat in **12** Grane getheilt. Es hat sonach sowohl beim Silber- als beim Goldgewichte Eine Mark **288** Gran.

Ist die Mark des Goldes oder Silbers ganz rein, ohne Zusatz, so heißt sie eine feine Mark, im entgegengesetzten Falle wird sie eine beschickte, legirte oder rauhe Mark genannt. Je nachdem nun eine rauhe Mark Silber **13**, **12** oder n Loth fein Silber, also **3**, **4** oder (**16**—n) Loth Zusatz enthält, wird es **13**löthig, **12**löthig oder nlöthig genannt. Eben so wird eine

rauhe Mark Gold **23**, **22** oder *n*karatig genannt, wenn sie so viele Karat fein Gold enthält, folglich beziehungsweise **1**, **2** oder (**24**—**n**) Karat Zusatz hat.

Zur noch genaueren Bestimmung des Gold- und Silbergewichtes wird eine Mark in **16** Loth, **1** Loth in **4** Quintel, **1** Quintel in **4** Pfennige, **1** Pfennig in **128** Richtpfennige getheilt, so daß Eine Mark zu **65536** Richtpfennige gerechnet wird.

Außer der Köllnischen Mark wird als vergleichender Maßstab für Gold- und Silbergewichte das holländische **Troy**-Gewicht sehr häufig benützt. Es ist Eine Mark **Troy**-Gewicht = **8** Unzen, Eine Unze = **20** Engel, Ein Engel = **32** holländische Asse. Es hat daher Eine Mark **Troy**-Gewicht **5120** holländische Asse. Das **Troy**-Gewicht erhielt seine Benennung von der Stadt **Troyes** in der ehemaligen Provinz Champagne, wo sonst sehr ansehnliche Jahrmärkte gehalten wurden.

Bei Vergleichung der Köllnischen Mark mit der Holländischen hat man gefunden, daß eine Köllnische Mark = **4867·668** holländische Asse ist. In der Rechnung pflegt man gewöhnlich Eine Köllnische Mark = **4864** Holländische Asse anzunehmen, wenn gleich **4866** für die Rechnung nicht viel minder bequem ist, und der Wahrheit viel näher liegt.

Bei Vergleichung der Wiener Mark mit der Holländischen findet man, daß Eine Wiener Mark = **5840·83** Holländische Asse ist. Hieraus folgt, daß **5** Wiener Mark = **6** Köllnischen Marken gerechnet werden können, was auch durch ein Allerhöchstes Patent vom **17.** April **1771** angeordnet ist.

Von den vorzüglichsten Münzfüßen.

§. **51.** Unter dem **Münzfuße** versteht man die gesetzliche Bestimmung des Schrotes und Kornes. Der Münzfuß wird auf zweierlei Art bestimmt. Es wird entweder die Anzahl Stücke bestimmt, die aus Einer rauhen Mark geprägt werden, wobei aber auch immer der Feingehalt Einer rauhen Mark bekannt seyn muß; z. B. aus Einer rauhen Köllnischen Mark, **23** Karat **8** Gran fein, werden **67** Dukaten (#) geprägt; oder man bestimmt die Anzahl Stücke, in welchen Eine feine Mark enthalten ist; z. B. **20** Gulden Konvenzions-Münze enthalten Eine feine Mark. Ist eine von diesen beiden Bedingungen gegeben, so läßt sich hieraus die andere durch Rechnung bestimmen. So würde man finden, daß, wenn aus einer rauhen Köllnischen Mark, welche **23** Karat **8** Gran fein ist, **67** # geprägt werden, in **67** $^{6}/_{71}$ # Eine feine Mark Silber enthalten seyn müsse. Eben so wird man aus der Bedingung, daß in **20** fl. Konvenzions-Münze Eine feine Köllnische Mark enthalten seyn müsse, auffinden, daß aus einer solchen rauhen Mark **13** $^{1}/_{3}$ löthigem Silber **16** $^{2}/_{3}$ fl. Konvenzions-Münze geprägt werden können.

Das Schrot einer Münze wird gefunden, wenn man das Gewicht Einer Mark (**4864** Holländischer Asse) durch die Anzahl Stücke dividirt, die aus Einer rauhen Mark geprägt werden. So ist das Schrot bei Einem Gulden Konvenzionsmünze = **291·84** Holländischer Asse. Das **Korn** wird gefunden, wenn man **4864** durch die Anzahl der Stücke dividirt, in welchen Eine feine Mark enthalten ist. So ist das Korn von Einem Gulden Konvenzions-Münze gleich **243·20** Holl. Asse. Also beträgt der Zusatz **48·64** Holl. Asse.

Zu den im bürgerlichen Leben am meisten vorkommenden Münzfüßen gehören:

Der Konvenzionsfuß. Dieser wurde 1748 von Kaiser Franz eingeführt, im Jahre 1753 (am 20. September) durch eine mit Baiern abgeschlossene Konvenzion erweitert, und später auch noch in mehreren anderen Staaten Deutschlands angenommen. Nach diesem Fuße ist Eine feine Köllnische Mark in 10 Stück Speziesthaler, oder in 13⅓ Reichsthaler, oder in 20 fl. enthalten. Er wird auch der Zwanzig-Guldenfuß genannt. In Einer rauhen Mark sind 13 Loth 6 Gran (13⅓ Loth) fein Silber enthalten.

Der Leipziger Fuß. Dieser wurde 1693 zu Leipzig eingeführt, und 1696 als allgemeiner Reichsfuß angenommen. Nach diesem Fuße ist Eine feine Köllnische Mark in 12 Thalern oder 18 Gulden enthalten, daher er auch der Achtzehn-Guldenfuß genannt wird. Eine rauhe Mark enthält 14 Loth 4 Gran fein.

Der Graumannische oder auch der Preußische Kurrentfuß genannt. Dieser wurde 1750 in Vorschlag gebracht, und 1764 verbessert. Nach diesem Münzfuße ist Eine feine Köllnische Mark in 14 Thaler oder 21 Gulden enthalten. Dieser Münzfuß wird daher auch der Ein- und zwanzig-Guldenfuß genannt.

Der Vier- und zwanzig-Guldenfuß. Dieser wurde, nachdem Baiern schon im nächsten Jahre nach der abgeschlossenen Konvenzion davon abwich, in diesem Lande eingeführt. Er besteht nur in einer 20prozentigen Erhöhung der nach dem Konvenzionsfuße ausgeprägten Münze, so daß ein Zwanziger zu 24 Kreuzer gerechnet wird, und 5 Zwanziger 2 bairische Gulden ausmachen. Nach diesem Münzfuße sind nur wenige Scheidemünzen ausgeprägt. Dieser Münzfuß ist auch unter dem Nahmen der Rheinischen Währung bekannt. Eine feine Köllnische Mark Silber ist demnach in 24 fl. dieser Münze enthalten.

Von dem im Lombardisch-Venezianischen Königreiche bestehenden Münzsisteme.

§. 52. In den k. k. Österreichischen Staaten ist in der Regel der Zwanzig-Guldenfuß für die zirkulirenden Münzen bestimmt, was um so mehr angenommen werden muß, als die nur wenig mehr vorhandene Wiener Währung seit einer Reihe von Jahren her in einem unveränderlichen Verhältnisse zur Konvenzions-Münze steht, und gegenwärtig gleichsam nur mehr wie eine Scheidemünze zur Ausgleichung kleiner Beträge betrachtet werden kann. Die wenigen Ausnahmen, daß an manchen Orten in Oberösterreich, in Salzburg und in Tirol kleine Ausgleichungen noch nach dem Vierundzwanzig-Guldenfuße üblich sind, verdienen nicht berücksichtiget zu werden.

Im Lombardisch-Venezianischen Königreiche waren früher noch mehrere und verschiedene Münzsorten üblich; aber auch dort ist durch das Allerhöchste Patent vom 1. November 1823 diesem Übelstande abgeholfen. Es ist auch dort das Ausprägen der Münzen nach dem Zwanzig-Guldenfuße angeordnet, nur ist die Untertheilung nach dem Dezimalfuße bestimmt.

Nach dem Wortlaute des genannten Allerhöchsten Patentes wird angeordnet:

(§. 1.) „Der für die Ausprägung von Silbermünzen angenommene Kon„venzionsfuß, und das in Unsern Erblanden bestehende gesetzliche Werthver„hältniß des Goldes und des Kupfers hat von nun auch ausschließend die „Grundlage der Ausprägung und der Werthsbestimmungen für die in Unserem

„Lombardisch-Venezianischen Königreiche zirkulirenden Gold-, Silber- und „Kupfermünzen zu bilden."

(§. 2.) „Zum Behufe der Anwendung dieses Münzfußes auf das me- „trische Gewicht, welches für die Ausprägung in Unserem Lombardisch-Ve- „nezianischen Königreiche beibehalten wird, setzen Wir folgendes aus genauen „Vergleichungen erhobene Verhältniß des metrischen Gewichtes zum Wiener „Gewichte fest:

„Ein metrisches Pfund wird drei Marken, neun Lothen und 48 Richt- „pfennigen des Wiener Markgewichtes gleich gehalten, und Eine Wiener „Mark wird zwei Oncien, acht Grossi, 6·44 eines Granes des metrischen „Gewichtes gleich erkläret."

(§. 3.) „Diesem gemäß wird das metrische Pfund auf allen Unseren „Münzstätten mit nachstehendem Werthe ausgeprägt werden:

a) „das feine Gold zu 1307 fl. 20 Kr. oder 3922 neuen Österreichischen „Liren;"

b) „das feine Silber zu 85 fl. 31 Kr. oder zu 256·55 neuen Österreichi- „schen Liren;"

c) „das Kupfer zu Einem Gulden 54·284 Kreuzer, oder zu 5 neuen „Österreichischen Liren und 71·42 Centesimi."

(§. 4.) „Die Einheit der in Unserem Lombardisch-Venezianischen Kö- „nigreiche auszuprägenden Münzen wird aus einer Silbermünze, mit der Be- „nennung: Österreichische Lira, bestehen, welche ein metrisches Gewicht „von 4 Denar 3 Gran und 30 25/27 Hunderttheile eines Granes erhält, und „aus neun Zehntheilen feinem Silber und Einem Theile Kupferzusatze zusam- „mengesetzt wird. Sie wird in Hundertheile (Centesimi) getheilt, und ihr „verglichener Werth wird zu den konvenzionsmäßig ausgeprägten Münzen auf „zwanzig Kreuzer, und zu der bisherigen italienischen Währung auf 87 Cen- „tesimi des italienischen Münzfußes festgesetzt."

(§. 5.) „Nebst den Österreichischen Gold- und Silbermünzen und der „so eben erwähnten Münzeinheit unter der Benennung der Lira, werden in „Unserem Lombardisch-Venezianischen Königreiche nachstehende Münzen aus- „geprägt werden:

„An Goldmünzen:

1. „der Souverain im Werthe von 13 fl. 20 Kr. oder 40 Liren, mit „einem Gewichte von 11 Denar, 3 Gran, 32 10/146 Hunderttheilen „Eines Granes;

2. „der halbe Souverain im Werthe von 6 fl. 40 Kr. oder 20 Liren, „mit einem Gewichte von 5 Denar, 6 Gran, 66 5/146 Hunderttthei- „len Eines Granes."

„An Silbermünzen:

1. „der Scudo von zwei Gulden oder 6 Liren, mit einem Gewichte von „25 Denar, 9 Gran, 85 15/27 Hunderttheilen Eines Granes;"

2. „der halbe Scudo von Einem Gulden oder 3 Liren, mit einem Ge- „wichte von 12 Denar, 9 Gran, 72 21/27 Hunderttheilen Eines „Granes;"

3. „die halbe Lira von zehn Kreuzern oder 50 Centesimi, mit einem „Gewichte von 2 Denar, 1 Gran, 65 25/54 Hunderttheilen Eines „Granes;"

4. „die Viertel-Lira von 5 Kreuzer oder 25 Centesimi, mit einem „Gewichte von 1 Denar, 6 Gran, $24^{21}/_{216}$ Hunderttheilen Eines „Granes.“

„An Kupfermünzen:

1. „der Soldo von Einem Kreuzer oder 5 Centesimi, mit einem Ge- „wichte von 8 Denar $7\frac{1}{2}$ Gran;“
2. „das 3 Centesimi-Stück von $\frac{3}{5}$ Kreuzer, mit einem Gewichte von 5 „Denar $2\frac{1}{2}$ Gran;“
3. „der Centesimo von $\frac{1}{5}$ Kreuzer, mit einem Gewichte von 1 De- „nar $7\frac{1}{2}$ Gran.“

(§. 6.) „Die so eben aufgeführten Gold- und Silbermünzen werden mit „einem Gehalte von $\frac{9}{10}$ Theilen feinem Metalle und $\frac{1}{10}$ Theile Kupferzu- „satz ausgeprägt werden, nur die Viertel-Lira wird einen Feingehalt von „$\frac{6}{10}$ Theilen Silber und $\frac{4}{10}$ Theilen Kupferzusatz erhalten, damit ihr Um- „fang nicht zu klein entfalle.“

(§. 7.) „Bei der Ausprägung der Gold- und Silbermünzen wird keine „Abweichung (Toleranz) von dem im vorstehenden Absatze angegebenen Fein- „gehalte gestattet. In Ansehung des Gewichtes kann nur in so fern eine Abwei- „chung (Toleranz) eintreten, als der Überschuß oder Abgang bei Einhundert „Stück Goldmünzen den achten Theil Eines Goldstückes von derselben Gat- „tung, und bei Einhundert Stück Silbermünzen den vierten Theil Eines „Silberstückes von derselben Münzgattung nicht übersteigt. Bei der Ausprä- „gung der Kupfermünzen wird ein Gewichtsüberschuß oder Abgang mit dem „hundertsten Theile ihres Gewichtes zugelassen.“

(§. 8.) „Die neu auszuprägenden Münzen werden folgende Durchmes- „ser im metrischen Maße erhalten: Der Souverain 25 Atome, der halbe „Souverain 20, der Scudo 38, der halbe Scudo 30, die Lira 22, die hal- „be Lira 18, die Viertel-Lira 16, der Soldo 24, das Dreicentesimi-Stück „22, der Centesimo 18.“

(§. 20.) „Als gesetzlichen Vergleichungsmaßstab zwischen der neuen und „den früher bestandenen Währungen setzen Wir fest, daß 100 Österreichische „Liren 87 Italienischen Liren, oder $113^{9}/_{32}$ Mailänder Liren, oder $169^{59}/_{64}$ „Venezianischen Liren gleich zu achten sind.“

Hieraus folgt nachstehende Vergleichung:

Oesterreich. Lire		Italienische Lire		Mailänder Lire		Venezianer Lire
100	=	87	=	$113^{9}/_{32}$	=	$169^{59}/_{64}$
$114^{82}/_{87}$	=	100	=	$130^{5}/_{24}$	=	$195^{5}/_{16}$
$88^{8}/_{29}$	=	$76\frac{4}{5}$	=	100	=	150
$48^{74}/_{87}$	=	$51\frac{1}{5}$	=	$66\frac{2}{3}$	=	100.

In diesem Allerhöchsten Patente sind zwei Tabellen angeschlossen, von welchen die eine die gesetzlichen Landesmünzen, die andere jene Münzen enthält, welche neben diesen die Vortheile des gesetzlichen Umlaufes genießen. Sie sind die nachfolgenden:

Münz-Tarif
für das Lombardisch-Venezianische Königreich.

I. Abtheilung.
Gesetzliche Landesmünzen.
A. Goldmünzen.

Gruppe	Münzgattungen	Schwere Eines Stückes: nach österreichischen Dukaten zu 60 Gran im Gewichte: Duk	Gr.	nach dem metrischen Gewichte: Den.	$\frac{1}{1000}$	Werthbetrag Eines Stückes: in neuen Österreichischen Liren (Lira austriaca): Lira	Cent.	Mil.	in Konvenzions-Münze nach dem 20 fl. Fuße: fl.	kr.	$\frac{1}{5}$ kr.
Österreichische	K. K. Doppelter Dukaten	2	—	6	982	27	—	—	9	—	—
Österreichische	» einfacher »	1	—	3	491	13	50	—	4	30	—
Österreichische	» Souvraind'or älteren Gepräges	3	11	11	112	40	—	—	13	20	—
Österreichische	» Souvraind'or, halber, älteren Gepräges	1	35½	5	556	20	—	—	6	40	—
Österreichische	» Souvraind'or neuen Gepräges	3	14 $\frac{6}{8}$	11	332	40	—	—	13	20	—
Österreichische	» Souvraind'or, halber, neuen Gepräges	1	37 $\frac{3}{8}$	5	666	20	—	—	6	40	—

B. Silbermünzen.

Gruppe	Münzgattungen	Werthbetrag Eines Stückes: Lira	Cent.	Mil.	fl.	kr.	$\frac{1}{5}$ kr.
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	K. K. und andere konvenzionsmäßige Thaler	6	—	—	2	—	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» » » halbe Thaler oder Gulden	3	—	—	1	—	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» halbes Guldenstück	1	50	—	—	30	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» Viertel-Gulden oder 15 Kreuzerstück	—	75	—	—	15	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» und andere konvenzionsmäßige Kopf- oder 20 Kreuzerstücke	1	—	—	—	20	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» und andere konvenzionsmäßige halbe Kopf- oder 10 Kreuzerstücke	—	50	—	—	10	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» konvenzionsmäßiges 5 Kreuzerstück	—	25	—	—	5	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» » 3 »	—	15	—	—	3	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» Kronenthaler	6	60	—	2	12	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» halber Kronenthaler	3	30	—	1	6	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» Viertel »	1	65	—	—	33	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» Scudo	6	—	—	2	—	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» halber Scudo	3	—	—	1	—	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» Lira (Lira austriaca)	1	—	—	—	20	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» halbe Lira	—	50	—	—	10	—
Österreichische u. auch andere Konv.-Münzen	» Viertel-Lira	—	25	—	—	5	—

C. Kupfermünzen.

Gruppe	Münzgattungen	Lira	Cent.	Mil.	fl.	kr.	$\frac{1}{5}$ kr.
Österreichische	K. K. Ein Kreuzerstück vom Jahre 1816	—	5	—	—	1	—
Österreichische	» Fünf Centesimistück oder Soldo	—	5	—	—	1	—
Österreichische	» Drei »	—	3	—	—	—	3
Österreichische	» Ein Centesimo	—	1	—	—	-	1

Münzgattungen.		Schwere Eines Stückes: nach österreichischen Dukaten zu 60 Gran im Gewichte		Schwere Eines Stückes: nach dem metrischen Gewichte		Werthbetrag Eines Stückes: in neuen österreichischen Liren Lira austriaca			Werthbetrag Eines Stückes: in Konventions-Münze nach dem 20 fl. Fuße		
		Duk	Gran	Den.	$\frac{1}{1000}$	Lira	Cent.	Mil.	fl.	kr.	$\frac{1}{4}$ kr.
II. Abtheilung.											
Münzen, welche neben den gesetzlichen Landesmünzen die Vortheile des gesetzlichen Umlaufes genießen.											
A. Goldmünzen.											
Bairische Dukaten		1	—	3	491	13	40	—	4	28	—
Bologneser	Doppia	1	34	5	469	19	40	—	6	28	—
	Ihre Hälfte nach Verhältniß										
	Dukaten oder Zecchino	—	$58\frac{3}{4}$	3	417	13	20	—	4	24	—
	Dessen Hälfte nach Verhältniß										
Französische	40 Franken Stück	3	42	12	903	45	50	—	15	10	—
	20 Franken Stück	1	51	6	452	22	75	—	7	35	—
	Doppelter Louisd'or seit 1785	4	22	15	244	53	55	—	17	51	—
	Einfacher Louisd'or seit 1785	2	11	7	622	26	75	—	8	55	—
Florentiner Dukaten oder Gigliato		1	—	3	491	13	60	—	4	32	—
Genueser	Doppia zu 96 Lire	7	13	25	193	89	75	—	29	55	—
	Ihre Unterabtheilungen nach Verhältniß										
Italienische	40 Lire Stück	3	42	12	903	45	50	—	15	10	—
	20 » »	1	51	6	452	22	75	—	7	35	—
Mailänder	Doppia	1	48	6	283	22	40	—	7	28	—
	Dukaten oder Zecchino	1	—	3	491	13	60	—	4	32	—
Parmesaner	Doppia	2	2	7	98	24	60	—	8	12	—
	40 Lire Stücke v. J. 1815	3	42	12	903	45	50	—	15	10	—
	20 » » »	1	51	6	452	22	75	—	7	35	—
Piemonteser oder Savoyische	Doppia von 1787 und früher	2	37	9	134	32	20	—	10	44	—
	80 Lire Stück vom Jahre 1821 an	7	24	25	806	91	—	—	30	20	—
	40 Lire Stück vom Jahre 1821 an	3	42	12	903	45	50	—	15	10	—
	20 Lire Stück vom Jahre 1816 an	1	51	6	452	22	75	—	7	35	—
Römische	Doppia	1	34	5	469	19	40	—	6	28	—
	Ihre Hälfte nach Verhältniß										
	Dukaten oder Zecchino	—	$58\frac{3}{4}$	3	417	13	20	—	4	24	—
	Dessen Hälfte nach Verhältniß										

Münzgattungen.		Werthbetrag Eines Stückes: in neuen Österreichischen Liren. Lira austriaca			in Konvenzions-Münze nach dem 20 fl. Fuße		
		Lira	Cent.	Mil.	fl.	kr.	1/5 kr.
B. Silbermünzen.							
Bairische Schwert oder Kronenthaler		6	60	—	2	12	
Bologneser	Scudo oder Frauenthaler	6	17	—	2	3	2
	» von 10 Paoli	6	11	—	2	2	1
Florentiner Francescono oder Pisis Thaler		6	30	—	2	6	—
Französische	5 Franken Stück	5	74	—	1	54	4
	2 » »	2	29	6	—	45	4·6
	1 » »	1	14	8	—	22	4·8
	3/4 » »	—	86	1	—	17	1·1
	1/2 » »	—	57	4	—	11	2·4
	1/4 » »	—	28	7	—	5	3·7
Genueser neuer Scudo		7	45	—	2	29	—
Italienische	5 Liren Stück	5	74	—	1	54	4
	2 » »	2	29	6	—	45	4·6
	1 « »	1	14	8	—	22	4·8
	3/4 » »	—	86	1	—	17	1·1
	1/2 » »	—	57	4	—	11	2·4
	1/4 » »	—	28	7	—	5	3·7
Mailänder	Scudo	5	29	—	1	45	4
	Dessen Hälfte nach Verhältniß						
	Lira vor und nach dem Jahre 1778	—	88	—	—	17	3
	Die Hälfte nach Verhältniß						
Modeneser	Scudo von Franz dem III.	6	37	—	2	7	2
	Scudo von Herkules dem III. v. Jahre 1782	6	43	—	2	8	3
Parmesaner	Ducato	5	77	—	1	55	2
	5 Liren Stück vom Jahre 1815 an	5	74	—	1	54	4
	2 » » » » »	2	29	6	—	45	4·6
	1 » » » » »	1	14	8	—	22	4·8
	1/2 » » » » »	—	57	4	—	11	2·4
	1/4 » » » » »	—	28	7	—	5	3·7
Piemontesische u. Savoyische	Scudo oder Thaler	8	—	—	2	40	—
	neuer Scudo zu 5 Liren von 1816 an	5	74	—	1	54	4
Römische Scudo von 10 Paoli		6	11	—	2	2	1
Spanische ältere u. neuere Matte od. Säulenthaler		6	15	—	2	3	—
Venezianische	Ducaton oder Kreuzthaler	7	65	—	2	33	—
	Giustina	6	73	—	2	14	3
	In den gesammten Provinzen, deren Leitung dem venezianischen Gubernium zugewiesen ist, und in den Provinzen Brescia, Bergamo und Cremona. — Venezianer Lirazza od. Petizza	—	68	—	—	13	3
	— Venetianer 15 Soldi Stück	—	33	—	—	6	3
	Nur in den Provinzen des Venediger Gouvernements-Gebiethes. — Venezianer 2 Lire provinciali	—	56	—	—	11	1
	— » 1 Lira »	—	28	—	—	5	3
	— 30 Soldi Stück v. neuen Gepr.	—	75	—	—	15	—
	— 20 » » » »	—	50	—	—	10	—
	— 10 » » » »	—	25	—	—	5	—

Münzgattungen.	Werthbetrag Eines Stückes in neuen Österreichischen Liren. Lira austriaca. Lira	Cent.	Mil.	in Konvenzions = Münze nach dem 20 fl. Fuße fl.	kr.	$\frac{1}{5}$ kr.
C. Kupfermünzen.						
Italienische 5 Centesimi Stück	—	5	7·5	—	1	0·75
Italienische 3 » »	—	3	4·5	—	—	3·45
Italienische 1 Centesimo Stück	—	1	1·5	—	—	1·15
Mailänder Sesino	—	2	3	—	—	2·3
Mailänder Quattrino	—	1	1·5	—	—	1·15

Anmerkungen. Alle in diesem Tarife aufgeführten Goldmünzen müssen vollwichtig seyn. Als vollwichtig sind nur diejenigen anzusehen, welche mit der Beifügung Eines Österreichischen Dukaten Granes oder von 58 Hunderttheilen Eines metrischen Granes bei der Abwägung das angegebene Gewicht erreichen.

Zweitens. Die in diesem Tarife aufgeführten Silbermünzen werden um den beigesetzten Tarifs = Werth sowohl bei den öffentlichen Kassen anzunehmen und zu verausgaben, als auch unter Privaten anzunehmen seyn.

Drittens. Die Montforter und die in Form der halben Guldenstücke mit einem Vierecke in schiefer Richtung von verschiedenen deutschen Reichsständen geprägten 20 Kreuzer Stücke werden, als längst verrufene Münzen, bei keiner Zahlung angenommen.

Viertens. Alle in dem gegenwärtigen Tarife nicht aufgeführten Gold= und Silbermünzen, dann die nicht vollwichtigen Goldmünzen, und alle beschädigten, durchlöcherten, sehr abgenützten oder im Gepräge sehr unkenntlichen Gold= und Silbermünzen werden bei öffentlichen Kassen und Zahlungen als Münze gar nicht, sondern nur bei den Gold= und Silber = Einlösungsämtern als Materiale angenommen und sistemmäßig eingelöset werden.

Wien, am 1. November 1823.

Vom Münz = Pari.

§. 53. Sollen Geldbeträge, die nach irgend einer Münzsorte bestimmt sind, mit den in irgend einem andern Lande üblichen Münzen bezahlt werden, so muß dabei immer darauf gesehen seyn, daß man durch die verlangte fremde Münze eben so viel fein Gold oder Silber erhält, als in der früher berechneten Münze fein Gold oder Silber enthalten ist. Diese Angaben verschiedener Münzsorten, in welchen gleich viel fein Gold oder Silber enthalten ist, wird das Münz = Pari genannt *).

2. Von den Maßen.

§. 54. Zu den Maßen in engerer Bedeutung gehören: **A.** die Längenmaße, **B.** die Flächenmaße, und **C.** die Körpermaße.

*) Das Münz = Pari der vorzüglichsten europäischen Handelsplätze, so wie das Pari über die Maße und Gewichte, folgen in eigenen hierüber angefertigten Anhangs = Tabellen.

A. Vom Längenmaße.

Beim Längenmaße bedient man sich nach Verschiedenheit der zu messenden Längen bald a) des **Schuhes**, bald b) der **Elle** als Einheit, die für größere und kleinere Längen auch mit ihren Wiederholungen und Eintheilungen genommen werden. Sechs Schuh = 1 Klafter, Ein Schuh = 12 Zolle, Ein Zoll = 12 Linien u. s. w. Die Elle wird gewöhnlich in Viertel, Achtel, Sechzehntel u. s. w. Ellen eingetheilt, seltner in 3, 6, 12 u. s. w. Theile. Mehrere Ellen zusammen machen Ein Stück aus. Ist die Menge der Ellen, welche zusammen Ein Stück ausmachen sollen, nicht besonders bestimmt, so versteht man darunter 30 Ellen.

Eine **Österreichische Postmeile** hat 4000 Klafter; solche Posten gehen auf Einen Meridiangrad 14·670.

Die **Faust**, wornach die Höhe der Pferde gemessen wird, hat 4 Zolle.

Ein Fuß in				
Böhmen		=	0·93767	Wiener Fuß.
Lombard.-Venezian. Königreiche	Mailand	=	1·2553	" "
Lombard.-Venezian. Königreiche	Venedig, 1 Fuß = $\frac{1}{3}$ Passo	=	1·1001	" "
Mähren		=	0·93617	" "
Schlesien		=	0·9155	" "
Siebenbürgen		=	0·8	" "
Tirol		=	1·057	" "
Ungarn	Ofen	=	0·7533	" "
Ungarn	Preßburg	=	0·7162	" "

Eine Venezianer Meile hat 1000 Passi. Solche Meilen gehen 63·9 auf Einen Meridiangrad, Mailänder Meilen 67·25.

Die Wiener Elle ist gleich 2·465 Wiener Fuß = 345·4224 französischen Linien, gleich 0·7792 Mètres.

Eine Elle in					
Böhmen			=	0·76227	Wiener Ellen
Lombardisch-Venezianisch. Königreiche	Mailand (un braccio)		=		
Lombardisch-Venezianisch. Königreiche	Venedig	Wollen, Leinw., Baumwoll.	=	0·8208	" "
Lombardisch-Venezianisch. Königreiche	Venedig	Seide	=	0·87	" "
Mähren			=	1·01464	" "
Oberösterreich			=	1·02673	" "
Siebenbürgen			=	0·8	" "
Triest	zu Wollenzeugen		=	0·8685	" "
Triest	zu Seidenzeugen		=	0·8214	" "
Ungarn	Ofen		=	0·7533	" "
Ungarn	Preßburg		=	0·7162	" "

§. 55. **Einige von den am häufigsten vorkommenden fremden Längenmaßen:**

Amsterdam	Die Ruthe	=	11·641 Wiener Fuß.
Amsterdam	Der Fuß	=	0·283140 Mètres.
Amsterdam	100 solche	=	89·54471 Wiener Fuß.
Amsterdam	Eine Elle	=	0·687802 Mètres.
Amsterdam	100 solche	=	88·27129 Wiener Ellen.
Augsburg	Ein Fuß	=	0·296168 Mètres.
Augsburg	100 solche	=	93·69 Wiener Fuß.
Augsburg	Eine große Elle	=	0·609525 Mètres.
Augsburg	Eine kleine Elle	=	0·592381 Mètres.

burg.	100 große Ellen	= 78·22533 Wiener Ellen.
	100 kleine Ellen	= 76·02515 Wiener Ellen.
Berlin.	Der Rheinländische Fuß	= 0·313853 Mètres.
	100 solche	= 99·28588 Wiener Fuß.
	Eine Elle	= 0·666939 Mètres.
	100 solche	= 85·59122 Wiener Ellen.
	nach dem neu eingeführten Maße 100 Berliner Ellen	= 100·11838 neue Preußische Ellen.
Hamburg.	Der Hamburger Fuß	= 0·286491 Mètres.
	100 solche	= 90·62968 Wiener Fuß.
	Eine Elle	= 0·572980 Mètres.
	100 solche	= 73·535 Wiener Ellen.
	Die gewöhnlich noch vorkomm. Brabant. Elle	= 0·691412 Mètres.
	100 solche	= 88·734 Wiener Ellen.
Leipzig.	Eine sächs. Landruthe	= 16 Fuß.
	Ein sächsischer Fuß	= 0·23819 Mètres.
	100 solche	= 89·585 Wiener Fuß.
	Eine Elle	= 0·56638 Mètres.
	100 solche	= 72·686 Wiener Ellen.
London.	Ein englischer Fuß	= 0·304794 Mètres.
	100 solche	= 96·420 Wiener Fuß.
	Ein Yard	= 0·914384 Mètres.
	100 solche	= 117·3469 Wiener Ellen.
	Eine Elle	= 1·42623 Mètres.
	100 solche	= 146·64209 Wiener Ellen.
Paris.	Die Toise à 6 Fuß.	
	Ein alter Pariser Fuß	= 0·324839 Mètres.
	100 solche	= 102·7612 Wiener Fuß.
	Eine Elle (aune)	= 1·2 Mètres.
	100 solche	= 154·40013 Wiener Ellen.
Petersburg.	Ein russischer Fuß gleich dem englischen	= 0·304794 Mètres.
	Eine russische Elle (Arschine)	= 0·711187 Mètres.
	100 solche	= 91·2698 Wiener Ellen.

§. 56. B. Von den Flächenmaßen.

Eine Quadrat-Klafter hat 36 Quadrat-Schuhe. Ein Quadrat-Schuh hat 144 Zolle. Ein Quadrat-Zoll hat 144 Quadrat-Linien u. s. w.

Ein Joch hat 1600 Quadrat-Klafter, Eine Quadrat-Meile hat 16,000000 Quadrat-Klafter. Es hat daher eine Quadrat-Meile 10000 Joch.

Ein Quadrat-Fuß ist = 0·09992613 Mètres carrèes = 9·992613 Decimètres carrèes.

Amsterdam: Der Morgen Landes = 1·412 Österreichische Joche.

Augsburg: Der Jouchart-Acker = 388·4 Wiener Quadrat-Klafter.

Berlin: Die Rheinländische Quadrat-Ruthe = **141·9578** Wiener Quadr. Fuß. Zum Länder-Flächenmaße gehört das Magdeburgische. Eine Hufe = **30** Morgen = **709·793** Wiener Quadrat-Klafter.

Hamburg: Ein Morgen Landes = **2683·38** Wiener Quadrat-Fuß; Ein Scheffel Saatland = **1168·28** Wiener Quadrat-Fuß.

Leipzig: Der Acker gleich **300** Quadrat-Ruthen = **1713** Wiener Quadrat-Klafter.

London: Der Acre gleich **1124·298** Wiener Quadrat-Klafter.

Paris: Ein Pariser Quadrat-Fuß = **0·105520656 Mètres carrèes.** Ein **Arpent Royal** = **100 Perches carrèes** = **1419·79** Wiener Quadrat-Klafter.

Petersburg: Eine **Desätine** = **4298·5** Wiener Quadr. Klafter.

§. 57. C. Von den Körpermaßen.

a. Das geometrische.

Eine Kubik-Klafter hat **216** Kubikschuh, Ein Kubikschuh hat **1728** Kubik-Zolle, Ein Kubik-Zoll hat **1728** Kubik-Linien u. s. w.

Ein Kubik-Schuh ist = **31·588 Litres.**

b. Das Hohlmaß für trockene Körper.

Ein Muth hat **30** Metzen, der Metzen wird in Halbe, Viertel, Achtel u. s. w. eingetheilt.

Ein Wiener Metzen = **1·9471** Wiener Kubik-Fuß = **61·505 Litres.**

In Böhmen ist Ein Strich . . . . . . = **1·522** Wiener Metzen.
Im Lombard.-Venezianischen Königreiche { Mailand Ein **Staro** = **1·2603** " "
{ Venedig Ein **Staro** = **1·35** " "
In Mähren ist Ein Metzen . . . . . = **1·1482** " "
In Schlesien ist Ein Scheffel . . = **1·2419** " "
In Tirol ist Ein Kornstär . . . . . = **0·4972** " "
In Triest ist Ein Staro . . . . . . = **1·2047** " "
In Preßburg ist Ein Metzen . . . = **1·0107** " "
Amsterdam: Ein Sack = **3** Scherpel . = **1·32998** " "
Augsburg: Ein Schaff Korn . . . . . = **3·33769** " "
Berlin: Eine Last = **3** Winspeln = **6** Malter = **72** Scheffel = **288** Viertel = **1152** Metzen. Ein Scheffel nach Gerhard **senior** = **0·88988** Wiener Metzen.
Hamburg: Ein Faß = **2** Himten = **32** große = **64** kleine Maß = **0·8567** Metzen.
Leipzig: Ein Dresdner Scheffel = **1·788148** Wiener Metzen.
London: Ein Bushel . . . . . = **0·59097** " "
Paris: Ein **Boisseau** = **13·00830335 Litres** = **0·211519** Wiener Metzen.

c. Das Hohlmaß für flüssige Körper.

Ein Fuder hat **32** Eimer, Ein Faß hat **10** Eimer, Ein Eimer hat **40** Maß, Eine Maß hat **4** Seitel.

Der Wiener Eimer ist **1·792** Wiener Kubik-Fuß = **56·6** Litres.

In Böhmen ist die Prager Pinte . . . = **1·35** Wiener Maß.
Im Lombardisch-Venezian. Königreiche: Eine Pinte (Mailand) = **1·0514** „ „
Im Lombardisch-Venezian. Königreiche: Eine **Bigoncia** (Ven.) = **111·68** „ „
In Mähren Eine Maß . . . , . . . = **0·756** „ „
In Schlesien Eine Quart . . . . = **0·496** „ „
In Triest Eine Orne . . . . = **46·4** „ „
In Tirol Eine Maß . . . . = **0·573** „ „

Vier Ungarische Eimer gleich **5** Wiener Eimer.

Amsterdam: Ein Ohm = **2·715279** Wiener Eimer.

Augsburg: Ein Fuder = **768** Maß.
Eine Maß der Wiener Maß beinahe gleich.

Berlin: Ein Fuder = **4** Oxhoft = **6** Ohm = **12** Eimer = **24** Anker.
Ein Ohm = **2·601836** Wiener Eimer.

Hamburg: Ein Fuder = **30** Eimer, Ein Eimer = **0·508873** Wiener Eimer.

Leipzig: Eine Kanne = **0·8509** Wiener Maß.
Eine Dresdner Kanne = **0·6618** Wiener Maß.

London: Eine Tonne (Tun) = **2016** Pints.
Eine Wein-Pinte = **0·3341** Wiener-Maß.

Paris: Ein **Muid** = **4 Quarteaux** = **288 Pintes.**
Ein **Muid sur la lie** (auf der Mutter) = **4·738819** Wiener Eimer.
Ein **Muid** abgeklärt = **4·607** Wiener Eimer.

Von den Gewichten im Allgemeinen.

§. 58. Bei einer Menge von Körpern ist es wegen ihrer äußern Form nicht möglich, ihre Begrenzungen abzumessen, und aus dieser durch gehörige Rechnungsverbindung den körperlichen Inhalt zu finden, oder man kann bei vielen Körpern die geometrische Körpermessung nicht vornehmen. — Diese Körpermessung kann zwar außer auf dem genannten Wege in vielen Fällen auch noch mittelst der schon erwähnten Hohlmaße bewerkstelliget werden. Man wird aber sehr bald bemerken, daß die Hohlmaße nur bei solchen Körpern angewendet werden können, welche die Form des Gefäßes annehmen, während sie gemessen werden. — In dieser Hinsicht scheinen die Hohlmaße nur für flüssige Körper geeignet zu seyn, wenn gleich trockene Körper, gewöhnlich aber nur solche, welche in kleinen Körnern vorkommen, damit gemessen werden, weil man dabei annimmt, daß die in ein solches Maß gegebenen Körner sich genau genug an einander anlegen, so daß die Zwischenräume zwischen den Körnern nicht mehr zu berücksichtigen kommen.

Beim Messen der Körper, deren einzelne Theile größer sind, bei welchen also die leeren Räume zwischen den neben einander liegenden Theilen schon nicht mehr unbeachtungswürdig sind, pflegt man, wahrscheinlich aus dieser Rücksicht, niemals das Maß abzustreichen, sondern es jedesmahl aufzugupfen, oder soviel auf das Maß noch aufzulegen, als darauf liegen bleibt, ohne herabzufallen, wie wir dieß beim Messen des Obstes, der Nüsse, der Knollengewächse u. dgl. immer ausgeübt finden.

Um aber die Größenbestimmung anderer Körper, die nie die Form des Gefäßes annehmen, bewerkstelligen zu können, ferner, um die Größenbestimmung nöthigen Falls mit mehr Genauigkeit als mittelst der Hohlmaße zu erhalten, wird auch noch das *Gewicht* als Maßeinheit angenommen.

Unter *Gewicht* versteht man den *Druck*, den ein Körper auf eine Unterlage äußert, und mittelst welchem er sich bestrebt, sich dem Mittelpunkte der Erde zu nähern. Dieses Gewicht ist nothwendig um so größer, je mehr Masse oder je mehr schwere Theile sich an einem Körper vorfinden, und daher kann es auch als die Summe dieser Theile betrachtet werden. *Die Gewichtseinheit ist der Druck eines Körpers von bestimmter Materie und Größe auf seine Unterlage.* Daß diese Gewichtseinheiten nach Verschiedenheit der zu bestimmenden Körper, und in verschiedenen Ländern äußerst verschieden sind, ist eine hinreichend bekannte Sache. Gewöhnlich unterscheidet man in Hinsicht der verschiedenen zu bestimmenden Körper: **a)** *das gewöhnliche Handelsgewicht*, **b)** *das Gold-, Silber- und Münzgewicht*, **c)** *das Juwelengewicht*, **d)** *das Apotheker- oder Medizinalgewicht*, obgleich noch eine Menge anderer Gewichtsgattungen in einzelnen Fällen angewendet werden. Das Gewicht eines Körpers wird dadurch bestimmt, daß man ihn auf eine Wagschale legt, und auf die andere so viele Gewichtseinheiten oder aliquote Theile derselben (kleinere Gewichte), bis das Gleichgewicht ausgemittelt ist, wo dann der Druck der Gewichte dem Drucke der Waare gleich ist, und wo daher die Zahlenangabe des Gewichtes auch das Gewicht der Waare bestimmt.

Die Vergleichung der Gewichte läßt sich aus ihren in holländischen Assen bestimmten Äquivalenten treffen.

§. 59. *Die in den k. k. Österreichischen Staaten üblichen Gewichte.*

Handelsgewicht: Ein *Zenten* = **100** *Pfund*, Ein Pfund = **32** *Loth*, Ein Loth = **4** *Quintel*, Ein Quintel = **4** *Sechzehntel*.

Ein Wiener Pfund ist = **560·0122 Grammes** = **130774** Richtpfennigen des Silbergewichts = **11655·11** holländische Asse.

In Böhmen ist Ein Pfund		. . . . . . =	**0·91847**	Wiener Pfund.
Im Lombardisch-Venezianisch. Königreiche	Mailand	Ein Peso grosso . =	**1·3585**	„ „
		„ „ sottile . =	**0·5828**	„ „
	Venedig	„ „ grosso . =	**0·8523**	„ „
		„ „ sottile . =	**0·5382**	„ „
In Mähren		. . . . =	**0·99992**	„ „
In Schlesien		. . . . =	**0·94615**	„ „
In Tirol		. . . . =	**1·00516**	„ „
In Ungarn	Ein Ofner ℔	. . . . . . =	**0·8776**	„ „
	Ein Preßburger ℔	. . . . =	**0·9966**	„ „

Gold- und Silbergewicht. Eine *Wiener Mark Silbergewicht* = **16** Loth, **1** Loth = **18** Grane. Eine *Wiener Mark Goldgewicht* = **24** Karat, **1** Karat = **12** Grane. Eine Mark wird in **16** Loth, **1** Loth in **4** Quintel, **1** Quintel in **4** Pfennige, **1** Pfennig in **256** Richtpfennige getheilt, so daß Eine Mark = **65536** Richtpfennige ist.

Eine Wiener Mark Gold- oder Silbergewicht ist = **5285·332** französische **Grains** = **420·13656 Grammes**.

Hieraus ersieht man, daß Eine Wiener Mark Gold- oder Silbergewicht um **149** Richtpfennige größer ist, als ½ ℔ Wiener Handelsgewicht.

Eine Köllnische Mark = 4404·4437 französische Grains = 233·94108 Grammes, woraus sich ergibt, daß 5 Wiener Mark = 6 Köllnische Mark sind.

Das eigentliche Goldgewicht, sowohl für Goldmünzen als für Goldwaaren, ist der Dukaten, von welchen 80·4 auf eine Wiener und 67 auf eine Köllnische Mark gehen. Ein Dukaten wird in 60 Grane getheilt. Das Gewicht Eines Dukaten beträgt $815^{25}/_{201}$ Wiener Richtpfennige oder 72·647 holländische Asse.

Nach einer Verordnung vom 23. Februar 1788 sollen die Goldwaaren, sobald ihr Gewicht 4 Dukaten und darüber enthält, nur in drei Sorten oder Gattungen verfertiget werden, und zwar:

Nro. 1	im	Werthe	Eines	Dukaten	von	1½ fl.,	fein	7	Karat	7 Gran.
Nro. 2	„	„	„	„	„	2½ fl.,	„	13	„	1 „
Nro. 3	„	„	„	„	„	3½ fl.,	„	18	„	5 „

Apotheker- oder Medikamentengewicht: Ein Apotheker-Pfund = 12 Unzen, Eine Unze = 8 Drachmen, Eine Drachme = 3 Skrupel, Ein Skrupel = 20 Gran.

Ein Apotheker-Pfund = 8741·33 holländische Asse = 420·13656 Grammes. Ein Apotheker-Pfund ist demnach ¾ ℔ Handelsgewicht.

Juwelengewicht: Ein Karat wiegt 48¼ Wiener oder $57^{9}/_{10}$ Köllnische Richtpfennige Münzgewicht, oder 4·3 holländische Asse.

§. 60. Einige von den am häufigsten vorkommenden fremden Gewichten.

Amsterdam: Handelsgewicht. Ein Schiffspfund = 3 Zenten = 300 ℔, Ein Pfund = 32 Lood. Ein Pfund hiervon hat 10280 Asse Troy Gewicht, 100 solche ℔ = 88·23 Wiener ℔. Ein ℔ Troy Gewicht = 2 Mark Troy Gewicht à 8 Unzen à 20 Engel á 32 holländische Asse. Es hat demnach Ein Pfund 10240 holländische Asse. 100 ℔ Troy Gewicht geben 87·89 Wiener ℔.

Gold- und Silbergewicht: Die Mark Troy Gewicht.

Seit dem Jahre 1821 ist in Holland ein neues Gewichts- und Längenmaß eingeführt. Als Hohlmaß wird noch das alte benützt. Das neu angenommene ist das in Frankreich schon eingeführte metrische Sistem, und nur die Benennungen der Maße und Gewichte sind von diesen verschieden. Zur Vergleichung werden folgende Angaben dienen:

Französische Benennung.		Holländische		Verhältniß zum alten Maß und Gewichte.
Ein Centimètre	. = .	Ein Duim	. . = . .	0·015 alte Ellen.
„ Mètre . .	. = .	„ El . .	. . = . .	1·454 „ „
„ Litre . .	. = .	„ Kop	. . = . .	1·150 Kop.
„ Litre . .	. = .	„ Kan	. . = . .	1 Pint 2·597 Mutsje
„ Gramme .	. = .	„ Wichtje	. = . .	0·065 Lood.
„ Kilogramme	. = .	„ Pond	. . = . .	2 ℔ 0·765 Lood.

Erster Abschnitt.

Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.

---

§. 61. Zahlen heißen **genannt**, wenn außer der in denselben enthaltenen Menge von Einheiten auch noch ihre Gattung bestimmt angegeben ist, z. B. 7 Gulden. **Mehrnamig genannte Zahlen** nennt man jene Größen, welche größere Sorten von Einheiten zugleich mit einer oder mehreren kleinern Sorten von derselben Hauptgattung enthalten. Z. B. 7 fl. 45 kr. 3 ₰, und $8^{0}\ 4'\ 7''\ 9'''$.

§. 62. Die einzelnen Rechnungs-Verbindungen werden bei genannten Zahlen ganz nach denselben Bestimmungen, wie bei den ungenannten Zahlen vorgenommen, nur hat man dabei zu berücksichtigen, daß bei dem Übergange von einer Sorte der Einheiten zur nächst höheren Sorte, nicht mehr die Zahl **zehn** das Übertragen bewirkt, wie dieß bei den ungenannten Zahlen der Fall war, sondern, daß der Gebrauch eine größere oder eine kleinere Menge als 10 Einheiten der niederen Sorte eingeführt hat, um Eine Einheit der nächst höheren Sorte zu geben. So machen 60 Kreuzer Einen Gulden; 4 Pfennige Einen Kreuzer; 32 Loth ein Pfund; 100 Pfund Einen Zenten rc.

Die Zahlen, welche angeben, wie viele Einheiten einer niederen Sorte Eine Einheit einer höhern Sorte ausmachen, heißen **Auflösezahlen** oder auch **Verwandlungszahlen**.

§. 63. Unter dem **Resolviren** versteht man das Verfahren, durch welches Größen von einer höheren auf eine niedere Benennung gebracht werden, z. B. Zenten auf Pfund, Loth oder Quintel. Die Auflösung der Aufgaben dieser Art wird allzeit durch Multiplikazion der zu resolvirenden Zahl mit der Auflösezahl bewirkt, es mag die zu resolvirende Zahl eine ganze Zahl, oder ein gemeiner oder ein Dezimalbruch oder eine vermischte Zahl seyn. Ist die zu resolvirende Zahl mehrnamig genannt, so sind jedem aufgefundenen Produkte die gleichnamigen Einheiten der Angabe beizuzählen. So oft Brüche vorkommen, kann die Auflösung meistens nach der Strichform bequemer erreicht werden, indem die auf die Divisorseite gesetzten Nenner der eingerichteten Brüche oftmals gegen die Auflösezahlen abgekürzt werden können.

Beispiele.

I. ? Pfennige geben
478 fl.
60
Kreuzer....28680×4
114720 ₰

II. ? Stunden geben
36 Jahre
×12
Monate.....432×30
Tage....12960×24
25920
311040 Stunden.

III. ? Kubik Linien geben
5 Kubik Klafter
5×216
Kubik Schuh....1080×1728
Kub. Zolle...1866240×1728
13063680
3224862720 Kub. Linien.

IV. ? Loth geben 3⅝ Zenten.
8 | 3⅝×100×32
2900 4
11600 Loth.

V. ? ₰ geben ¾ fl.
4 | ¾×60×4
3
180 ₰.

VI. ? Quadrat Linien geben 3·875 Quadrat Klafter.
3·875×36×144
23·25
139·5 Quadrat Schuh
55 80
200 880 Quadrat Linien.

VII. ? Stunden betragen
3 Jahr 8 Monat 15¾ Tage.
44 Monat
×30
Tage....1335¾×24
5343 6
32058 Stunden.

VIII. ? Lothe geben
4 Zenten 78 ℔ 29⅞ Loth
Pfund....478×32
3824
15325⅞ Loth.

Beim Resolviren periodischer Dezimalbrüche muß entweder die abgekürzte Multiplikazion angewendet werden, oder man verfährt meistens noch besser, wenn man den der Periode entsprechenden gemeinen Bruch entwickelt, und sodann die Aufgabe, wie früher erwähnt wurde, auflöset. Z. B.

IX. Wie viele (?) Kubiklinien geben 0·714285 Kubikklafter?

Um die Anzahl der Dezimalen zu wissen, welche man durch die Periode nehmen soll, suche man vorläufig, wie viele Ziffer das Produkt aus allen betreffenden Auflösezahlen enthält, welche Anzahl, um die Zahl der Dezimalen, mit welcher das Resultat angegeben werden soll, vermehrt, die erforderliche Menge Ziffer, die durch die Periode zu nehmen sind, angeben wird. In unserer Aufgabe ist 216 × 1728 × 1728 ein Produkt mit 9 Stellen. Wird verlangt, daß das Resultat mit 4 Stellen bestimmt werden soll, so muß die Periode bis zur 13ten Dezimalstelle erweitert werden.

0·7142857142857
612
1428571428572
71428571429
42857142857
154·2857142858 Kubikschuh
8271
1542857142858
1080000000000
30857142857
12342857143
2666057142858 Kubikzolle
8271
266605·7142858
186624 0000000
5332 1142857
2132 8457142
460694674·2857 Kubiklinien.

Da aber $0\cdot\dot{7}1428\dot{5} = 5/7$ ist, so wird auch

7 | $5/7 \times 216 \times 1728 \times 1728$
1080×1728
1866240×1728
1306368
3224862720 : 7
$460694674\cdot\dot{2}8571\dot{4}$.

Das auf diesem kürzeren Wege aufgefundene Resultat $460694674\,2/7$ ist das vollständig genaue.

§. 64. Soll die in einem Dezimal-Guldenbruche enthaltene Menge von Kreuzern angegeben werden, so ist dieß sehr leicht dadurch möglich, daß man die Zehntheile mit 6 multiplizirt, und die Hunderttheile halbirt. Die Summe dieser Resultate ist die verlangte Kreuzermenge. Bleibt beim Halbiren ein Rest, so nehme man hierfür Einen ganzen Kreuzer, z. B.

X. 0·6 fl. = 36 Kr.; 0·875 = 53 Kr.; 0·83 = 50 Kr.

Die Ursache hiervon ist diese: Es wird 1/10 fl. für 6 Kr., 1/100 fl. für 1/2 Kr. genommen, oder für 1/120 fl. Weil aber $\frac{1}{100} > \frac{1}{120}$ ist, so werden die Hunderttheile zu klein genommen, woraus sich erklärt, aus welcher Ursache, wenn ein Rest bleibt, die erhaltene Kreuzermenge um Eins größer zu nehmen ist.

§. 65. Unter dem Reduziren versteht man das Verfahren, durch welches Einheiten von einer niederen Benennung auf eine höhere Benennung gebracht werden; z. B. Pfennige in fl., Lothe in ℔ und Zenten u. dgl. Die Auflösung der Aufgaben des Reduzirens wird allzeit dadurch bewirkt, daß man die zu reduzirende Größe mit der entsprechenden Auflösezahl dividirt. Z. B. 240 Kr. = 4 fl. Bleibt bei der Division ein Rest, so ist dieser mit dem Dividende gleichnamig, und kann entweder dem Quozienten in dieser niederen Benennung, oder aber auch als ein Bruch von der höheren Benennung angehängt werden. Z. B.

XI. 365 Kr. = 6 fl. 5 Kr., oder 6 1/12 fl.

Ferner: 8765 ℔ = 87 Zenten 65 ℔, oder $87\frac{13}{20}$ Zenten. Dasselbe Verfahren findet Statt, wenn die zu reduzirende Größe kleiner ist, als die Auflösezahl; ferner wenn sie ein Bruch oder eine vermischte Zahl ist; nur muß in letzterem Falle noch vorläufig der Bruch eingerichtet werden. Z. B.

XII. 42 Kr. = $\frac{42}{60}$ = 7/10 fl.; 3/4 ℔ = $\frac{3}{400}$ Zt.; 4 1/2 Kr. = $\frac{9}{120}$ = 3/40 fl.; 7 1/2 Kr. = $\frac{15}{120}$ = 1/8 fl.; 52 1/2 Kr. = $\frac{105}{120}$ = 7/8 fl.

Soll eine gegebene Größe nicht auf die nächst höhere, sondern auf eine entferntere Benennung gebracht werden, so dividire man sie durch das Produkt aller Auflösezahlen, welche zwischen der gegebenen und der verlangten Benennung Statt finden, oder man gehe nach und nach auf die nächst höhere Benennung über, und lasse die jeweiligen Reste in ihrer eigenen Benennung stehen, wodurch man auf eine mehrnamig genannte Zahl gelangt, je nachdem das eine oder das andere Resultat zweckdienlicher ist. Z. B.

XIII. ? fl. geben 24648¾ ₰.

60×4=240	oder 24648¾ ₰ : 4
24648¾ : 240	6162 Kreuzer und ¾ ₰.
9859,5 : 96,0 = 102	102 fl. 42 Kr. ¾ ₰.
259	
$\frac{675}{960} = \frac{45}{64}$	

Also $102\frac{45}{64}$ fl.

Soll eine mehrnamig genannte Größe Einnamig genannt, und von der höchsten Benennung dargestellt werden, so kann man entweder dieselbe auf ihre niederste Benennung resolviren, und das Resultat durch das Produkt der Auflösezahlen dividiren, oder man reduzire zuerst die Quantität der niedersten Benennung auf die nächst höhere; die gegebene Quantität von dieser Benennung sammt dem schon aufgefundenen gleichnamigen Theil wieder auf die nächst höhere Benennung u. s. w., bis der ganze Ausdruck die verlangte Benennung hat z. B. XIV. Welchen Ausdruck von der Benennung Zenten geben 27 ℔ 18 Loth 2¼ Quintel?

27 ℔ 18 Loth 2¼ Quintel	27 ℔ 18 Loth 2¼ Quintel
882 Loth 2¼ Quintel	27 ℔ $18\frac{9}{16}$ Loth
3530¼ Quintel	$27\frac{297}{512}$ ℔
$\frac{14121}{4} : 100 \times 32 \times 4$	$\frac{14121}{51200}$ Zenten.
$\frac{14121}{51200}$ Zenten.	

Sollen von einer mehrnahmig genannten Größe die Theile von der niederen Benennung durch Dezimalen von der höheren Benennung ausgedrückt werden, so verwandle man immer zuerst den Theil von der niedersten Benennung in einen Dezimalbruch von der nächst höheren, was dadurch geschieht, daß man diesen Theil mit der entsprechenden Auflösezahl dividirt, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man den Ausdruck von der verlangten Benennung erhält, z. B.

XV. Welchen Dezimal-Gulden Bruch geben 52 Kr. 2 Pfennige?

4	52„2
60	52·5
	0·875 fl.

XVI. Welchen Dezimalbruch geben 48 ℔ 28 Loth 2⅖ Quintel?

	4	48„28„2·8
32	8	48„28·7
	4	3·5875
100		48·896875
		0·48896875 Zenten.

§. 66. Die Addizion einnamig genannter Größen wird wie bei den ungenannten Zahlen verrichtet. Sollen mehrnamig genannte Größen addirt werden, so addire man zuerst die Größen von der niedersten Benennung, und reduzire ihre Summe auf die nächst höhere Benennung. Der Quozient wird mit in die Summe der Größen von der nächst höheren Benennung aufgenommen, der Rest aber unter die eben addirten Größen gesetzt.

Ist eine Auflösezahl **10** oder **100**, so braucht man die erwähnte Redukzion gar nicht vorzunehmen, sondern man addirt fort wie bei den ungenannten Zahlen; dadurch geschieht dasselbe, was bei den ungenannten Zahlen mit den Zehnern der Theilsumme geschieht. Schließt sich eine Auflösezahl mit Null, ist sie nämlich **20** oder **40** oder **60** u. dgl., so kann man die aus den Einheiten der niedern Gattung aufgefundenen Einheiten sogleich in der Summe an die Stelle der Einheiten setzen, und man darf sodann nur die Zehner der Summe durch die Zehner der Auflösezahl dividiren, wobei der Quozient die Menge Einheiten angibt, welche zu der höhern Benennung zu addiren sind, der Rest aber gibt die Zehner in der Summe der Theile von der niederen Benennung an. Z. B.

XVII.	**526** Fr.	**75** Centimes.	
	854 "	**83**	"
	729 "	**64**	"
	653 "	**59**	"
	893 "	**81**	"
	645 "	**63**	"
	4304 "	**25**	"

XVIII.	**18** Zt.	**75** ℔	$29\frac{1}{2}$ Loth	
	34 "	**83** "	$19\frac{3}{4}$	"
	29 "	**68** "	$23\frac{7}{8}$	"
	13 "	**93** "	$31\frac{9}{16}$	"
	12 "	**18** "	$19\frac{3}{8}$	"
	109 "	**40** "	$28\frac{1}{16}$	"
			124 : 32 = 3	
			28	

XIX.	**428** fl.	**39** Kr.	$2\frac{1}{4}$ ₰	$\frac{80}{20}$	
	569 "	**41** "	$3\frac{1}{2}$ "	**40**	**209 : 80 = 2**
	728 "	**14** "	$1\frac{7}{16}$ "	**35**	**49**
	412 "	**19** "	$3\frac{5}{8}$ "	**50**	**13 : 4 = 3**
	605 "	**51** "	$2\frac{4}{5}$ "	**64**	**1**
	2744 "	**47** "	$1\frac{49}{80}$.		**16 : 6 = 2**
					4

§. 67. Die Subtrakzion von einnamig genannten Größen wird wie bei den ungenannten Zahlen verrichtet. Sollen mehrnamig genannte Größen subtrahirt werden, so beginne man bei den Theilen von der niedersten Benennung. Ist irgend ein Theil des Subtrahends größer als sein gleichnamiger Theil des Minuends, so vermehre man diesen um die Auflösezahl, und bestimme sodann den Unterschied. Um aber den hierdurch begangenen Fehler wieder gut zu machen, vermehre man den Subtrahend in der nächst höheren Benennung um Eins. Haben einige Theile des Subtrahends gar keine gleichgenannten Theile im Minuend, so geschieht die Subtrakzion dieser Theile von der Auflösezahl, nur darf man nicht versäumen, den nächst höhern Theil des Subtrahends um Eins zu vergrößern. Rücksichtlich der Auflösezahlen, welche Potenzen von **10** sind oder sich mit einer Nulle schließen, gilt das im vorhergehenden **§.** Erwähnte. Z. B.

XX.	**6** Zt.	**48** ℔	**19** Loth	$2\frac{1}{2}$ Quintel	
	4 "	**87** "	**30** "	$3\frac{5}{8}$	"
	1 "	**60** "	**20** "	$2\frac{7}{8}$	"

XXI.	18^{0}
	$9^{0}, 3', 7'', 8\frac{3}{4}'''$
	$8^{0}, 2', 4'', 3\frac{1}{4}'''$

§. 68. Ist ein Faktor einnamig genannt, und der andere ungenannt, so wird das Produkt wie bei ungenannten Größen entwickelt, und erhält den Namen des genannten Faktors. Z. B.

XXII. 425 fl. × 6
2550 fl.

XXIII. 18¾ ℔ × 8
$\frac{75}{4}$ × 8 = 150 ℔.

XXIV. 16·875 Klaft. × 12
202·5 Klafter.

Hierbei ist es oftmals nothwendig, das aufgefundene Produkt erst noch zu reduziren.

XXV. 52½ Kr. × 24
105 × 12
1260 Kr. = 21 fl.

XXVI. 5¾′ × 17
97¾′
16° 1¾′

§. 69. Ist das Dividend einnamig genannt, und der Divisor ungenannt, so wird der Quozient wie bei ungenannten Größen entwickelt, und erhält den Namen des Dividendes z. B.

XXVII. 5⅜ fl. : 6 = $^{43}/_{48}$ fl.

Wird dieser Quozient weiter fort resolvirt, so erhält man 53¾ Kreuzer.

Beim Resolviren eines Restes soll dieser mit der Auflösezahl multiplizirt, und das Produkt durch den Divisor dividirt werden. Ist aber der Divisor durch die Auflösezahl theilbar, so verfährt man kürzer, wenn man den unveränderten Rest mit dem Quozienten aus dem Divisor durch die Auflösezahl getheilt, dividirt z. B.

XXVIII. 9847 fl. : 480 = 20 fl. 30 Kr. 3½ ₰.
247 : 8
7 : 2
1

XXIX. 8245 ℔ : 640 = 12 ℔ 28¼ Loth.
184
565 : 20
16
$^5/_{20}$ = ¼.

Hat beim Resolviren eines derlei Restes der Divisor und die Auflösezahl ein gemeinschaftliches Maß, so dividire man diese beiden Größen durch dasselbe, und dividire das Produkt aus dem Reste mit dem Quozienten der Auflösezahl durch den aus dem Divisor erhaltenen Quozienten. Z. B.

XXX. 94675 : 48 = 1972 fl. 23 Kr. 3 ₰.
466
347
115
19×5
95 : 4
3 : 1

XXXI. 218° : 45 = 4° 5′ 0⅘″.
38×2
76 : 15
1×4
4 : 5

§. 70. Ist der ungenannte Multiplikator oder Divisor ein Bruch oder eine vermischte Zahl (in welchem letzteren Falle er vorläufig in einen unechten

Bruch verwandelt wird), so ist sowohl eine Multiplikazions= als eine Divisions=aufgabe aufzulösen, von welchen immer die Multiplikazions=Aufgabe zuerst gelöset wird. Z. B.

XXXII. 5947 fl. × $^5/_6$
29735 : 6 = 4955$^5/_6$ fl.
4955 fl. 50 Kr.

XXXIII. 5947 fl. : $^5/_6$
5947 × $^6/_5$
35682 : 5
7136$^2/_5$ fl.
7136 fl. 24 Kr.

XXXIV. 2437 ℔ × 4$^1/_2$
2437 × $^9/_2$
21933 : 2
10966$^1/_2$ ℔.

XXXV. 2437 ℔ : 4$^1/_2$
2437 × $^2/_9$
4874 : 9
541$^5/_9$ ℔.

§. 71. Ist irgend ein Faktor oder sind beide Faktoren mit Dezimalen gegeben, und zwar in der Art, daß im Produkte mehr Dezimalstellen erhalten würden, als erforderlich sind, so wird die abgekürzte Multiplikazion angewendet. Eben so wird für die Fälle, als eines oder beide Divisionsglieder mit Dezimalen gegeben sind, die abgekürzte Division verrichtet.

XXXVI. 7$^5/_8$ Zt. × 43·70542.
Das Produkt mit 4 Dezimalen.
7·625 × 43·70542
5267
3059380
262233
8741
2185
333·2539
333 Zt. 25 ℔ 12 Loth 1·92 Quintel.

XXXVII. 948$^5/_6$ fl. : 3·714285.
Der Quozient soll 4 Dezimalen haben.
948·8333 : 3.7.1.4.2.8.5.7 = 255·4551
205 9761
20 2618
1 6904
2047
190
4
255 fl. 27 Kr. 1·224 ₰.

§. 72. Ist der Multiplikand eine mehrnamig genannte Zahl, so multiplizire man zuerst den Theil von der niedersten Benennung, und reduzire das Produkt; hierauf entwickle man das Produkt wegen des Theiles von der nächst höheren Benennung, wozu die aus der früheren Redukzion aufgefundenen Ganzen addirt werden u. s. w., bis man endlich auch den Theil von der höchsten Benennung multiplizirt hat.

XXXVIII. 25 fl. 43 Kr. 2$^3/_4$ ₰ × 7
180 fl. 5 Kr. 3$^1/_4$ ₰.

XXXIX. 3 Zt. 79 ℔ 12 L. 2$^2/_3$ Q. × 9
34 Zt. 14 ℔ 18 Loth.

128 fl. 32 Kr. 3$^1/_4$ ₰ × 32
1028 „ 22 „ 2 „ 8×4
4113 fl. 30 Kr. —

§. 73. Ist der ungenannte Faktor ein gemeiner oder ein Dezimalbruch oder eine vermischte Zahl, so wird in den meisten Fällen die Strichform mit besonderem Vortheile angewendet. Beide Faktoren werden auf die Dividendseite gesetzt, der mehrnamig genannte auf seine niederste Benennung resolvirt, die Brüche eingerichtet, die Nenner auf die Divisorseite gesetzt. Auch kommen

noch auf die Divisorseite alle jene Auflösezahlen, welche zwischen der niedersten Benennung des resolvirten Faktors, und zwischen der Benennung, welche das Produkt haben soll, Statt finden. Haben Faktoren auf der Dividend- und auf der Divisorseite ein gemeinschaftliches Maß, so kürze man vorläufig durch dasselbe ab.

XL. Wie viele Zenten geben 6 Zt. 79 ℔ $28\frac{4}{5}$ Lth. × 27·85

```
    | 6„79„28⁴/₅ × 27·85
  5 |  5432          5·57
 32 |
100 | 21756⁴/₅
  4 |
  2 | 108784
    |  13598
    |   6799 × 5·57
    | 37870·43 : 200
    | 189·35215
```

189 Zt. 35 ℔ 6·88 Loth.

XLI. Wie viele Gulden geben 245 fl. 23 Kr. $2\frac{1}{2}$ ₰ × $4\frac{4}{5}$.

```
    | 245„23„2½ × ²⁴/₅
  2 | 14723            6
  5 |
  4 | 58894½
 60 |
 10 | 1177,89 : 100
    |   53·4
    |    1·6
```

1177 fl. 53 Kr. $1\frac{3}{5}$ ₰.

§. 74. Ist das Dividend eine mehrnamig genannte Größe, und der Divisor eine ungenannte Zahl, so dividire man zuerst den Theil von der höchsten Benennung, resolvire den Rest auf die nächst niedere Benennung, wobei der gleichgenannte Theil der Angabe eingezählt wird, dividire dann diesen Theil und so fort, bis zuletzt auch der Ausdruck von der niedersten Benennung dividirt ist.

XLII.

```
7) 9 Zt. 78 ℔ 23 L. 3½ Qtl. : 7        2 Zt. 78 ℔ : 7
   1 „  39 „  26 „ 1¹/₁₄ „                278
                                       7) 39

5 ℔ 23 Lth. : 7         1 Lth. 3½ Qtl. : 7
   183                     7½
7) 26 L.                7) 1¹/₁₄ Qtl.
```

§. 75. Soll eine Gulden- und Kreuzersumme durch 6 dividirt werden, so gibt der Rest von den Gulden allzeit die Zehner von den Kreuzern des Quozienten. Die Einheiten von den Kreuzern werden gefunden, wenn man die Kreuzer des Dividends mit 6 dividirt.

```
XLIII. 29 fl. 43 Kr. 2⅛ ₰ : 6        XLIV. 6) 529 fl. 23 Kr. 3½ ₰ : 36
        4 „  57 „  1¹/₄₈                      88 „  13 „  3¹¹/₁₂   6×6
                                          6)  14 „  42 „  1²³/₇₂.
```

Soll eine Gulden- und Kreuzersumme durch 10 dividirt werden, so schneide man die Einheiten der Gulden weg; was noch bleibt, sind die Gulden des Quozienten. Die weggeschnittenen Einheiten der Gulden mit 6 multiplizirt, und das Produkt um die Zehner der Kreuzer vermehrt, geben die Kreuzer des Quozienten.

```
XLV. 29 fl. 43 Kr. 2⅛ ₰ : 10        XLVI. 529 fl. 23 Kr. 3½ ₰ : 100
      2 „  58 „  1³³/₈₀               10)  52 „  56 „ 1¹¹/₂₀   10×10
                                      10)   5 „  17 „ 2¹¹¹/₂₀₀.
```

§. 76. Ist der Divisor ein gemeiner Bruch oder eine vermischte Zahl, so verwechsle man seine beiden Bruchglieder, und verrichte statt der Division eine Multiplikazion, oder man löse die Aufgabe nach der Strichform auf, indem man im Ansatze den Divisor auf die Divisorseite setzt, sodann seinen Nenner als Faktor auf die Dividendseite bringt.

XLVII. 528 fl. 39 Kr. 2½ ₰ : 4⅘

```
       528 „ 39 „  2½ × 5/24
   6)  2643 „ 18 „  ½     6×4
   4)  440 „ 33 „   1/12
       110 „  8 „  1 1/48 oder:

 4⅘ | 528„39„2½ × 5
 24 | 31719
  2 | 126878½
  4 |
 60 | 253757 : 2304 = 110 fl. 8 Kr. 1 1/48 ₰.
 12 |  2335
    |   317 × 5
    |  1585 : 192
    |    49 : 48
    |     1
```

Ist der Divisor ein Dezimalbruch, so bringe man das mehrnamig genannte Dividend auf einen Dezimalausdruck von der Benennung der Frage, und löse die Aufgabe durch die abgekürzte Division auf.

XLVIII. 8 Zt. 85 ℔ 16¾ Loth : 2·87525. Der Quozient ist mit 8 Dezimalen zu suchen.

```
   8)  16·75
   4)  2·09375
       8·85523437,5 : 2·,8,7,5,2,5 = 3·07,981371 Zenten.
        2294843                        7 850968
         2821687                      31·403872
          233962
            3942
            1067        3 Zent. 7 ℔ 31·403872 Loth.
             204
               3
```

Anmerkung. Mehrere bei der Multiplikazion und Division anwendbare Vortheile werden bei der Lehre von der wälschen Praktik vorkommen, wohin sie auch gehören.

§. 77. Aufgaben, in welchen beide Faktoren genannte Zahlen sind, können in theoretischer Beziehung nicht vorkommen, wohl aber können sie aus einem praktischen Falle abgeleitet werden. Z. B. Wie viel Gulden kosten 8 Ellen, wenn Eine Elle 9 fl. kostet? Bei solchen Aufgaben muß immer der eine Faktor als ungenannt betrachtet werden, wie in dieser Aufgabe der Faktor 8; es werden nämlich 9 fl. so vielmahl gezahlt werden müssen, als wie viele Ellen gekauft werden. Der Faktor, welcher seine Benennung beibehält

(der Multiplikand), ist immer jener, welcher mit der Fragegröße gleichartig ist; der andere als ungenannt zu betrachtende (der Multiplikator) ist jener, welcher mit der gegebenen Einheit gleichartig ist.

§. 78. Wenn beide Divisionsglieder genannte Größen sind, so hat man für die Benennung des Quozienten folgende Fälle zu unterscheiden: Entweder sind beide Divisionsglieder von gleicher Benennung, dann ist der Quozient entweder eine ungenannte Zahl, oder er erhält einen Namen, der von der Benennung der beiden Divisionsglieder verschieden ist, und erst aus der Natur der Aufgabe bestimmt werden muß. Z. B. wie oft sind **5** fl. in **35** fl. enthalten? Antwort: **35** fl. : **5** fl. = **7**mal. Aber in der Aufgabe: Wie viel ℔ erhält man für **35** fl., wenn Ein ℔ **5** fl. kostet? Antwort: **35** fl. : **5** fl. = **7** ℔; der Quozient erhält nämlich die Benennung der in der Angabe genannten Einheit. — Oder es haben die beiden Divisionsglieder verschiedene Benennungen. Für diesen Fall muß der Divisor immer als ungenannt betrachtet werden, und der Quozient erhält den Namen des Dividendes. Z. B. Wie viele Gulden kostet Ein Pfund, wenn **7** ℔ mit **35** fl. bezahlt werden? Antwort: **35** fl. : **7** = **5** fl.

§. 79. Um die Schwierigkeiten bei der Beurtheilung, ob eine Aufgabe durch Multiplikazion oder durch Division aufzulösen sey, zu heben, bemerke man, daß bei allen diesen Aufgaben auch immer von der Einheit die Rede ist. Ist der Werth der Einheit gegeben, und wird nach dem Werthe einer andern Quantität gefragt (diese mag größer oder kleiner als die Einheit seyn), so ist die Aufgabe durch Multiplikazion zu lösen. Wenn aber der Werth irgend einer Quantität gegeben ist, und es soll hieraus der Werth der Einheit bestimmt werden (gleichgültig, ob die Einheit größer oder kleiner als die Quantität ist, so ist die Aufgabe durch Division zu lösen. Diesen untrüglichen Bestimmungen gemäß werden nachstehende Aufgaben durch die Multiplikazion aufgelöset: Was kosten **3** Zenten **85** ℔ **19¾** Loth, wenn Ein Zenten **213** fl. **48** Kr. kostet? — Was kosten **85** ℔ **19¾** Loth, wenn Ein Zenten **213** fl. **48** Kr. kostet? — Was kosten **19¾** Loth, wenn ein Zenten **213** fl. **48** Kr. kostet? — Folgende Aufgaben sind durch Division zu lösen: Was kostet Ein Zenten von einer Waare, von welcher **2** Zenten **85** ℔ **19¾** Loth mit **824** fl. **27** Kr. bezahlt werden? — Was kostet Ein Zenten von einer Waare, wovon **85** ℔ **19¾** Loth mit **184** fl. **3** Kreuzer bezahlt werden? — Was kostet Ein Zenten von einer Waare, von welcher **19¾** Loth mit **1** fl. **19**⁷⁄₁₀ Kr. bezahlt werden?

Ferner werden durch die Division auch noch jene Aufgaben gelöset, in welchem aus dem Werthe einer Quantität und dem Werthe der Einheit die Quantität bestimmt werden soll. Z. B. Wie viele Zenten, Pfunde und Lothe erhält man für **824** fl. **28** Kr., wenn **1** Zenten mit **213** fl. **48** Kr. bezahlt wird?

§. 80. Hat man gehörig beurtheilt, ob eine vorliegende Aufgabe durch Multiplikazion oder durch Division zu lösen sey, so ist bei der Anwendung der Strichmethode, die sich hierbei für jeden Fall als die passendste zeigt, auch die Stellung der Angaben bekannt. Man bemerke nur noch, daß, den früheren Erörterungen gemäß, bei den Divisionsaufgaben jene Größe das Dividend ist, die mit der Fragegröße gleichartig ist. — Außer der gehörigen Stellung der Angaben ist zur Vollendung des Ansatzes aber auch noch die Stellung der entsprechenden Auflösezahlen insbesondere zu berücksichtigen. Bemerkt man, daß der mehrnamig genannte Multiplikand oder das mehrnamig genannte Dividend

auf ihre niederste Benennung resolvirt, und als in dieser Benennung einnamig genannt betrachtet werden müssen, daß ferner das Produkt mit dem Multiplikande, der Quozient mit dem Dividende gleich genannt erhalten wird, die Frage aber meistens andere Benennungen des Resultates verlangt, so ergibt sich: In jeder Rechnung müssen alle jene Auflösezahlen vorkommen, welche zwischen der niedersten Benennung irgend einer Quantität und der gegebenen Benennung der gleichartigen Einheit Statt finden; ferner diejenigen, welche die Fragegröße mit der ihr gleichartigen Größe gleichnamig machen.

Soll eine Quantität, um die Gleichnamigkeit herzustellen, auf eine niedere Benennung gebracht werden, so setzt man die Auflösezahl auf die Seite, wo die Quantität steht (**XLIX.**); soll sie auf eine höhere Benennung gebracht werden, so sind die Auflösezahlen auf die entgegengesetzte Seite als Faktoren zu setzen (**L.**).

Hat die Fragegröße eine niedere Benennung als die Benennung der ihr gleichartigen Angabe, so bleiben die Auflösezahlen auf der Seite, wo die Angabe steht (**LI.**); hat aber die Fragegröße eine höhere Benennung, so werden die Auflösezahlen als Faktoren auf die entgegengesetzte Seite gesetzt (**LII.**).

XLIX. Wie viele fl. kosten **3½** Zt., wenn **1** ℔ **2⅛** fl. kostet?

	3½ × 2⅛ × 100
2	7 × 17 × 100
8	11900 : 16 = 743¾ fl.

L. Wie viel fl. kosten **3** Z. **64** ℔ **22½** L., wenn **1** Z. **215** fl. **52½** Kr. kostet?

100	3„64„22½ × 215⅞
32	23341 × 1727
2	40309907 : 51200
8	Antw. 787 fl. 18 441/2560 K.

LI. Wie viel Kreuzer kostet Ein Stück von einer Waare, von welcher **325** Stück mit **97½** fl. bezahlt werden?

325	97½ × 60	
2		30
65	195	6
5	39	
	3	

Antwort: **18** Kr.

LII. Wie viel Gulden kostet Ein Zenten von einer Waare, wenn **14⅘** Zt. mit **3637** fl. **51** Kr. bezahlt werden?

14⅘	3637„51
60	218271 × 5
74	72757 : 296
12	
4	

Antwort: **245** fl. **48 3/74** Kr.

Aufgaben, in welchen sowohl hinsichtlich der Quantität als des Preises der Einheit auf die Stellung der Auflösezahlen Rücksicht zu nehmen ist.

LIII. Was kosten **3** Zt. **85** ℔ **19¾** L., wenn **1** Zt. **213** fl. **48** Kr. kostet?

100	3„85„19¾ × 213„48
32	52764771 : 64000
60	
4	Antw. 824 fl. 26 Kr. 3 713/800.

LIV. Was kosten **19¾** Loth, wenn **1** Zent. **213** fl. **48** Kr. kostet?

100	19¾ × 213„48
32	84451 : 64000
60	
4	Antwort: 1 fl. 19 553/3200 Kr.

LV. Was kostet Ein Zenten von einer Waare, von welcher **3** Zt. **85** ℔ **19¾** Loth mit **824** fl. **27** Kr. bezahlt werden?

3„85„19¾	824„27
60	100
	32
	10552960 : 49359

Antw.: **213** fl. **48 116/16453** Kr.

LVI. Was kostet Ein Zenten von einer Waare, von welcher **19¾** Loth mit **1** fl. **19 7/40** Kr. bezahlt werden?

19¾	1„19 7/40
60	100
	32
	50672 : 237

Antwort: **213** fl. **48 28/79** Kr.

LVII. Wie viel Zenten, ℔ und Lothe erhält man für **824** fl. **27** Kr., wenn **1** Zenten mit **213** fl. **48** Kr. bezahlt wird?

$213\frac{4}{5}$ | $824\frac{9}{20}$
16489 : 4276
Antwort: **3** Zent. **85** ℔ **19** L. $3\frac{29}{1069}$ Qtl.

§. **81.** Aufgaben, in welchen verlangt wird, die in irgend einer Valuta gegebenen Beträge in einer andern Valuta zu berechnen, sind entweder **1.** Multiplikazionsaufgaben, oder **2.** Divisionsaufgaben, oder es müssen **3.** beide Rechnungsarten vereinigt angewendet werden.

Ist die Benennung der Angabe mit der Benennung der Einheit gleichartig, so wird die Aufgabe durch Multiplikazion gelöset; der gegebene Kurs ist der Multiplikand, folglich mit ihm das Produkt gleichnamig. Die Angabe ist der Multiplikator, und mithin als ungenannt zu betrachten.

LVIII. Wie viele Gulden Silbermünze betragen **8425** Rubel **75** Kopeken, wenn **1** Rubel zu **1** fl. $32\frac{3}{4}$ Kreuzer gerechnet wird?

60 | $8425\frac{3}{4} \times 92\frac{3}{4}$
Antwort: **13024** fl. $48\frac{5}{16}$.

LIX. Wie viele Gulden betragen **4729** mℓ **14** Schillinge, wenn **1** mℓ zu $43\frac{1}{4}$ Kr. gerechnet wird?

60 | $4729\frac{7}{8} \times 43\frac{1}{4}$
Antwort: **3409** fl. $27\frac{3}{32}$ Kr.

Ist die Benennung der Einheit mit der Fragegröße gleichartig, so wird die Aufgabe durch die Division gelöset. Die Angabe ist das Dividend, der gegebene Kurs der Divisor, der Quozient erhält die Benennung der Fragegröße.

LX. Wie viele Francs betragen **8425** fl. **45** Kr. Silbermünze, wenn Ein Franc zu $23\frac{3}{10}$ Kreuzer gerechnet wird?

$23\frac{3}{10}$ | 8425„45
Antw.. **21697** Fr. **21** Cent.

LXI. Wie viel ℔ Sterling betragen **4729** fl. $52\frac{1}{2}$ Kr., wenn Ein ℔ Sterling zu **9** fl. **50** Kr. gerechnet wird?

$9\frac{5}{6}$ | $4729\frac{7}{8}$
Antw.: **481** ℔ Sterl. **0** ß $1\frac{1}{59}$ Pences.

Wenn der Kurs zwischen den beiden Valuten nicht unmittelbar, sondern mittelst einer dritten Valuta gegeben ist, so wird die Angabe vorläufig in dieser dritten Valuta, und zwar durch Multiplikazion zu bestimmen seyn; das hierdurch gefundene Produkt durch den andern Kurs dividirt, muß das Verlangte geben. Es ist daher die Angabe und ihr Kurs auf die Dividendseite, der Kurs für die Fragegröße auf die Divisorseite zu setzen.

LXII. Wie viele Francs betragen **8425** Rubel **75** Kopeken, wenn **1** Rubel zu **1** fl. $32\frac{3}{4}$ Kr., und **1** Franc zu $23\frac{3}{10}$ Kr. gerechnet wird?

$23\frac{3}{10}$ | $8425\frac{3}{4} \times 92\frac{3}{4}$
Antw.: **33540** Fr. **27·1** Cent.

LXIII. Wie viel ℔ Sterling betragen **33540** Francs **27** Centimes, wenn **1** Fr. zu $23\frac{3}{10}$ Kr. und **1** ℔ Sterling zu **9** fl. **50** Kr. gerechnet wird?

9„50 | $33540·27 \times 23\frac{3}{10}$
Antw.: **1324** ℔ Sterl. **11** ß $1\frac{1}{2}$ Pences.

§. **82.** Der Kurs ist selten in der Art gegeben, daß die Angabe den Werth der Einheit enthält. Gewöhnlich findet zwischen den Handelsplätzen ein Übereinkommen Statt, welchem zu Folge bei Bestimmung des Kurses für

einen Platz eine bestimmte unveränderliche Summe genommen wird. Dafür gibt oder empfängt der andere Platz in seiner Valuta nach Umständen bald mehr bald weniger. Man sagt, der erstere Platz hat die beständige, der letztere die veränderliche Valuta. Bei der Notirung des Kurses wird die beständige Valuta sehr oft gar nicht ausgedrückt, sondern als bekannt vorausgesetzt. So z. B. sagt man: **Paris** **117½**; d. h. für **300 Francs** gibt oder empfängt Wien **117½** fl. Konvenzions-Münze, bald mehr bald weniger. — **Hamburg** **145⅛**; d. h. für **200** Mark Banco gibt oder empfängt Wien **145⅛** fl. Konv. Münze. — **Wiener Währung** **249½**; d. h. für **100** fl. Konvenzions-Münze gibt oder empfängt man **249½** fl. Wiener Währung.

Wird nun zur Auflösung einer Aufgabe ein Kurs dieser Art gegeben, so hat man hieraus den Werth der Einheit für die beständige Valuta aufzusuchen. Dieser Werth ist offenbar der gegebene Kurs, dividirt durch die beständige Valuta. Geschieht diese Darstellung in Bruchform, und wird der Kurs für die Einheit, der Natur der Aufgabe entsprechend, gehörig gesetzt, so ist fernerhin der Nenner auf die andere Seite zu übertragen. Dies geschieht einfacher dadurch, daß man den gegebenen Kurs an seinen gehörigen Platz, die beständige Valuta aber sogleich auf die andere Seite setzt.

LXIV. Wie viel fl. Wiener Währung betragen **3456** fl. **48** Kr. Konv. Mze., der Kurs zu **249½**?

100	**3456⅘ × 249½**
	Antw. **8624** fl. **42·96** Kr. W. W.

LXV. Wie viel fl. Konv. Münze betragen **8624** fl. **43** Kr. W. W., den Kurs zu **249½**?

249½	**8624⁴³⁄₆₀ × 100**
	Antw.: **3456** fl. **48** Kr. K. M.

LXVI. Wie viele Gulden Konv. Mze. betragen **19548 Francs 60 Centimes**, Paris **117¾**?

300	**19548⅗ × 117¾**
	Antw.: **7672** fl. **49·53** Kr. KM.

LXVII. Wie viel Mark Banko betragen **8765** fl. **43** Kr. Konv. Münze, Hamburg **145⅛**?

145⅛	**8765⁴³⁄₆₀ × 200**
	Antw.: **12080** mk **3** ß **8·1** ₰.

§. 83. Seit einer Reihe von Jahren hat sich der Kurs zwischen Silbermünze und Wiener Währung auf **250** unveränderlich festgesetzt, und die in einer von beiden Valuten ausgemittelten Beträge werden nach diesem Kurse wechselseitig auch in der andern Valuta angenommen. Die dießfalls erforderlichen Redukzionen sind folgende:

Um Silbermünze in Wiener Währung zu verwandeln, multiplizire man die Silbermünze mit **10** und dividire das Produkt mit **4**. Um Wiener Währung in Silbermünze zu verwandeln, multiplizire man die Wiener Währung mit **4** und dividire das Produkt mit **10**. Der Grund des Verfahrens ergibt sich aus Folgendem:

Es sey eine Summe (S) Silbermünze in Wiener Währung zu verwandeln, so ist diese in Folge des früher Erwähnten mit dem Kurse zu multipliziren, und durch **100** zu dividiren. Hierdurch erhält man $\frac{S \times 250}{100} = \frac{S \times 5}{2}$, oder für die Rechnung bequemer $\frac{S \times 10}{4}$. Ist aber Wiener Währung in Silbermünze zu berechnen, so erhält man $\frac{S \times 100}{250} = \frac{S \times 2}{5} = \frac{S \times 4}{10}$.

LXVIII. Was betragen 3457 fl. KM. in W. W.?

```
4) 34570
   ――――――
   8642½ fl. W. W.
```

LXIX. Was betragen 8642½ fl. W. W. in Silbermünze?

```
10 :) 8642·5 × 4
      ――――――――――
      34570
      ――――――――――
      3457 fl. Konv. Münze.
```

LXX. Was betragen 4567 fl. 38 Kr. Wien. Währ. in Konv. Münze?

```
4567„38
――――――――
1826„48
    15·2
――――――――
1827 fl. 3·2 Kr. Konv. Münze.
```

LXXI. Was betragen 1827 fl. 3·2 Kr. Konv. Münze in W. W.?

```
1827 „ 3·2
     0   32
4567„30
        8
――――――――――――
4567 fl. 38 Kr. in W. W.
```

§. 84. Nach dieser Methode der Strichrechnung können auch mehrere zusammengehörige Aufgaben, deren jede einzelne durch eine Multiplikazion oder eine Division gelöset werden sollte, in eine Ausarbeitung zusammengezogen werden, indem man den Ansatz für die erste Aufgabe vorläufig als Resultat, und als eine einzige Größe betrachtet, und diese, der Natur der Aufgabe gemäß, mit den noch übrigen Größen der nächsten und jeder späteren Aufgabe gehörig zusammenstellt. Hierbei ist es vorzüglich anzurathen, bei jeder in den Ansatz gebrachten Größe die wegen derselben erforderlichen Auflösezahlen alsogleich auf ihren gehörigen Platz zu stellen.

LXXII. Wie viel fl. Silbermünze kostet 1 Zenten, wenn 6 Zt. 34½ ℔ mit 1059 mℓ 15 ß bezahlt werden, und wenn 1 mℓ im Werthe von 43⅖ Kreuzer ist?

6„34½	1059„15	Antwort: 120 fl. $50\frac{5}{846}$ Kr.
16	100	
60	43⅖	

LXXIII. Wie viel fl. W. W. kosten 9 Zt. 68 ℔ 28 Loth von einer Waare, von welcher 1 Zt. mit 328 Francs 60 Centimes bezahlt wird, wenn der Kurs auf Paris 117¼, und auf W. W. 249½ notirt ist?

100	9„68„28	Antwort: 3104 fl. 32 Kr. $1\frac{3743683}{4000000}$ ₰.
32		
100	328„60	
300	117¼	
100	249½	

§. 85. Die Angaben sind nicht immer von der Art, daß man sie gleich unmittelbar zum Ansatze gebrauchen kann. Oftmals sind mit denselben vorläufig noch verschiedene Veränderungen vorzunehmen, die aber durch keine bestimmten Regeln angezeigt werden können, sondern nach ihrer Verschiedenheit aus der Natur der Aufgabe erkannt werden müssen.

LXXIV. Jemand bezahlt 11 Zenten von einer Waare mit 2680 fl. $56\frac{3}{20}$ Kr., und zwar wird von 6 Zenten 78½ ℔ der Zenten zu 220⅔ fl. berechnet; was kostet 1 Zenten von der noch übrigen Waare?

Antwort: 280 fl. 50 Kr.

LXXV. Jemand kauft 20 Zenten 58½ ℔ von einer Waare ein, wofür er 4643 fl. 58·56 Kr. bezahlt. Beim Transport wird ein Ballen, in welchem 2¾ Zenten sind, so schadhaft, daß er beim Verkaufe ⅓ Theil des Einkaufspreises verlieren muß. Wie theuer muß er Einen Zenten der unbeschädigt gebliebenen Waare verkaufen, wenn er wenigstens keinen Verlust erleiden will? Antwort: Um 237 fl. 11·71.... Kreuzer.

LXXVI. Jemand hat zwei Conti, von welchen der eine über **4200** Mℓ Banko, der andere über **4200 Francs** ausgestellt ist, und deren Gesammtbetrag **4644** fl. **30** Kr. Silbermünze beträgt. Wenn nun **1** Mℓ um **20³⁄₂₀** Kr. höher gerechnet wird, als **1 Franc**, zu welchem Preise ist **1** Mℓ, und zu welchem **1 Franc** gerechnet?

Antwort: **1 Franc** zu **23¹⁄₁₀** Kr. und **1** Mℓ zu **43¹⁄₄** Kr.

LXXVII. Jemand hat für **2500** fl. Silbermünze und **4520** fl. W. W. **10757¹⁄₂** fl. W. W. erhalten, wie hoch war der Kurs gerechnet?

Antwort: Zu **249¹⁄₂**.

§. 86. Alle zur Multiplikazion und Division gehörigen Aufgaben können aber auch, und zwar meistens auf diesem Wege am einfachsten, durch die Dezimalrechnung gelöset werden. Hierbei ist zu bemerken, daß die Quantitäten durch Dezimalausdrücke von der Benennung der Einheit, die Preise durch Dezimalausdrücke von der Benennung der Fragegröße dargestellt werden müssen.

LXXVIII. Wie viel Gulden W. W. betragen **6849** fl. **54** Kr. Silbermünze, den Kurs zu **249³⁄₈**? (Das Resultat mit **4** Dezimalen.)

6849·9 × 2·49375. Ansatz: **2·49375..**
99486

Antwort: **17081·9381**, oder **17081** fl. **56** Kr. W. W.

LXXIX. Wie viele Gulden kostet **1** Zt. von einer Waare, von welcher **8** Zenten **85** ℔ **24** Loth mit **1113** fl. **5·55** Kreuzer bezahlt werden?

1113·0925 : 8·8575. Antwort: **125·6** oder **125** fl. **40** Kr.

LXXX. Wie viel Gulden W. W. kosten **18** Zt. **65** ℔ **28¹⁄₂** Loth, wenn **1** Zt. **215 Francs 80 Centimes** gerechnet wird, der Kurs auf Paris zu **117¹⁄₄**, auf W. W. zu **251¹⁄₄**?

18 Zt. **65** ℔ **28¹⁄₂** L. = **18·65890625** Zenten, **215 Francs 80 Centimes** = **215·8 Francs**, Paris **117¹⁄₄** gibt **1 Franc** = **0·39083** Gulden, W. W. **251¹⁄₄** gibt **1** fl. = **2·5125** fl. W. W.

Resultate: **4026·59197 Francs.**
1573·72636 fl. Silbermünze.
3953·98748 fl. WW.

Ansatz nach der Strichrechnung.

100	**18,,65,,28¹⁄₂**
32	
100	**215,,80**
300	**117¹⁄₄**
100	**251¹⁄₄**

Antwort: **3953** fl. **59**$\frac{12743657}{51200000}$ Kr.

Anmerkung. Die Methode, Multiplikazions- oder Divisionsaufgaben durch die Dezimalrechnung aufzulösen, gewährt noch den besonderen Vortheil, daß man bei zusammengesetzten Aufgaben auch noch die Resultate in den übrigen Zwischenbenennungen erhält, was bei der Auflösung nach der Strichmethode der Fall nicht ist.

§. 87. Mittelst der erwähnten Auflösungsmethoden können auch ungleichartig genannte Größen in gleichartig genannte verwandelt, und sodann nach Erforderniß durch Addizion oder Subtrakzion wieder weiter fort verbunden werden.

LXXXI. Es soll die Summe von

A	224 ℳ 10 ß 9 ₰,	wenn	1 ℳ	= 43⅖ Kr. Silbermünze;
B	421 Fr. 45 Centim.,	„	1 Fr.	= 23 1/10 Kr. „
C	105 Rubel 90 Kop.,	„	1 Rub.	= 1 fl. 32 3/10 Kr. „
D	36 St. k. k. Dukat.,	„	1 ‡	= 4 fl. 30 Kr. „
E	162 fl. 30 Kr. Silbermünze	wenn der Kurs 249 ist,		
F	406 fl. 30 Kr. W. W.			

in jeder der gegebenen Benennungen angegeben werden.

Antwort: Summe	in Silbermünze .	974 fl. 51 Kr. 2 ₰.
„	in Hamburgergelde	1347 ℳ 11 ß 8·7 ₰.
„	in französ. Gelde.	2532 Fr. 10·8 Cent.
„	in russisch. Gelde.	633 Rubel 71·4 Kopeken.
„	in Dukaten . .	216 Stück 2 fl. 51 Kr. 2 ₰.
„	in Wien. Währ. .	2435 fl. 49 Kr. 3·1 ₰.

LXXXII. Es soll der Unterschied zwischen **4728 Fr. 48 Centim.** und **1624 ℳ 12 ß** angegeben werden, wenn **1 Fr.** zu **23 1/10** Kr., und **1 ℳ** zu **43⅖** Kr. gerechnet wird, und zwar in Silbermünze, in **Francs** und in Mark.

fl. 1820·464	=	Fr. 4728·48	=	ℳ 2516·7701
1175·335	=	3052·56	=	1624·75
fl. 645·129	=	Fr. 1675·92	=	ℳ 892·0201

Zweiter Abschnitt.

Von der wälschen Praktik.

§. 88. Die wälsche Praktik ist dasjenige Rechnungsverfahren, durch welches man den Werth irgend eines Gegenstandes auffindet, wenn man entweder (A) den gegebenen Preis, oder (B) den Gegenstand, oder wenn man (C) beide diese Angaben in aliquote Theile ihrer Einheit, oder in aliquote Theile von aliquoten Theilen auflöset, dann die diesen Theilen entsprechenden Werthe bestimmt, und endlich diese aufgefundenen Werthe durch die gehörige Rechnungsverbindung zum Resultate vereinigt.

Zur wälschen Praktik gehören im eigentlichen Sinne nur diejenigen Aufgaben, welche durch Multiplikazion aufzulösen sind (§. 79). Jedoch wird auch bisweilen aus dem Preise einer Quantität der Preis einer andern Quantität durch die wälsche Praktik bestimmt. Mit ganz besonderem Vortheile wird das hierher gehörige Rechnungsverfahren noch bei Interessen-, Gesellschafts- und Allegazionsrechnungen angewendet.

Das hier anzuwendende Verfahren ist jedesmal von einer passenden Zerlegung abhängig. Da jede Größe auf verschiedene Weise in Theile aufgelöset werden kann, und auch jede Größe eine andere Zerlegung erfordert, so ist es in der Theorie von der wälschen Praktik blos möglich, einzelne Fälle anzuführen, passende Zerlegungen dabei anzugeben, und die Ursache nachzuweisen, warum gerade diese Zerlegung gewählt wurde, damit man sich hieraus eine

Übersicht und Fertigkeit erwerbe, um in der Folge bei ähnlichen oder auch bei andern Fällen die entsprechende bequemste Verfahrungsweise zu treffen.

Aufgaben der ersten Art.

A. Fälle beim Zerlegen des Preises der Einheit.

§. 89. Wird blos der Preis der Einheit zerlegt, so muß die Quantität Einnamig und mit der Benennung der Einheit gleichnamig seyn, oder gleichnamig gemacht werden.

Enthält der Preis der Einheit mehrere Einheiten von der Benennung der Fragegröße mit Einem aliquoten Theile dieser Einheit, so bestimme man zuerst den Preis für diese mehreren Einheiten, ferner den Preis für den aliquoten Theil, letzteren durch Division der Quantität durch den Nenner dieses Theiles. Die Summe aus beiden ist das Verlangte.

I. Was kosten **543** Ellen, wenn **1** Elle mit **4** fl. **7½** Kr. bezahlt wird?

à **4** fl. . . . „ fl. „ **2172**„—
à **7½** Kr. = ⅛ fl. „ **67**„**52½**.

Antwort . . . . . fl. **2239**„**52½**.

II. Wie viele Gulden kosten **765** ℔ von einer Waare, von welcher **1** ℔ mit **3** fl. **15** Kr. bezahlt wird?

à **3** fl. . . . . „ fl. „ **2295**„—
à **15** Kr. = ¼ fl. . „ **191**„**15**

Antwort . . . . fl. **2486**„**15**.

Ist nicht Ein, sondern sind mehrere aliquote Theile gegeben, so zerlege man die Ganzen in der Art, daß Ein Theil mit der Anzahl der aliquoten Theile übereinstimmt, und dividire diesen Theil mit dem Nenner, oder man verfahre nach den später zu erörternden Bestimmungen.

III. Was kosten **367** Stück von einer Waare, von welcher **1** Stück **4** fl. **48** Kr. kostet?

à **4** fl. . . . . „ fl. „ **1468**„—
à **48** Kr. = ⅘ fl. . „ **293**„**36**

Antwort . . . fl. **1761**„**36**.

IV. Was kosten **2** Zenten **65** ℔, wenn **1** ℔ **5** fl. **22½** Kr. kostet?

à **2** fl. . . „ fl. „ **530**„—
à **3** fl. . . . „ fl. „ **795**„—
à **22½** Kr. = ⅜ fl. „ **99**„**22½**

Antwort . . . fl. **1424**„**22½**.

§. 90. Oftmals ist es zweckdienlich, den Bruch oder die Menge Einheiten der niederen Gattung in zwei oder mehrere Theile aufzulösen, von welchen jeder einzelne Ein aliquoter Theil oder auch ein Vielfaches von irgend einem der früheren Theile ist, wobei man nach Bedürfniß manchmal auch einen und denselben Theil zweimal nimmt.

V. Was kosten **217** Eimer, wenn **1** Eimer **20** fl. **37½** Kr. kostet?

à **20** fl. . . . fl. **4340**„—
à **30** Kr. = ½ fl. fl. **108**„**30**
à **7½** Kr. = ⅛ fl. fl. **27**„ **7½**

Antwort . . . fl. **4475**„**37½**.

VI. Was kosten **349** Ellen, wenn **1** Elle **3** fl. **50** Kr. kostet?

à **3** fl. . . . . . fl. **1047**„—
à **30** Kr. = ½ fl. . fl. **174**„**30**
à **20** Kr. = ⅓ fl. . fl. **116**„**20**„

Antwort . . . fl. **1337**„**50**.

VII. Wie viele Gulden kosten 3 Zent. 67 ℔, wenn 1 ℔ 4 fl. 57 Kr. kostet?

	367 ℔
à 4 fl.	fl. 1468„—
à 30 Kr. = ½ fl. .	„ 183„30
à 15 Kr. = ¼ fl. .	„ 91„45
à 6 Kr. = 1/10 fl. .	„ 36„42
à 6 Kr.	„ 36„42
Antwort	fl. 1816„39.

VIII. Was kosten 16 ℔ 17 Loth, wenn 1 Loth 46 Kr. 2½ ₰ kostet?

	529 Loth.
à 20 Kr. = ⅓ fl.	fl. 176„20
à 20 Kr. . . .	„ 176„20
à 2 Kr. . . .	„ 17„38
à 4 Kr.	„ 35„16
à 2 ₰	„ 4„24„2
à ½ ₰	„ 1„ 6„0½
Antwort . . .	fl. 411„ 4„2½.

§. 91. Wenn es bei der Zerlegung in Theile nicht leicht möglich ist, bequem abzuleitende aus den früher aufgestellten zu erhalten, so kann man, um den Übergang zu erleichtern, noch insbesondere einen aliquoten Theil einschalten; der hierfür entwickelte Preis aber muß, weil er auf das Resultat keinen Einfluß nehmen darf, bei der Summirung weggelassen werden.

IX. Wie viel fl. betragen 4528 Fr. à 23 1/10 Kr.?

à 20 Kr. = ⅓ fl.	fl. 1509„20
à 3 Kr. = 1/20 fl.	„ 226„24
(à 1 Kr.	„ 75„28)
à 1/10 Kr.	„ 7„32 4/5
Antwort . . .	fl. 1743„16 4/5

X. Wie viel fl. betragen 987 *mß* à 43¼ Kr.?

à 30 Kr. = ½ fl. .	fl. 493„30
à 10 Kr. = ⅙ fl. .	„ 164„30
à 3 Kr. = 1/20 fl. .	„ 49„21
(à 1 Kr.	„ 16„27)
à ¼ Kr.	„ 4„ 6¾
Antwort	fl. 711„27¾.

§. 92. Sehr bequem ist es oft, die Kreuzer in Zehntelgulden (Sechser) aufzulösen, die Quantität mit der Anzahl Sechser zu multipliziren, und im Produkte die letzte Ziffer wegzuschneiden. Was noch bleibt, sind Gulden; die weggeschnittene Ziffer sind Sechser, die ferner noch in Kreuzer aufgelöset werden.

XI. Was kosten 549 Stück von einer Waare, von welchen 1 Stück 42 Kr. kostet?

42 Kr. = 7 Sechser = 7/10 fl.

Antwort: fl. 384„18.

XII. Was kosten 7645 Ellen à 18 Kr.?

18 Kr. = 3 Sechser = 3/10 fl.

Antwort: fl. 2293„30.

XIII. Was kosten 4 Zt. 29 ℔, wenn 1 ℔ 4 fl. 27 Kr. kostet?

	429 ℔
à 4 fl.	fl. 1716„—
à 4 Sechser . . .	„ 171„36
à 3 Kr. = 1/20 fl.	„ 21„27
Antwort . . .	fl. 1909„ 3.

XIV. Was kosten 4 ℔ 23 Loth, wenn 1 Loth 2 fl. 39¾ Kr. kostet?

	151 Loth.
à 2 fl.	fl. 302„—
à 6 Sechser . . .	„ 90„36
à 3 Kr.	„ 7„33
à ¾ Kr.	„ 1„53¼
Antwort . . .	fl. 402„ 2¼.

Ist der Preis der Einheit in Groschen gegeben, wie dieß gewöhnlich bei den Getreidepreisen der Fall ist, so dividire man diese mit 2, wodurch man die darin enthaltene Menge von Sechsern erhält. Bleibt ein Rest, so ist dieser 1/20 fl. oder 1 Groschen.

XV. Was kosten **347** Metzen à **126** Groschen?

126 Groschen = **6** fl. **3** Sechser.
à **6** fl. . . . . . fl. **2082„—**
à **3** Sechser . . . „ **104„6**

Antwort . . . fl. **2186„6**

XVI. Was kosten **219** Metzen à **95** Groschen?

95 Groschen = **4** fl. **7** Sechser u. **1** Gr.
à **4** fl. . . . . . fl. **876„—**
à **7** Sechser . . . . „ **153„18**
à **1** Groschen . . „ **10„57**

Antwort . . . fl. **1040„15.**

§. **93.** Mehrmals fehlt zum gegebenen Preise nur mehr Ein aliquoter Theil der höheren Einheit, um eine ganze Zahl zu geben. Für diesen Fall suche man den Preis für die nächst größere ganze Zahl, und subtrahire hiervon den entsprechenden Betrag für diesen noch fehlenden aliquoten Theil.

XVII. Wie viel fl. kosten **549** Ellen à **4** fl. **54** Kr.?

4 fl. **54** Kr. = **5** fl. — **1** Sechser.
à **5** fl. . . . . . fl. **2745„—**
à **1/10** fl. . . . . . fl. **54„54**

Antwort . . . fl. **2690„ 6.**

XVIII. Was kosten **793** Stück, wenn **1** Stück **11** fl. **50** Kr. kostet?

11 fl. **50** Kr. = **12** fl. — **10** Kr.
= **12** fl. — **1/6** fl.
à **12** fl. . . . . . fl. **9516„—**
à **1/6** fl. . . . . . „ **132„10**

Antwort . . . fl. **9383„50.**

§. **94.** Da nach der Beurtheilung, daß eine Aufgabe durch Multiplikazion gelöset werden soll, auf die Benennung der Faktoren keine Rücksicht mehr zu nehmen ist, sondern blos auf das Zahlenverhältniß, so folgt:

Wenn die Quantität eine Zahl ist, die sich, wenn sie die Benennung Kreuzer hätte, bequem in Gulden und aliquote Theile von Gulden zerlegen ließe, so kann man die Benennungen der Faktoren verwechseln, nur ist dabei zu bemerken, daß der gegebene Preis vorläufig in Kreuzer aufgelöset werden muß.

XIX. Was kosten **60** Stück à **3** fl. **29** Kr.?

Dafür die Aufgabe: Was kosten **209** Stück à **60** Kr.

Antwort: **209** fl.

XX. Was kosten **33** Ellen à **49** Gr.?

Dafür die Aufgabe: Was kosten **147** Ellen à **33** Kr.
à **30** Kr. = **½** fl. . . fl. **73„30**
à **3** Kr. . . . . . „ **7„21**

Antwort . . . . fl. **80„51.**

XXI. Was kosten **42** Loth à **3** fl. **53** Kr.?

Dafür: Was kosten **233** Loth à **7** Sechser?

Antwort: fl. **163„6.**

XXII. Was kosten **114** ℔ à **3** fl. **26** Kr.?

Dafür: Was kosten **206** ℔ à **2** fl. — **6** Kr.?
à **2** fl. . . . . . . fl. **412„—**
à **6** Kr. . . . . . „ **20„36**

Antwort . . . . fl. **391„24.**

B. Fälle beim Zerlegen der Quantität.

§. **95.** Das Zerlegen der Quantität findet Statt, wenn diese Einnamig genannt ist, gleichgültig, ob eine ganze oder vermischte Zahl, sobald sie sich nur leicht in Theile oder auch in Faktoren auflösen läßt; ferner wenn sie mehrnamig genannt ist. Der Preis der Einheit kann wie immer beschaffen seyn; gewöhnlich ist er mehrnamig genannt.

§. 96. Da bei den Multiplikazionsaufgaben die Quantität allzeit der Multiplikator ist, dieser aber als eine ungenannte Zahl betrachtet werden muß, so können bei einnamig genannten Quantitäten, sie mögen mit oder ohne Brüche gegeben seyn, erstlich alle jene Zerlegungen und Rechnungsvortheile angewendet werden, die in den früheren Paragraphen angegeben wurden.

XXIII. Was kosten 56⅞ Zenten, wenn 1 Zenten 213 fl. 28¾ Kr. kostet?

Werth von 7 Zenten:			fl. 1494„21¼
„	„ 56	„	fl. 11954„50
„	„ ⅞	„ „	186„47²¹⁄₃₂
Antwort	.	.	fl. 12141„37²¹⁄₃₂

XXIV. Was kosten 6¾ Ellen von einem Stoffe, wovon 1 Elle 18 fl. 43 Kr. 2½ ₰ kostet?

	fl. 18„43„2½
Werth von 6 Ellen	fl. 112„21„3
„ ¾ = ⅛ von 6 Ell.	14„ 2„2⅞
Antwort . .	fl. 126„24„1⅞.

XXV. Was kostet ¼ ℔, wenn 1 ℔ mit 29 fl. 36¾ Kr. bezahlt wird?

Antwort: fl. 7„24³⁄₁₆.

XXVI. Was kosten ⅚ Ellen à 29 fl. 43 Kr. 2 ₰?

½ Elle	fl. 14„51„3
⅓ Elle	„ 9„54„2
Antwort . . .	fl. 24„46„1.

XXVII. Was kosten 80 ℔, wenn 1 Zt. 395 fl. 24 Kr. kostet?

Werth von 100 ℔ .	fl. 395„24
„ „ 20 ℔ .	„ 79„ 4⅘
Antwort . . .	fl. 316„19⅕.

XXVIII. Was kosten 36 Maß, wenn 1 Eimer 28 fl. 40 Kr. kostet?

Werth von 40 Maß .	fl. 28„40
„ 4 „ .	fl. 2„52
Antwort	fl. 25„48

§. 97. Die Angaben der niederen Benennungen löse man in aliquote Theile der Einheit, oder in aliquote Theile von aliquoten Theilen auf, bestimme für diese ihre Werthe, und es wird die Summe derselben das Verlangte seyn.

XXIX. Was kosten 89 ℔ 29¼ Loth von einer Waare, wenn 1 Zt. 218 fl. 42¾ Kr. kostet?

(α)

				fl. 218„42¾
Werth von		50 ℔	fl.	109„21$\frac{3}{8}$
„	„	25 ℔	„	54„40$\frac{11}{16}$
„	„	10 ℔	„	21„52$\frac{11}{40}$
„	„	2 ℔	„	4„22$\frac{91}{200}$
„	„	2 ℔	„	4„22$\frac{91}{200}$
„	„	16 Loth	„	1„ 5$\frac{491}{800}$
„	„	8 „	„	—„32$\frac{1291}{1600}$
„	„	4 „	„	—„16$\frac{1291}{3200}$
„	„	1 „	„	—„ 4$\frac{1291}{12800}$
„	„	¼ „	„	—„ 1$\frac{1291}{51200}$
Antwort . .			fl.	196„39$\frac{10119}{51200}$.

(β)

			fl. 218·7125
Werth von	10 ℔	.	fl. 21·87125
„ „	70 ℔	.	„ 153·09875
„ „	1 ℔	.	„ 2·18713
„ „	8 ℔	.	„ 17·497
„ „	16 Loth	.	„ 1·09356
„ „	8 „	.	„ 0·54678
„ „	4 „	.	„ 0·27339
„ „	1 „	.	„ 0·06835
„ „	¼ „	.	„ 0·01709
			fl. 196·6533
Antwort .		.	fl. 196„39·198.

XXX. Was kosten 8 Zenten 49 ℔ 29¾ Loth, wenn 1 Zt. 185 fl. 47½ Kr. kostet?

Werth für 1 Zenten			fl.	185„47½
„	„	8 „	fl.	1486„20
„	„	20 ℔ „	„	37„ $9\frac{1}{2}$
„	„	20 ℔ „	„	37„ $9\frac{1}{2}$
„	„	4 ℔ „	„	7„$25\frac{9}{10}$
„	„	5 ℔ „	„	9„$17\frac{3}{8}$
„	„	16 L. „	„	—„$55\frac{59}{80}$
„	„	8 „ „	„	—„$27\frac{139}{160}$
„	„	4 „ „	„	—„$13\frac{299}{320}$
„	„	1 „ „	„	—„ $3\frac{619}{1280}$
„	„	½ „ „	„	—„ $1\frac{1899}{2560}$
„	„	¼ „ „	„	—„—$\frac{4459}{5120}$
Antwort . .			fl.	1579„$5\frac{4669}{5120}$.

			fl.	185„47·5
Werth von 8 Zenten			fl.	1486„20
„	„	10 ℔	„	18„34·75
„	„	30 ℔	„	55„44·25
„	„	3 ℔	„	5„34·425
„	„	6 ℔	„	11„ 8·85
„	„	16 Loth	„	—„55·7375
„	„	8 „	„	—„27·8688
„	„	4 „	„	—„13·9344
„	„	1 „	„	—„ 3·4836
„	„	½ „	„	—„ 1·7418
„	„	¼ „	„	—„ 0·8709
Antwort . .			fl.	1579„ 5·912.

C. Fälle, wenn sowohl die Quantität als auch der Preis der Einheit zerlegt wird.

§. 98. Diese Fälle treten besonders dann ein, wenn beide Angaben mehrnamig genannt sind, und wenn die Quantität in ihrer höchsten Benennung sich nicht leicht in Faktoren und Theile zerlegen läßt. Für diesen Fall wird der Werth der Quantität in der höchsten Benennung nach den bei A, der Werth der Quantität in den niederen Benennungen aber nach den bei B angegebenen Bemerkungen gesucht.

XXXI. Was betragen 1234 ℔ Sterling 18 ß 9¾ Pences, wenn 1 ℔ Sterling zu 9 fl. 51¾ Kr. gerechnet ist?

1234 ℔ St. à 9 fl.	fl.	11106„—
à 48 Kr.	„	987„12
à 3 Kr.	„	61„42
à ¾ Kr.	„	15„$25\frac{1}{2}$
10 ß = ½ ℔ St.	„	4„$55\frac{7}{8}$
5 ß = ¼ ℔ St.	„	2„$27\frac{15}{16}$
2 ß = $\frac{1}{10}$ ℔ St.	„	—„$59\frac{7}{40}$
1 ß = $\frac{1}{20}$ ℔ St.	„	—„$29\frac{47}{80}$
6 Pences = ½ ß	„	—„$14\frac{127}{160}$
3 „ = ¼ ß	„	—„ $7\frac{127}{320}$
¾ „ . . .	„	—„ $1\frac{1087}{1280}$
Antwort . .	fl.	12179„$36\frac{147}{1280}$

1 ℔ St. = 9·8625		
1234 ℔ St. à 9 fl.	fl.	11106
à 48 Kr.	„	987·2
à 3 Kr.	„	61·7
à ¾ Kr.	„	15·425
10 ß	„	4·93125
5 ß	„	2·46563
2 ß	„	0·98625
1 ß	„	0·49312
6 Pences .	„	0·24656
3 „ .	„	0·12328
¾ „ .	„	0·03082
		12179·60191
Antwort .	fl.	12179„36·1146.

XXXII. Wie viele Gulden kosten 739 ℔ 23¾ Loth; wenn 1 ℔ mit 5 fl. 27½ Kr. bezahlt wird? — Antwort: fl. 4037„45$^{145}/_{256}$.

XXXIII. Wie viel Gulden kosten 309 Mark 12½ Loth; wenn Eine Mark zu 19 fl. 44½ Kr. gerechnet wird? — Antwort: fl. 6115„35$^{5}/_{64}$.

XXXIV. Wie viel Mark fein Silber sind in 157 Mark 14¼ Loth legirtem Silber enthalten; wenn dieses 12¾löthig ist?

157 Mark à 8 Loth enth.	78 Mk.	8 L. f.		
à 1 " "	9 "	13 "		
à 3 " "	29 "	7 "		
à ¾ " "	7 "	$5\frac{3}{4}$ "		
8 Loth oder ½ Mark "	— "	$6\frac{3}{8}$ "		
4 " " ¼ " "	— "	$3\frac{3}{16}$		
2 " " ⅛ " "	— "	$1\frac{19}{32}$		
$\frac{1}{4}$ " " ⅛ v. 2 L. "	— "	$0\frac{51}{256}$		
Antwort . . Mark	125 "	$13\frac{27}{256}$.		

Wird diese Aufgabe durch die Dezimalrechnung aufgelöset, so erhält man:

157·890625 × 0·796875

157·890625	mit 6 Dezim.
578697	
110 523438	
14 210156	
947344	
126312	
11052	
789	
125·819091	
13·105456.	

Antwort: 125 Mark 13·105456 Loth.

XXXV. Was kostet ein silbernes Gefäß, welches 40 Mark 13 Loth 2½ Quintel wiegt, wovon die feine Mark sammt Arbeitslohn mit 25 fl. 14⅝ Kr. bezahlt wird, wenn dieses Silber 12½löthig ist?

Man suche zuerst den Feingehalt dieses Gefäßes, sodann bestimme man den Werth dieses Feingehaltes:

40 Mark 13 Loth 2½ Quintel.				
à 8 Loth fein . Mark	20 "	6 "	$3\frac{1}{4}$	
à 4 Loth fein . "	10 "	3 "	$1\frac{5}{8}$	
à $\frac{1}{2}$ Loth fein . "	1 "	4 "	$1\frac{45}{64}$	
Feingehalt . "	31 "	14 "	$2\frac{37}{64}$	

Werth von 1 Mark	fl.	25 " 14·625
" " 6 "	"	151 " 27·75
" " 24 "	"	605 " 51
" " 8 Loth	"	12 " 37·3125
" " 4 "	"	6 " 18·6563
" " 2 "	"	3 " 9·3281
" " 2 Quint.	"	— " 47·3320
" " $\frac{32}{64}$ "	"	— " 11·8330
" " $\frac{4}{64}$ "	"	— " 1·4791
" " $\frac{1}{64}$ "	"	— " 0·3698
Antwort . .	fl.	805 " 39·6858.

Wenn man den Feingehalt nicht besonders zu wissen verlangt, so wird die Endantwort auch dadurch aufgefunden, daß man vorläufig den Werth des ganzen Gefäßes in der Art berechnet, als ob es aus ganz feinem Silber gearbeitet wäre, und wenn man aus diesem Resultate den, seinem Feingehalte entsprechenden Werth ableitet.

XXXV. Was kosten 40 Mark 13 Loth 2½ Quintel 12½löthiges Silber, wenn 1 Mark fein sammt Arbeitslohn mit fl. 25 " 14·625 bezahlt wird?

8 Mark kosten	fl.	201 " 57
40 " "	"	1009 " 45
8 Loth "	"	12 " 37·3125
4 " "	"	6 " 18·6563
1 " "	"	1 " 34·6641
2 Qtl. "	"	— " 47·3320
$\frac{1}{2}$ " "	"	— " 11·833
Das Gefäß aus ganz f. Silber würde kost.	fl.	1031 " 14·7979

Wegen 16 Loth .	fl.	1031 " 14·7979
" 8 "	"	515 " 37·3989
" 4 "	"	257 " 48·6994
" ½ "	"	32 " 13·5874
Wegen 12½ L. fein	"	805 " 39·6857
Die Differenz		0·0001 Kr.

kann wohl nicht mehr berücksichtiget werden.

Aufgaben der zweiten Art.

§. 99. Was die Auflösung der Aufgaben der zweiten Art anbelangt, in welchen nämlich aus dem Preise irgend einer Quantität der Preis einer andern Quantität durch die wälsche Praktik bestimmt werden soll, so ist dies bei Waarenberechnungen nur dann der Fall, wenn die Quantität, deren Preis gegeben ist, sich sehr leicht in aliquote Theile zerlegen läßt. Im entgegengesetzten Falle werden derlei Aufgaben durch die Regel de Tri gelöset, wohin sie auch eigentlich gehören. Häufiger jedoch wird die wälsche Praktik angewendet, wenn ein in irgend einer Valuta gegebener Betrag in irgend einer andern Valuta angegeben werden soll; insbesondere dann, wenn die Quantität mit der beständigen Valuta gleichartig ist, weil diese schon immer so gewählt ist, daß man aus ihr leicht verschiedene aliquote Theile ableiten kann.

XXXVI. Was kosten **17** ℔ **19¾** L., wenn **24** ℔ **95** fl. **37½** Kr. kosten?

12 ℔ kosten	. . fl.	$47,,48\frac{3}{4}$
4 " "	. . "	$15,,56\frac{1}{4}$
1 " "	. . "	$3,,59\frac{1}{16}$
16 Loth	. . "	$1,,59\frac{17}{32}$
2 "	. . "	$—,,14\frac{241}{256}$
1 "	. . "	$—,,7\frac{241}{512}$
½ "	. . "	$—,,3\frac{753}{1024}$
¼ "	. . "	$—,,1\frac{1777}{2048}$
Antwort	. . . fl.	$70,,11\frac{1247}{2048}$.

XXXVII. Was kosten **249** ℔ **27½** L., wenn **60** ℔ **137** fl. **48** Kr. kosten?

240 ℔ kosten	. . fl.	551·2
6 " "	. . "	13·78
3 " "	. . "	6·89
16 Loth	. . "	1·14833
8 "	. . "	0·57417
2 "	. . "	0·14354
1 "	. . "	0·07177
½ "	. . "	0·03589
		573·8437
Antwort	. . . fl.	573,,50·622.

XXXVIII. Wie viel Gulden W. W. betragen **1234⅘** fl. Silbermünze nach dem Kurse zu **249¾**?

100 fl. S. M. . . .	fl.	249·75	oder	fl.	1234·8
1200 fl.	fl.	2997	zu 200 . . W. W.	fl.	2469·6
20 fl.	"	49·95	" 40	"	493·92
10 fl.	"	24·975	" 5	"	61·74
4 fl.	"	9·99	" 4	"	49·392
⅘ fl.	"	1·998	" ½	"	6·174
	fl.	3083·913	" ¼	"	3·087
				fl.	3083·913

Antwort: fl. **3083,,54·78.**

XXXIX. Wie viel fl. Silbermünze betragen **385** ℳ Banko **12** ß **9¾** ₰, wenn der Kurs auf Hamburg **146¾** notirt ist?

Zwischen Wien und Hamburg hat Hamburg die beständige Valuta mit **200** ℳ, oder es sind **200** ℳ = **146¾** fl. Silbermünze.

Eigentlich wird der Kurs notirt: **100** Thaler Hamburg = ± **146¾** Thaler Konv. Münze. Da aber **1** Thaler Hamb. = **3** ℳ, und **1** Thaler Konv. Münze = **1½** fl. = $\frac{3}{2}$ fl. ist; so folgt hieraus der früher bemerkte für die Rechnung bequemere Kurs.

200 Mk.	geben in Silberm. fl.	146·75
100 Mk.	" " " "	73·375
40 Mk.	" " " "	29·35
40 Mk.	" " " "	29·35
5 Mk.	" " " "	3·6688
8 ß	" " " "	0·3669
4 "	" " " "	0·1834
6 ₰	" " " "	0·0229
3 "	" " " "	0·0115
¾ "	" " " "	0·0029
		fl. 283·0814

oder 200 Mark = 146·75
also 100 Mark = 73·375 = 73⅜.

385·800755 Mk.	à 10fl. fl.	38·5800755
"	à 30fl. "	115·7402265
"	à 30fl. "	115·7402265
"	à 3fl. "	11·5740227
"	à ⅜fl. "	1·4467528
	fl.	283·081304

Antwort: Silbermünze fl. 283„4·884.

XL. Wie viele Gulden Silbermünze betragen 2345 Fr. 60 Cent., wenn der Kurs auf Paris 117⅝ notirt ist, d. h. wenn für 300 Francs 117⅝ fl. Silbermünze gegeben werden?

Für derlei Fälle kann die Auflösung auch in der Art gemacht werden, daß man die beständige Valuta gleich 100 nimmt, und erst am Schlusse der Berechnung die veränderliche Valuta mit in Betrachtung zieht. Im vorliegenden Falle müßte das Resultat wegen der beständigen Valuta 300, wenn dasselbe mit der beständigen Valuta 100 berechnet wurde, noch mit 3 dividirt werden.

300 Fr.	geben S. M. fl.	117·625
2100	" " " " "	823·375
(100	" " " " "	39·20833)
200	" " " " "	78·41667
40	" " " " "	15·68333
5	" " " " "	1·96042
50 Ct.	" " " "	0·19604
10	" " " " "	0·03921
	S. M. fl.	919·67067

100 Fr.	geben S. M. fl.	117·625
2000	" " " " "	2352·5
300	" " " " "	352·875
30	" " " " "	35·2875
10	" " " " "	11·7625
5	" " " " "	5·88125
50 Ct.	" " " "	0·58813
10	" " " " "	0·11763
		2759·01201
	3)	919·67067

Antwort: Silbermünze fl. 919„40·2402.

Dritter Abschnitt.

Von der Regel de Tri.

A. Von der einfachen Regel de Tri.

§. 100. Die Regel de Tri (regula de tribus numeris) lehrt, zu drei gegebenen Größen von bestimmter Eigenschaft eine vierte durch Rechnung auffinden, und zwar durch Anwendung der Lehre von den geometrischen Proporzionen *). Wegen ihrer allseitig ausgebreiteten nützlichen Anwendung in allen Wissenschaften, und beinahe auf alle Geschäfte des bürger-

*) Die Theorie der Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proporzionen wird als bekannt vorausgesetzt.

lichen Lebens, wird sie schon seit Jahrhunderten die goldne Regel (regula aurea) genannt.

§. 101. Die Eigenschaften, welche den Angaben einer Aufgabe zukommen müssen, damit diese durch die Regel de Tri aufgelöset werden könne, müssen folgende seyn:

1. Die Angaben müssen eine Erzählung zweier ähnlichen Begebenheiten enthalten, von welchen die Bedingungen der einen vollständig gegeben sind, von den Bedingungen der andern aber Eine unbekannt ist, und durch die Rechnung ausgemittelt werden soll. Die Erzählung, deren alle Bedingungen bekannt sind, wird der bekannte Fall, jene aber, für welche eine Bedingung erst zu bestimmen kommt, der unbekannte Fall genannt. Z. B. Jemand kauft 6 ℔ von einer Waare, und bezahlt dafür 18 fl. (der bekannte Fall); wie viele ℔ wird er bei einem andern Einkaufe von eben dieser Waare, bei sonst unveränderten Umständen, für 30 fl. erhalten? (der unbekannte Fall).
2. Von den in den beiden verschiedenen Fällen vorkommenden Größen müssen je 2 und 2 gleichnamig seyn, oder durch Resolviren oder Reduziren gleichnamig gemacht werden können. Z. B. Wie viel fl. kosten $24\frac{3}{4}$ Ellen, wenn $3\frac{1}{2}$ Ellen mit $5\frac{1}{4}$ fl. bezahlt werden? oder: Wie viel Lothe bekömmt man um $47\frac{1}{2}$ Kr., wenn $1\frac{1}{4}$ Zenten mit $235\frac{7}{8}$ fl. bezahlt werden?
3. Die in einem und demselben Falle verbundenen Größen müssen ungleichartig seyn, oder wenn sie dem Anscheine nach gleichartig sind, sich doch in irgend einem Nebenumstande von einander unterscheiden. Z. B. Wenn jemand bei einem jährlichen Einkommen von 2000 fl. zu seinem Vergnügen 300 fl. verwendet; ein wie großes Einkommen müßte er haben, um verhältnißmäßig 500 fl. zu seinem Vergnügen verwenden zu können?
4. Es muß möglich seyn, zwischen den paar- und paarweise gleichartigen Größen gleiche Verhältnisse aufzustellen, wie dies der Fall ist bei Waaren und ihren Preisen, bei Geldsummen in verschiedenen Geldsorten, bei Kapital und Zinsen, bei Zinsen und Zeit, bei Miethgeld und Zeit der Miethe, bei Arbeit und dem dafür entfallenden Lohne u. dgl. Folgende Aufgaben können sonach durch die Regel de Tri nicht gelöset werden: 1. Jemand gräbt einen Brunnen, und kommt in 4 Stunden 3 Fuß tief; in wie viel Stunden wird er 60 Fuß tief kommen? Wegen der immer größer werdenden Schwierigkeiten findet keine Gleichheit der Verhältnisse Statt. — 2. Am Boden eines großen Gefäßes findet sich eine Öffnung, durch welche in 2 Stunden 6 Eimer ausfließen; in wie viel Stunden werden 240 Eimer ausfließen? Wird das ausfließende Wasser nicht gleichzeitig wieder von oben ersetzt, so wird wegen des verminderten Druckes immer weniger herausfließen, es kann also keine Gleichheit der Verhältnisse Statt finden. 3. Ein dem freien Falle überlassener Körper legt in der ersten Sekunde einen Raum von 15 Fuß zurück, wie viele Sekunden braucht er, um von einem 72 Klafter hohen Thurme herabzufallen? Die Verhältnisse zwischen den Fallhöhen und den Zeiten können nicht gleich seyn, weil die Körper beim Falle immer eine größere Geschwindigkeit erlangen.
5. Es muß möglich seyn, aus den Angaben in jedem der beiden Fälle auf etwas Gleiches zu kommen; z. B. Wie viel (x) Gulden kosten 16 Ei-

mer, wenn 5 Eimer 45 fl. kosten? Hier findet man in dem bekannten Falle den Werth Eines Eimers gleich $\frac{45}{5}$ fl., und eben so wird auch $\frac{x}{16}$ den Werth Eines Eimers von derselben Gattung bezeichnen. Oder in der Aufgabe: Wenn 6 Arbeiter in 24 Tagen eine bestimmte Arbeit vollenden, in wie viel (x) Tagen werden 36 Arbeiter dieselbe Arbeit zu Stande bringen? Im bekannten Falle wird der Ausdruck 24×6 angeben, in wie viel Tagen Ein Arbeiter allein diese Arbeit vollenden wird. Eben dieses wird auch aus dem unbekannten Falle durch den Ausdruck $x \times 36$ angezeigt werden, weil hier blos das Verhältniß der Anzahl der Arbeiter und der Arbeitstage berücksichtigt wird, außerdem aber weder von einem größeren Fleiße der Arbeiter, noch von einer größeren Anzahl der Arbeitsstunden, noch von größeren Schwierigkeiten bei der Arbeit die Rede ist.

6. Es darf keine von den drei gegebenen Größen die Einheit seyn, sonst gehört die Aufgabe nicht zur Regel de Tri, sondern ist blos eine Multiplikazions- oder Divisionsaufgabe. (Die Ursache dieser Behauptung siehe §. 79.)

§. 102. Man pflegt die Aufgaben, welche durch die Regel de Tri aufgelöset werden, in Aufgaben der geraden und in Aufgaben der umgekehrten Regel de Tri einzutheilen. Zu den ersteren zählt man diejenigen Aufgaben, in welchen man die zwei gleichen Größen (Nr. 5, §. 101) durch Division erhält. Z. B. Was kosten 45 Zenten, wenn 4 Zt. 240 fl. kosten? Hier ist $\frac{x}{45} = \frac{240}{4}$. Zur umgekehrten Regel de Tri werden jene Aufgaben gezählt, in welchen man die zwei gleichen Größen durch Multiplikazion erhält. Z. B. In wie viel Tagen werden 36 Arbeiter eine bestimmte Arbeit verrichten, die von 6 Arbeitern in 24 Tagen zu Stande gebracht wird. Hier ist $x \times 36 = 24 \times 6$.

§. 103. Um die Angaben leichter von einander unterscheiden zu können, wollen wir die Größe, deren Zahlenwerth durch die Berechnung aufgefunden werden soll, die Fragegröße; die mit ihr gleichartige des bekannten Falles die dritte ungleichartige Größe; jene von den zwei gleichartigen Angaben, welche im bekannten Falle vorkommt, die folglich zur dritten ungleichartigen Größe gehört, die beziehende Größe; und die noch übrige Größe des unbekannten Falles die mit der beziehenden gleichartige Größe nennen.

Hat man der Natur der Aufgabe gemäß die zwei gleichen Größen aus den zusammengehörigen Aufgaben aufgestellt, so bildet man hieraus eine Proporzion, wobei nur noch zu bemerken ist, daß man die Unbekannte ins letzte Glied stellt, wornach sich die Stellung der übrigen Glieder von selbst ergibt. Auf diese Weise erhält man aus den zwei früher erwähnten Aufgaben: $\frac{240}{4} = \frac{x}{45}$, und $x \times 36 = 24 \times 6$ die Proporzionen:

$$4 : 240 = 45 : x \text{ und } 36 : 6 = 24 : x.$$

Weil bei den Aufgaben der Regel de Tri immer die Fragegröße im vierten Gliede steht, das vierte Glied aber gefunden wird, indem man das Pro-

dukt aus dem zweiten und dritten Gliede durch das erste dividirt; weil ferner zwei Faktoren, in jeder Ordnung multiplizirt, dasselbe Produkt geben, so folgt, daß man, um den richtigen Ansatz zu machen, immer nur das Erste Glied genau zu kennen braucht. Weil die dritte ungleichartige Größe mit der unbekannten ein Verhältniß gibt, letztere aber im vierten Gliede steht, so folgt, daß bei einem vollständig geregelten Ansatze die dritte ungleichartige Größe im dritten Gliede stehen sollte, daß sie also wenigstens nie im ersten Gliede erscheinen darf. Es ergibt sich hieraus, daß das erste Glied nie eine andere als eine von den beiden gleichartigen Größen seyn darf. Welche von diesen beiden gleichartigen Größen im ersten Gliede stehen muß, ist davon abhängig, ob man auf die zwei gleichen Größen durch Division der zusammengehörigen Angaben oder durch Multiplikazion gelangt. Im ersteren Falle wird die beziehende Größe selbst, im letzteren die mit ihr gleichartige ins erste Glied gesetzt werden müssen.

Um zu wissen, ob die zwei gleichen Größen durch Division oder Multiplikazion der zusammengehörigen Angaben aufzustellen sind, wende man das nachstehende stets untrügliche Hülfsmittel an: Man denke sich die beziehende Größe doppelt, und beurtheile, ob unter dieser Bedingung auch die dritte ungleichartige Größe doppelt so groß werden muß, oder ob diese nur zur Hälfte wird. Im erstern Falle findet man die zwei gleichen Größen durch Division, im andern durch Multiplikazion. Hiernach ergeben sich im Zusammenhange folgende

Regeln des Ansatzes.

§. 104. „Man suche die beziehende Größe auf (§. 103), und denke „sich diese doppelt so groß. Erfordert das Doppelte von der beziehenden Größe „von der dritten ungleichartigen auch das Doppelte, so ist die beziehende selbst „ins erste Glied zu setzen; erfordert das Doppelte von der beziehenden Größe „von der dritten ungleichartigen nur die Hälfte, so ist die mit der beziehenden „gleichartige Größe ins erste Glied zu setzen."

„Die zwei andern Angaben setze man beliebig ins zweite und dritte Glied."

Aus der Bemerkung, daß die dritte ungleichartige Größe niemals im ersten Gliede stehen kann, sondern daß in diesem jedesmal eine von den beiden gleichartigen Größen stehen muß, verbunden mit der Wahrheit, daß ein Quozient um so größer wird, je kleiner sein Divisor und je größer sein Dividend ist, und umgekehrt, ergibt sich auch noch folgende sehr einfache Regel des Ansatzes:

„Man beurtheile, ob das Resultat größer oder kleiner als die dritte un„gleichartige Größe wird. Im ersten Falle ist die kleinere von den beiden gleich„artigen Größen, im letzteren die größere der Divisor, folglich ins erste Glied „zu setzen." Die Stellung der noch übrigen zwei Angaben ins zweite und dritte Glied ist wieder beliebig.

Hieraus ist klar, daß bei dieser Beurtheilung auch jener Unterschied, ob eine Aufgabe zur geraden oder umgekehrten Regel de Tri gehört, ganz und gar wegfällt.

Beispiele.

I. Wie viele fl. kosten **45** Zenten, wenn **4** Zenten **240** fl. kosten? Die beziehende Größe sind **4** Zt. Werden zweimal so viel Zenten gekauft, so muß man auch zweimal so viele Gulden bezahlen, also kommt die beziehende Größe selbst ins erste Glied, und man erhält: **4** Zt. : **45** Zt. = **240** fl. : x fl., oder $4 : 240 = 45 : x$.

Oder man beurtheile so:

45 Zenten müssen offenbar mehr kosten als **240** fl., also muß die kleinere der beiden gleichartigen Größen, d. i. **4** Zenten, im ersten Gliede stehen.

II. In wie viel Tagen werden **36** Arbeiter eine bestimmte Arbeit vollenden, welche **6** Arbeiter in **24** Tagen zu Stande bringen?

Die beziehende Größe sind **6** Arbeiter. Werden zweimal so viele Arbeiter angestellt, so werden sie nur halb so viele Tage brauchen, also kommt die mit der beziehenden gleichartige Größe, d. i. **36** Arbeiter, ins erste Glied, und man erhält: **36** A. : **6** A. = **24** T. : x T., oder **36** : **24** = **6** : x.

Oder man beurtheile so:

36 Arbeiter werden offenbar weniger als **24** Tage brauchen, also muß die größere der beiden gleichartigen Größen, d. i. **36** Arbeiter, im ersten Gliede stehen.

Regeln zur Auflösung der Regel de Tri.

§. **105.** „Die in irgend einem Gliede vorkommenden mehrnamig genannten Größen mache man einnamig (entweder durch Resolviren oder durch „Reduziren), ferner richte man alle Brüche ein."

„Das erste Glied mache man mit seinem gleichartigen Gliede gleichnamig. (Dieß geschieht, wenn man in jenem Gliede, wo der Einnamige Ausdruck noch eine höhere Benennung hat, alle Auflösezahlen als Faktoren setzt, „die zum Gleichnamigmachen erforderlich sind. Eben so mache man die dritte „ungleichartige Größe mit dem vierten Gliede gleichnamig. Soll hierbei eine „Auflösezahl ins vierte Glied kommen, so setze man diese dafür ins erste „Glied."

„Die Nenner des zweiten und dritten Gliedes setze man als Faktoren „ins erste, den Nenner des ersten Gliedes beliebig ins zweite oder dritte."

„Man kürze das erste Glied gegen das zweite oder gegen das dritte Glied so lange ab, als es mit Bequemlichkeit für die spätere Rechnung geschehen kann."

Es ist hieraus klar, daß jede Abkürzung eine Änderung des ersten Gliedes verursachen muß. Ferner folgt hieraus, daß eine Abkürzung nicht immer mittelst einer Division des ersten und eines mittleren Gliedes durch ihr gemeinschaftliches Maß verrichtet werden muß, sondern daß man auch sehr bequeme Abkürzungen oftmals dadurch erreicht, wenn man das erste und ein mittleres Glied durch irgend eine Zahl multiplizirt, falls man hierdurch für die weitere Auflösung einen bequemen Divisor erhält.

„Man multiplizire die noch rückständigen Faktoren des zweiten und dritten Gliedes, und dividire dieses Produkt durch das Produkt der Faktoren des „ersten Gliedes. Der Quozient ist das Verlangte."

„Bleibt bei der Division noch ein Rest, so resolvire man ihn in Einheiten der nächst niederen Benennung, oder man verwandle ihn in einen Dezimalbruch."

„Sind in den einzelnen Gliedern bedeutend große Zahlen oder Dezimalbrüche mit Perioden, so wird auch oftmals das Produkt der mittleren Glieder durch die abgekürzte Multiplikazion, so wie der Quozient durch die abgekürzte Division bestimmt."

Proben über die richtige Auflösung.

§. **106.** Man nehme das gefundene Resultat mit zwei beliebigen früheren Angaben zusammen, und nehme mit diesen drei Angaben neuerdings die

Auflösung der diesen Bedingungen entsprechenden Aufgabe vor; ist das Resultat der hinweggelassenen früheren dritten Angabe gleich, so ist man zu dem Schlusse berechtigt, daß die Auflösung richtig war.

Anmerkung. Andere Probearten sind wohl aus der Lehre von den Proporzionen bekannt.

§. 107. Beispiele.

I. Was kosten 45 Zenten von einer Waare, von welcher 6 Zenten mit 240 fl. bezahlt werden?

```
6 : 45 = 240 : ?
1        40
  45 × 40
Antwort: 1800 fl.
```

II. In wie viel Tagen werden 36 Arbeiter dieselbe Arbeit vollenden, welche 6 Arbeiter in 24 Tagen zu Stande bringen?

```
36 : 6 = 24 : ?
6    1   4
1
Antwort: In 4 Tagen.
```

III. Wie viele fl. kosten 9 Zt. 78 ℔ 19 Loth 2½ Qtl., wenn 2¼ Zt. 1015 fl. 45 Kr. kosten?

```
2¼ : 9„78„19„2½ = 1015¾ : ? fl.
9      7824          4063
4 100  31315
32     125262½
4      250525 × 4 1
2      10021 × 4063
1 4    9216
```

Antwort: 4417 fl. $53\frac{551}{768}$ Kr.

IV. Wie viele fl. kosten 2¼ Zt., wenn 9 Zt. 78 ℔ 19 Loth 2½ Qtl. mit 4417 fl. $53\frac{551}{768}$ bezahlt werden?

```
9„78„19„2½ : 2¼ = 4417 fl. 53 551/768 : ? fl.
250525       9    203576615
4            3    40715323
60 20        32   3701393
768 10       100
256          4
8 2 × 2      2
50105        3701393
10021        911
911
```

Antwort: 1015 fl. 45 Kr.

V. Wie viele fl. kosten 1¼ Zenten, wenn 8 Loth 2½ Qtl. mit 25 Kr. 1½ ₰ berechnet werden?

```
8„2½ : 1¼ = 25„1½ : ? fl.
34½    5    101
69     100  203
3 60   32 8
4      4 4  203 × 200
2      2    207
4
```

Antw. 196 fl. $8\frac{8}{69}$ Kr.

(6) Wie viel Lothe erhält man um 25 Kr. 1½ ₰, wenn 1¼ Zt. 196 fl. $8\frac{8}{69}$ Kr. kosten?

$196,,8\frac{8}{69}$	:	$25,,1\frac{1}{2}$	=	$1\frac{1}{4}$: ? L.
812000		203		5
1624 4		69		100
8 2		69 : 8		32
4				

Antw. 8 Loth 2½ Qtl.

(7) Um die Wände eines Saales zu bekleiden, braucht man von einem Stoffe, der 2 Ellen breit ist, 848½ Ellen; wie viel Ellen braucht man zu demselben Zweck von einem Stoffe, der blos 1⅓ Elle breit ist?

1⅓ E. b. : 2 E. b. = 848½ E. l. : ? E. l. Antw. 1272¾ Ellen.

(8) Wenn 100 ausgeliehene Gulden in einer gewissen Zeit 18¼ fl. Zins tragen; wie viel Zins geben 1850 fl. in eben dieser Zeit? Antwort: 337⅝ fl.

(9) Einem Fuhrmanne muß man, um eine Waare 12 Meilen weit zu führen, 65 Gulden bezahlen; wie viel wird man ihm bezahlen müssen, wenn er dieselbe Waare 22 Meilen weit führt? Antw. 119 fl. 10 Kr.

(10) Wie groß ist die Bevölkerung einer Stadt, welche 945 Rekruten stellt; wenn von 1200 Einwohnern 7 Mann gestellt werden müssen? Antwort: 162000 Einwohner.

(11) Ein Kurier hat 175 Meilen weit zu reisen, und macht im Durchschnitte in 4 Stunden 7 Meilen. Wann wird er an Ort und Stelle seyn, wenn er Tag und Nacht fortreiset? Antwort: In 100 Stunden.

(12) Der Fußboden eines Saales kann mit 728 Steinplatten belegt werden, wenn jede auf der oberen Fläche 4 Quadratfuß hat. Wie viele Platten wird man zum Belegen eben dieses Saales brauchen, wenn eine Platte 3½ Quadratschuhe hat? Antwort: 832 Platten.

(13) In einer Festung liegen 4800 Mann Besatzung, welche auf 90 Tage mit Proviant versehen sind. Diese Besatzung wird bis auf 4000 Mann vermindert. Wie lange werden diese mit demselben Proviante auskommen? Antwort: 108 Tage.

(14) Jemand braucht 3¾ Ellen ¾ breites Tuch zu einem Kleide. Wie viel Ellen 2 Ellen oder 8/4 breites Tuch wird er zu demselben Kleide brauchen? Antwort: $3\frac{9}{32}$ Ellen.

(15) Wenn ein Metzen Korn 110 Groschen kostet, wiegt ein 3 Kreuzer Brot 1 ℔ 19 Loth. Wie schwer wird ein Brot zu demselben Preise auszubacken seyn, wenn ein Metzen 115 Gr. kostet? Antwort: 1 ℔ $16\frac{18}{23}$ Loth.

(16) Wie viel Gulden Silbermünze betragen 771 Mk. Banko, 9 ß 7½ ₰; wenn 200 Mk. mit 146¾ im Kurse stehen? Antwort: 566 fl. 9·76 Kr.

(17) Wie viele Francs betragen 4200 Silberrubel; wenn 100 Rubel 399½ Fr. gelten? Antwort: 16779 Francs.

(18) Wie viel Metres betragen 8576½ Leipziger Ellen; wenn 100 von diesen 56·345 Metres ausmachen? Antwort: 4832·428925 Metres.

(19) Wie viel Litres betragen 296 Wiener Metzen; wenn 100 Wiener Metzen 6150·6 Litres geben? Antwort: 18205·776 Litres.

(20) Wie viele Kilogrammes betragen 27 Zt. 24¼ ℔ Wiener Gewicht; wenn 200 ℔ 111·906 Kilogrammes gleich kommen? Antwort: 1524·2996 Kilogrammes.

(21) Wie viele Münzstücke, deren jedes $2\frac{1}{4}$ fl. im Werthe hat, kann man aus Einer feinen Köllnischen Mark prägen; wenn aus einer solchen Mark 10 Stück à 2 fl. geprägt werden? Antwort: $8\frac{8}{9}$ Stücke, oder besser 80 Stück aus 9 Mark.

(22) A hat dem B 3600 fl. ohne Zins auf 8 Monate geliehen. Nun braucht A von B 8000 fl.; wie lange muß sie B herleihen, um den vorigen Dienst zu vergelten? Antwort: 3 Monate 18 Tage.

(23) Eine um 2456 fl. 54 Kr. eingekaufte Waare wird mit 15 Prozent Gewinn verkauft; was wird für diese Waare eingenommen? Antwort: 2825 fl. $26\frac{1}{10}$ Kr.

(24) Wenn Jemand täglich 28 Groschen ausgibt, so kömmt er mit seinem vorräthigen Gelde 9 Wochen aus. Wie lange wird er mit eben diesem Vorrathe auskommen, wenn er täglich 36 Groschen ausgeben will? Antwort: 7 Wochen.

Anmerkung. In den folgenden Aufgaben können die angegebenen Zahlen nicht sogleich zum Ansatze benützt werden, sondern es sind die zum Ansatze erforderlichen Zahlen erst vorläufig aus den Angaben abzuleiten.

(25) Jemand bekömmt für 2500 fl., die er ausgeliehen hat, nach 4 Jahren 3000 fl. zurück; wie viel würde er, bei gleicher Verzinsung, nach 6 Jahren zurück erhalten.

4 Jahre : 6 Jahre = (3000 — 2500) : ?

Antwort: An Zinsen 750 fl., also sammt dem Kapitale 3250 fl.

(26) In einer Festung sind 4800 Mann auf 90 Tage mit Proviant versehen. Nun wird die Besatzung mit 1200 Mann verstärkt; wie lange werden sie jetzt auskommen?

$(4800 + 1200) : 4800 = 90 : ?$ Antwort: 72 Tage.

(27) Eine um 680 fl. eingekaufte Waare wird um 782 fl. verkauft; wie viel Prozente werden gewonnen?

$680 : (782 - 680) = 100 : ?$ Antwort: 15 Prozente.

(28) Ein Bote geht täglich 12 Stunden, und macht in 4 Stunden 3 Meilen; wie viele Meilen macht er in 7 Tagen und 8 Stunden?

4 St. : $(7 \times 12 + 8)$ = 3 M. : ? M. Antwort: 69 Meilen.

(29) Ein Kaufmann verkauft 1 ℔ Sirup um 55 Kr. Wenn er aber unter 1 ℔ Sirup 8 Loth Wasser mischt, wie theuer wird er den verdünnten Sirup verkaufen können?

$(32 + 8) : 32 = 55 : ?$ Antwort: um 44 Kreuzer.

(30) Wenn 1 Metzen Waitzen 165 Groschen kostet, so erhält man von einem gewissen Gebäcke für 1 Kreuzer $2\frac{5}{8}$ Loth. Wie schwer wird ein eben so theures Gebäck auszubacken seyn, a) wenn der Waitzen um 45 Groschen theurer, b) wenn er um 39 Groschen wohlfeiler wird?

a) $(165 + 45) : 165 = 2\frac{5}{8} : ?$ b) $(165 - 39) : 165 = 2\frac{5}{8} : ?$

Antwort: $2\frac{1}{16}$ Loth. Antwort: $3\frac{7}{16}$ Loth.

(31) Ist es vortheilhafter 8 ℔ $4\frac{1}{2}$ Loth um 16 fl. 48 Kr. einzukaufen, als $10\frac{1}{2}$ ℔ um 22 fl.? Man berechne die Waare nach der Bedingung des andern Falles.

8 ℔ 4½ Loth : 10½ = 16⅘ fl. : ?	10½ ℔ : 8 ℔ 4½ Loth = 22 fl. : ?
10½ ℔ kosten 21 fl. $40\frac{76}{521}$ fl.	8 ℔ 4½ Loth kosten 17 fl. $3\frac{11}{28}$ Kr.

Also ist die erste Bedingung besser als die zweite.

(32) Wie theuer muß man 16½ Ellen von einem Stoffe bezahlen, von welchem 7 Ellen um 24 fl. 48 Kr. mehr kosten als 4 Ellen?

(7 — 4) : 16½ = 24⅘ : ? Antwort: 136 fl. 24 Kr.

(33) Wie viele Zenten von einer Waare kann man um 829 fl. 52½ Kr. einkaufen; wenn 20 ℔ um 60 fl. 40 Kr. weniger kosten, als 1 Zenten?

60⅔ : 829⅞ = (100 — 20) : ? Zt. Antwort: 10 Zt. 94 ℔ $10\frac{82}{91}$ Loth.

(34) Wenn nach dem Hamburger Preis-Kurant 1 ℔ Kaffee 37½ Kr. kostet; was kostet 1 Wiener ℔, wenn 1 Hamburger ℔ = 10080 holländische Asse, 1 Wiener ℔ 11655 holl. Asse wiegt?

10080 : 11655 = 37½ : ? Antwort: $43\frac{161}{448}$ Kr.

(35) Jemand biethet eine Waare um 290 fl. Silbermünze aus. Ein Käufer will mit Siebzehnern zahlen, und 1 Stück zu 15 Kr. rechnen. Wie theuer muß der Verkäufer seine Waare anbiethen, wenn er einen Siebzehner nicht höher als zu 14½ Kr. anbringen kann?

14½ : 15 = 290 : ? Antwort: Um 300 fl.

(36) Ein Herr verspricht seinem Diener jährlich 175 fl. und ein Kleid. Weil aber der Diener nach 18 Wochen aus dem Dienste tritt, und das Kleid behalten will, so gibt ihm sein Herr nur 5 fl. als Bezahlung. Wie hoch ist das Kleid gerechnet?

Der Lohn für die im Jahre noch übrigen 34 Wochen beträgt nach dieser Bedingung noch (175 — 5) d. i. 170 fl. Hieraus ergibt sich die Aufgabe: 34 : 18 = 170 : ? Aus dieser Proporzion ergibt sich der Lohn für 18 Wochen mit 90 fl., welcher zugleich die Summe aus dem Werthe des Kleides und 5 fl. ist; es ist sonach der Werth des Kleides 85 fl.

B. Von der zusammengesetzten Regel de Tri.

§. 108. In der einfachen Regel de Tri wird die Unbekannte blos aus dem Verhältnisse der beiden gegebenen gleichartigen und aus der dritten ungleichartigen Größe bestimmt, sie ist daher blos von Einem einzigen Verhältnisse abhängig. Oftmals aber ist das Verhältniß der Unbekannten zu der ihr gleichartigen Größe von mehreren gegebenen einfachen Verhältnissen abhängig. Z. B. Wie viele Gulden kosten 6¾ Stück, wovon jedes 24 Ellen lang und 1¼ Ellen breit ist; wenn 4½ Stück, deren jedes 18 Ellen lang und 2 Ellen breit ist, mit 540 fl. bezahlt werden. Aufgaben dieser Art werden Aufgaben der zusammengesetzten Regel de Tri genannt.

Auch bei den Aufgaben dieser Art lassen sich die Angaben wieder in zwei Sätze abtheilen, wovon der eine alle zusammengehörigen Bedingungen für irgend ein Geschäft gegeben enthält (der bekannte Fall), der andere aber die den ersten gleichartigen Bedingungen für irgend ein anders ähnliches Geschäft, von welchen aber noch Eine unbekannt ist (der unbekannte Fall).

Zu den Aufgaben der zusammengesetzten Regel de Tri rechnet man noch diejenigen Aufgaben, bei welchen das Verhältniß der Unbekannten zu der ihr gleichartigen Größe nicht unmittelbar aus mehreren gegebenen Verhältnissen

zusammengesetzt ist, sondern in welchen dieses Verhältniß erst durch passende Zusammenstellung mehrerer gegebener Zwischengrößen aufgesucht werden muß. Diese gegebenen Zwischengrößen müssen für diesen Fall immer von der Art seyn, daß zwei und zwei verschiedenartige gleiche Werthe haben. Z. B. Wie viele Gulden Wiener Währung betragen **50** ℔ Sterling, wenn **1** ℔ St. = **13** *mk*, wenn **300** *mk* = **217⅕** fl. Silbermünze, und wenn **100** fl. Silbermünze = **249½** fl. Wiener Währung sind?

Bei den Aufgaben der ersten Art bezieht sich die unbekannte Größe auf alle Bedingungsglieder des unbekannten Falles, und eben so der mit der Fragegröße gleichartige Ausdruck des bekannten Falles, auf alle Bedingungsglieder dieses Falles. Es sind daher für diese Aufgaben alle Angaben des bekannten Falles beziehende Größen, mit Ausnahme der Größe, die mit der Fragegröße gleichartig ist.

Die Aufgaben der zusammengesetzten Regel de Tri von der ersten Art, werden auch als zur **regula quinque**, **regula septem** u. s. w. gehörig genannt, wenn zu **5** Angaben die **6**ste, zu **7** die **8**te u. s. w. Größe gesucht werden soll, jedoch ist diese Eintheilung ganz und gar überflüssig.

§. 109. Jede Aufgabe der zusammengesetzten Regel de Tri kann theilweise in lauter Aufgaben der einfachen Regel de Tri zerlegt, und dadurch selbst aufgelöset werden, indem man das aus einer einfachen Regel de Tri gefundene Resultat als eine neue Angabe in der nächstfolgenden betrachtet u. s. f., bis man die letzte einfache Aufgabe gelöset hat, deren Resultat zugleich das Resultat der ganzen Aufgabe ist.

Beispiel über eine Aufgabe der ersten Art.

Was kosten **6¾** Stück von einem Stoffe, von dem jedes Stück **24** Ellen lang und **1¼** Elle breit ist; wenn **4½** Stück von einem ähnlichen Stoffe, von welchem jedes Stück **18** Ellen lang und **2** Ellen breit ist, **540** fl. kosten?

Man löse zuerst die Aufgabe auf: Was kosten **6¾** Stück; wenn **4½** Stück (bei übrigens gleichen Bedingungen) **540** fl. kosten? Antwort: **810** fl.

Dann löse man die Aufgabe auf: Was kosten **6¾** Stück von **24** Ellen langem Stoffe; wenn eben so viele Stücke von **18** Ellen langem Stoffe **810** fl. kosten? (Hier wird die Breite noch als gleich vorausgesetzt.) Antwort: **1080** fl.

Endlich erübrigt noch die Auflösung der Aufgabe: Was kosten **6¾** Stücke von einem **1¼** Ellen breiten Stoffe; wenn eben so viele Stücke von **2** Ellen breiten Stoffe **1080** fl. kosten? Antwort: **675** fl.

Dieser Betrag ist auch das Resultat der ganzen Aufgabe.

Beispiel über eine Aufgabe der zweiten Art.

Wie viel Gulden W. W. betragen **50** ℔ Sterling; wenn **1** ℔ St. = **13** Hamburger Banko-*mk*; wenn **300** *mk* = **217⅕** fl. Silbermünze, und wenn **100** fl. Silbermünze = **249½** fl. W. W. sind?

Zuerst löse man die Aufgabe auf: Was betragen **217⅕** fl. Silbermünze; wenn **100** fl. Silbermünze = **249½** fl. W. W. sind?
Antwort: **541·914** fl. W. W.

Dann löse man die Aufgabe auf: Wie viel fl. W. W. betragen **13** *mk*; wenn **300** *mk* = **541·914** fl. W. W. sind? Antwort: **23·48294** fl. W. W.

Endlich die Aufgabe: Wie viel fl. W. W. betragen **50** ℔ Sterling; wenn **1** ℔ Sterl. **23·48294** fl. W. W. im Kurse ist?
Antwort: **1174·147** fl. W. W.

Dieser Betrag ist zugleich auch das Resultat der ganzen Aufgabe.

Auch könnte man anfänglich die Aufgabe auflösen: Wie viele mℬ Banko betragen **50** ℔ Sterling, wenn **1** ℔ Sterling = **13** mℬ ist? Antwort: **650** mℬ.

Sodann die Aufgabe: Wie viel fl. Silbermünze betragen **650** mℬ; wenn **300** mℬ = **217⅕** fl. Silbermünze sind? Antwort: **470⅗** fl. Silbermünze.

Endlich die Aufgabe: Wie viel fl. W. W. betragen **470⅗** fl. Silbermünze; wenn **100** fl. Silbermünze = **249½** fl. W. W. geachtet werden? Anwort: **1174·147** fl. W. W., wie bei der ersten Auflösung.

§. 110. Regeln des Ansatzes bei den Aufgaben der ersten Art.

Um die Auflösung der einzelnen Regel de Tri Aufgaben zu ersparen, und die ganze Auflösung in Einen Satz zusammenzuziehen, verfahre man wie folget:

„Man schreibe alle Größen des einen Falls neben einander, und darunter die Größen des andern Falles, jedoch so, daß immer die gleichartigen unter einander zu stehen kommen.“

Auf diese Weise werden jede zwei über einander stehende Größen ein Verhältniß geben, in welchen Verhältnissen, wie schon früher erinnert wurde, alle diejenigen Größen, die im bekannten Falle vorkommen, die beziehenden Größen sind.

„Sind die Verhältnißzahlen vermischte Zahlen oder Brüche, so drücke man sie in ganzen Zahlen aus, und kürze sie noch nach Möglichkeit ab. Sind sie nicht gleichnamig, so gebe man ihnen vorher auch noch diese Eigenschaft.“

„Man setze die Unbekannte ins vierte, die mit ihr gleichartige ins dritte Glied. Man denke ferner das erste bekannte Verhältniß allein mit dem unbekannten zusammengestellt, alle übrigen bekannten Verhältnisse aber als gar nicht gegeben, oder als in beiden Angaben als gleich gegeben.“

„Erfordert das Doppelte der beziehenden Größe von der mit der Unbekannten gleichartigen Größe wieder das Doppelte, so setze man diese beziehende Größe selbst ins erste, die mit ihr gleichartige Größe ins zweite Glied. Erfordert das Doppelte der beziehenden Größe von der mit der Unbekannten gleichartigen Größe nur die Hälfte, so setze man die mit der beziehenden gleichartige Größe ins erste, die beziehende Größe selbst aber ins zweite Glied.“

„Auf diese Weise verfahre man mit jedem andern gegebenen Verhältnisse, wie mit dem ersten, indem man auch die früher schon berücksichtigten Verhältnisse als gar nicht vorhanden betrachtet, und bestimme dadurch, welche von den in irgend einem Verhältnisse gegebenen Größen als Faktor des ersten Gliedes zu setzen ist, und welche als Faktor der Mittelglieder zu berücksichtigen kommt.“

Regeln der Auflösung dieser Aufgaben.

„Sind die Verhältnißglieder durch gehörige Stellung der Auflösezahlen bei den Größen der höhern Benennung schon gleichnamig gemacht, so braucht man nur mehr die etwa noch vorhandenen Brüche einzurichten, die Nenner, wie bekannt, gehörig zu versetzen, das erste Glied gegen was immer für eins

„der Mittelglieder so lange abzukürzen, als es mit Vortheil geschehen kann, „und endlich das Produkt aller rückständigen Faktoren in den Mittelgliedern „durch das Produkt der rückständigen Faktoren im ersten Gliede zu dividiren, „wo sonach der Quozient das verlangte Resultat angeben muß."

Die Probe wird gemacht, wenn man was immer für eine in den Angaben befindliche Größe als unbekannt annimmt, das Resultat aber als eine gegebene Größe betrachtet, und die Aufgabe neuerdings auflöset. Ist das Resultat der neu aufgestellten Aufgabe der weggelassenen und früher gegebenen Größe gleich, so schließt man auf eine richtige Auflösung. Es kann daher auf diesem Wege die Probe auf so viele verschiedene Arten gemacht werden, als wie viele Größen in der ursprünglichen Aufgabe gegeben sind, abgesehen von dem, daß es noch eine Menge anderer Probearten gibt.

§. 111. Beispiele.

(37) Was kosten **$6\frac{3}{4}$** Stück von einem Stoffe, von dem jedes Stück **24** Ellen lang und **$1\frac{1}{4}$** Elle breit ist; wenn **$4\frac{1}{2}$** Stück von einem ähnlichen Stoffe, von welchem jedes Stück **18** Ellen lang und **2** Ellen breit ist, **540** fl. kosten?

? fl.	$6\frac{3}{4}$	Stück	24	Ellen lang	$1\frac{1}{4}$	Elle breit
540 fl.	$4\frac{1}{2}$	„	18	„ „	2	„ „

$4\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4} = 540 : ?$	
$18 : 24$	Antwort: 675 fl.
$2 : 1\frac{1}{4}$	

(38) **24** Arbeiter verfertigen **72** Stück von einer Waare, wovon jedes Stück **18** Ellen lang und **$\frac{2}{3}$** Ellen breit ist, innerhalb **6** Wochen, wenn sie wochentlich **6** Tage, und täglich **10** Stunden arbeiten; wie viel Ellen lang wird ein Stück von einer ähnlichen Waare werden, von welcher **9** Arbeiter **36** Stück verfertigen, wenn die Breite **$\frac{1}{2}$** Elle ist, und die Arbeit in **8** Wochen vollendet wird, wenn wochentlich **5** Tage, aber täglich **12** Stunden gearbeitet wird?

24 Arbeiter,	72 Stück,	18 Ellen lang,	$\frac{2}{3}$ Elle breit,	6 Woch.,	6 Tage,	10 St.
9 „	36 „	? „	$\frac{1}{2}$ „	8 „	5 „	12 „

$24 : 9 = 18 : ?$	
$36 : 72$	
$\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$	Antwort: Jedes Stück
$6 : 8$	wird 24 Ellen lang.
$6 : 5$	
$10 : 12$	

(39) [Als Probe von **37**.] Jemand bezahlt **$6\frac{3}{4}$** Stücke von einem Stoffe, wovon jedes Stück **24** Ellen lang und **$1\frac{1}{4}$** Elle breit ist, mit **675** fl. Wie viele Stücke einer ähnlichen Waare erhält er um **540** fl., wenn **1** Stück **18** Ellen lang und **2** Ellen breit ist?

$6\frac{3}{4}$ Stück,	24 Ellen lang,	$1\frac{1}{4}$ Elle breit,	675 fl.
? „	18 „	2 „	540 „

$18 : 24 = 6\frac{3}{4} : ?$	
$2 : \frac{5}{4}$	Antwort: $4\frac{1}{2}$ Stück.
$675 : 540$	

(40) [Als Probe von 38.] Wie viele Arbeiter verfertigen 72 Stück von einer Waare, deren jedes 18 Ellen lang und 2/3 Ellen breit ist, in 6 Wochen, wenn sie wochentlich 6 Tage, und täglich 10 Stunden arbeiten; wenn 9 Arbeiter 36 Stücke von einer ähnlichen Waare in 8 Wochen verfertigen, wenn sie wochentlich 5 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten, und wenn jedes Stück 24 Ellen lang und 1/2 Elle breit seyn soll?

? Arbeit.,	72 Stück,	18 Ellen lang,	2/3 Elle br.,	6 Wochen,	6 Tage,	10 St.
9 „	36 „	24 „	1/2 „	8 „	5 „	12 „

36 : 72 = 9 : ?
24 : 18
1/2 : 2/3
6 : 8
6 : 5
10 : 12

Antwort: 24 Arbeiter.

(41) Wie viel Interessen erhält man von 2700 fl. Kapital in 2 Jahren und 8 Monaten; wenn 100 fl. Kapital in 1 Jahre 6 fl. Interessen geben? Antwort: 432 fl.

(42) Ein Fuhrmann erhält, um 75 Zenten 15 Meilen weit zu führen, 199 2/7 fl. als Bezahlung. Wie viele Meilen weit wird er 35 Zt. um 124 fl. bei sonst gleichen Bedingungen transportiren müssen? Antwort: 20 Meilen weit.

(43) Ein Fuhrmann erhält, um 35 Zenten 20 Meilen weit zu führen, 160 fl. als Bezahlung. Es werden ihm aber noch 5 Zenten zugeladen, und er soll um 6 1/4 Meile weiter fahren. Wie viele Gulden wird man ihm noch zu bezahlen haben? Antwort: Damit er 40 Zenten 26 1/4 Meile weit führe, gebührt ihm verhältnißmäßig die Fracht mit 240 fl., also ist er berechtiget, noch um 80 fl. mehr zu fordern.

(44) Ein Fuhrmann übernimmt 40 Zenten, um sie 30 Meilen weit zu führen, und bedingt sich 180 fl. als Bezahlung. Nachdem er 10 Meilen weit gefahren ist, erhält er den Auftrag, von hier auf einer andern Straße, als auf der anfänglich bedungenen, fortzufahren, noch 10 Zenten zuzuladen, und die Waare um 5 Meilen weiter zu führen, als anfänglich bestimmt war. Wie groß wird seine Bezahlung werden müssen, wenn die Beschwerden auf der ersten Straße zu denen auf der zweiten sich wie 3 : 4 verhalten, und die Preise der Lebensmittel im Verhältnisse wie 5 : 6 stehen?

Man suche zuerst, was man nach der anfänglichen Bedingung für 40 Zenten bezahlen muß, um sie 10 Meilen weit zu führen. Antwort: 60 fl. Sodann erhält man eine neue Aufgabe: Um 40 Zenten 20, d. i. (30 — 10), Meilen weit zu führen, sind 120, d. i. (180 — 60) Gulden zu bezahlen; wie viel wird man bezahlen müssen, um 50, d. i. (40 + 10) Zenten, 25, d. i. (20 + 5) Meilen weit zu führen, wenn sich die Beschwerden wie 3 : 4, und die Preise der Lebensmittel wie 5 : 6 verhalten? Antwort: 300 fl. Sonach beträgt die ganze Bezahlung (60 + 300), d. i. 360 Gulden.

(45) A will in Hamburg Tuch einkaufen, und es werden ihm 24 Ellen 7/4 breites Tuch um 350 mß gebothen. Er verspricht 100 mß mehr zu bezahlen, wenn er von einem breiteren Tuche von derselben Qualität um 3 Ellen mehr erhält. Wie breit war das verlangte Tuch? Antwort: 8/4 oder 2 Ellen breit.

(46) 30 Weber verfertigen von einem gewissen Stoffe binnen 4 Monaten 90 Stücke, wovon jedes 30 Ellen lang und 1¼ Ellen breit ist, wenn sie monatlich 25 Tage und täglich 10 Stunden arbeiten; wie viele Monate werden 20 Weber beschäftiget seyn, um 80 Stück von einem ähnlichen Stoffe zu verfertigen, wenn Ein Stück 30⅜ Ellen lang und 1 Elle breit seyn soll, und wenn sie bei einer täglichen Arbeit von 9 Stunden, monatlich 24 Tage arbeiten? Antwort: 5 Monate.

(47) 16 Maurer führen in 75 Tagen eine Mauer auf, welche 75 Klafter lang, 10 Schuh hoch, und 4 Schuh dick ist, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten. In wie viel Tagen führen 6 Maurer eine 24 Klafter lange Mauer auf, wenn diese 15 Schuh hoch und 2½ Schuh dick ist, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten? Antwort: In 50 Tagen.

(48) Um ein Gebäude aufzuführen, braucht man 5400 Steine, von welchen jeder, wenn er eingemauert ist, einen Raum von 2½ Schuh Länge, 1¾ Schuh Breite und 1 Schuh Dicke hat. Wie viele Ziegel würden zur Aufführung eben dieser Mauer erforderlich seyn, wenn man annehmen kann, daß Ein eingemauerter Ziegel 12 Zolle lang, 6 Zolle breit und 3 Zolle dick ist? Antwort: 189000 Ziegel.

§. 112. Regeln für den Ansatz der Aufgaben der zweiten Art.

„Man setze jene Größe, wegen welcher die Rechnung angestellt wird, „ins zweite Glied. Nun wird in der Aufgabe eine Angabe vorhanden seyn, „die mit dem zweiten Gliede gleichartig ist, diese setze man ins erste Glied. „Ferner wird sich eine Größe vorfinden, die mit dem ersten Gliede denselben „Werth hat, diese setze man ins dritte Glied, das vierte Glied gehört für die „Unbekannte."

„Zu der im dritten Gliede sich vorfindenden Größe wird die Aufgabe „eine gleichartige Größe enthalten, die wieder ins erste, so wie eine andere, „die dieser dem Werthe nach gleich ist, und in ein Mittelglied gesetzt wird."

„So lange die Aufgabe noch Angaben enthält, wird immer noch eine „Größe vorhanden seyn, die der zuletzt in einem Mittelgliede gesetzten gleich„artig ist, und die wieder ins erste Glied kommt, so wie diejenige, welche „mit ihr dem Werthe nach gleich ist, ins Mittelglied gesetzt wird. Die zuletzt „im Mittelgliede gesetzte Größe ist sodann mit der Fragegröße gleichnamig."

Auflösung und Probe wie bei den Aufgaben der ersten Art.

§. 113. Beispiele.

(49) Wie viel Gulden Wiener Währung betragen 50 ℔ Sterling, wenn 1 ℔ Sterling = 13 mk Banko, wenn 300 mk Banko = 217⅗ fl. Silbermünze, und wenn 100 fl. Silbermünze = 249½ fl. W. W. sind?

1 ℔ St : 50 ℔ St. = 13 mk : x
300 : 217⅗
100 : 249½.

Antwort: 1174 fl. 8·82 Kr. Wiener Währung.

(50) Wie viel Gulden Wiener Währung betragen 360 ℔ Sterling, wenn 1 ℔ Sterling in Amsterdam 35½ ß vlämisch-Courant gilt, wenn 1 ß vlämisch = 12 Groot, wenn 2 Groot Courant = 1 Stüwer Courant,

wenn 50 Stüwer Courant = 1 Thaler, wenn 100 Thaler Amsterdam = 107½ Thaler Giro in Augsburg, wenn 100 solche Thaler = 127 Thaler Courant, wenn 100 Thaler Augsburger Courant 98¾ Thaler Wiener Konvenzions-Courant, wenn 1 Thaler = 1½ fl., und wenn 100 fl. Konvenzions-Münze = 250 fl. Wiener Währung sind?

1 ℔ St. : 360 ℔ St. = 35½ ß : x
1 : 12
2 : 1
50 : 1
100 : 107½ — Antwort. 7753 fl. 24½ Kr. W. W.
100 : 127
100 : 98¾
1 : 1½
100 : 250.

Anmerkung. Mehrere Aufgaben dieser Art werden noch später bei der Kettenrechnung vorkommen, wohin sie auch gehören.

Vierter Abschnitt.

Von der Kettenrechnung.

§. 114. Oftmals sind mehrere Aufgaben in der Art zu Einer einzigen verbunden, daß das Resultat der einen zugleich eine Angabe für die andere, das Resultat dieser anderen eine Angabe für eine dritte u. s. w. Aufgabe ist, bis endlich das letzte Resultat zugleich das Resultat aus der ganzen Frage bestimmt, z. B.

(1) Wie viel Gulden Wiener Währung kosten 8 Zt. 45 ℔ von einer Waare, wenn 1 Zt. um 375 Francs 50 Centimes übernommen wird, wenn 300 Francs 116¼ fl. Silbermünze, und 100 fl. Silbermünze 250 fl. W. W. gleich gehalten werden?

Offenbar zerfällt die Beantwortung dieser Frage in 3 einzelne Aufgaben, nämlich:

a) Wie viele Francs kostet diese Waare?

℔ ℔ Fr. Fr.
100 : 845 = 375½ : x
2
751
6008
3004
634595 : 200
Francs: 3172·975
Antwort: 3172 Fr. 97½ Centimes.

oder nach der wälschen Praktik:

1 Zt.........Fr. 375„50
8 Zt.........Fr. 3004„—
25 ℔............... 93„87½
20 ℔...................75„10
Antwort: Fr. 3172„97½

b) Was betragen diese **3172 Francs 97½ Centimes** in Silbermünze?

Fr.	Fr.	fl.S.M.	fl.S.M.
300 :	3172·975 =	116¼ :	y
4	31·72975	465	
100	15·864875	155	
3	4918·11125 : 4		
S.M. fl.	1229·5278125.		

oder 3172·975 zu 116¼

zu 100	1057·65833333
zu 10	105·76583333
zu 5	52·88291666
zu ¼	13·22072916
S.M. fl.	1229·5278125.

c) Was betragen diese **1229·5278125** fl. Silbermünze, der gegebenen Bedingung gemäß, in Wiener Währung?

fl.S.M.	fl.S.M.	fl.W.W.	fl.W.W.
100 :	1229·5278125 =	250 :	x;
fl.W.W.	3073·81953125		

oder S.M. fl. 1229·5278125

à 200	2459·055625
à 50	614·76390625
W.W. fl.	3073·81953125.

Wird um die Zwischenresultate nicht gefragt, nämlich wird nicht gefragt, was diese Waare in **Francs** oder in Gulden Silbermünze werth ist, sondern blos allein, was sie in Gulden Wiener Währung beträgt, so lassen sich die einzelnen Bedingungen in Einen einzigen Satz zusammen ziehen, welcher K e t t e n s a t z genannt wird. Das Resultat der Aufgabe wird durch folgende Kette gefunden, deren Ansatz und Auflösung sich aus dem folgenden §. ergeben wird:

W.W. fl. x	
4 20 100	845 ℔
20 300	375½ Fr.
2 100	116¼ fl. S.M.
2	250 fl. W.W.
4	

845 × 751 × 465 × 250
169 31 5

751 × 169
4506
126919 × 31
3934489 : 128,0
944
488
1049
3147 : 64
587
110
460
120
560
480
320

W.W fl. 3073„49·171875 Kr.

Die K e t t e n r e c h n u n g ist daher jenes Rechnungsverfahren, durch welches die Angaben mehrerer zusammengehöriger kleinerer Aufgaben, zur alsogleichen Beantwortung der Hauptfrage, in Einen Satz verbunden werden. Das Verfahren hierbei gründet sich auf die Lehre von den zusammengesetz-

ten Proporzionen, und auf den Satz, daß das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der Mittelglieder gleich seyn muß. Ihre Benennung erhält sie von dem Umstande, weil sie mehrere Regel de Tri-Sätze mit einander verkettet, um einen einzigen Satz zu bilden, dessen Resultat dem Endresultate der verschiedenen Regel de Tri-Sätze gleich ist, aus welchen sie zusammengesetzt wird. Ihre Anwendung findet hauptsächlich bei den Aufgaben der zweiten Art der zusammengesetzten Regel de Tri Statt. Außerdem aber wird sie sehr häufig bei Waaren und Wechselrechnungen, bei Berechnungen über Münzen, Maße und Gewichte u. s. w. angewendet.

§. 115. Um die Regeln des Ansatzes aufzufinden, wollen wir folgende Aufgaben auflösen:

Wie viel Gulden W. W. betragen **A** ℔ Sterl., wenn **B** ℔ Sterling = **C** Mk Banko, wenn **D** Hamburger Mk Banko = **E** fl. Silbermünze, und wenn **100** fl. Silbermünze = **F** fl. Wiener Währung sind?

B ℔ Sterling : **A** ℔ Sterl. = **C** Mk Banko : α	**B** : **C** = **A** : α
D Mk Banko : α Mk Banko = **E** fl. Silbm. : β	**D** : **E** = α : β
100 fl. Silbm. : β fl. Silbm. = **F** fl. W. W. : x fl. W. W.	**100** : **F** = β : x

$$B \times D \times 100 : C \times E \times F = A : x$$
$$x \times B \times D \times 100 = A \times C \times E \times F.$$

Wie viel fl. W. W. betragen **A** ℔ Sterling, wenn **1** ℔ Sterling = **35½** ß vläm., wenn **1** ß vläm. = **12** Groot, wenn **2** Groot = **1** Stüwer, wenn **50** Stüwer = **1** Thal. Amsterd. Courant, wenn **100** Thal. Amsterd. Cour. = **107½** Augsb. Giro, wenn **100** Thal. Augsb. Giro = **127** Thal. Augsb. Cour., wenn **100** Thal. Augsb. Cour. = **98¾** Thal. Wien. Silberm., wenn **1** Thal. = **1½** fl., wenn **100** fl. Silberm. = **250** fl. W. W. sind?

1 ℔ Sterling : **A** ℔ Sterling = **35½** ß vlämisch : α ß vlämisch
1 ß vlämisch : α ß vlämisch = **12** Groot : β Groot,
2 Groot : β Groot = **1** Stüwer : γ Stüwer,
50 Stüwer : γ Stüwer = **1** Thal. Amst. Cour. : δ Thal. Amst. Cour.
100 Thaler Amsterdamer Courant : δ Thaler Amsterdamer Courant = ...
= **107½** Thl. Augsburger Giro : ε Thaler Augsburger Giro,
100 Thaler Augsburger Giro : ε Thaler Augsburger Giro = ...
= **127** Thaler Augsburger Cour. : ζ Thaler Augsburger Courant,
100 Thaler Augsburger Courant : ζ Thaler Augsburger Courant = ...
= **98¾** Thaler Silbermünze : η Thaler Silbermünze.
1 Thaler Silberm. : η Thal. Silberm. = **1½** fl. Silberm. : ϑ fl. Silberm.
100 fl. Silbermünze : ϑ fl. Silbermünze = **250** fl. W. W. : x fl. W. W.;

oder nach Verwechslung der Mittelglieder auch noch:

1 ℔ Sterling : **35½** ß vlämisch = **A** ℔ Sterling : α ß vlämisch,
1 ß vlämisch : **12** Groot = α ß vlämisch : β Groot,
2 Groot : **1** Stüwer = β Groot : γ Stüwer,
50 Stüwer : **1** Thl. Amst. Cour. = γ Stüwer : δ Thl. Amst. Cour.
100 Thaler Amsterdamer Courant : **107½** Thaler Augsburger Giro = ...
. . . = δ Thaler Amsterdamer Courant : ε Thaler Augsburger Giro,
100 Thaler Augsburger Giro : **127** Thaler Augsburger Courant = ...
. . . = ε Thaler Augsburger Giro : ζ Thaler Augsburger Courant,
100 Thaler Augsburger Courant : **98¾** Thaler Silbermünze = ...
. . . = ζ Thaler Augsburger Courant : η Thaler Silbermünze,
1 Thl. Silberm. : **1½** fl. Silberm. = η Thl. Silberm. : ϑ fl. Silberm.
100 fl. Silberm. : **250** fl. W. W. = ϑ fl. Silberm. : x fl. W. W.

Hieraus folgt:

$$(1\times1\times2\times50\times100\times100\times100\times1\times100):$$
$$(35\tfrac{1}{2}\times12\times1\times1\times107\tfrac{1}{2}\times127\times98\tfrac{3}{4}\times1\tfrac{1}{2}\times250) = A : x,$$
$$x\times1\times1\times2\times50\times100\times100\times100\times1\times100 =$$
$$A\times35\tfrac{1}{2}\times12\times1\times1\times107\tfrac{1}{2}\times127\times98\tfrac{3}{4}\times1\tfrac{1}{2}\times250.$$

Die beiden letzten Resultate in diesen Aufgaben geben auch die Brüche:

$$\frac{A\times C\times E\times F}{x\times B\times D\times 100}, \text{ und}$$

$$\frac{A\times35\tfrac{1}{3}\times12\times1\times1\times107\tfrac{1}{2}\times127\times98\tfrac{3}{4}\times1\tfrac{1}{2}\times250}{x\times1\times1\times2\times50\times100\times100\times100\times1\times100}.$$

Bringt man diese Brüche aus der wagerechten Stellung in eine senkrechte, so bekömmt man folgende Ansätze.

Aus der ersten Aufgabe:

W. W. fl. x	A ℔ Sterling
℔ Sterling B	C Hamburger ℳ Banko
Hamburger ℳ Banko D	E fl. Silbermünze
fl. Silbermünze 100	F fl. W. W.

Aus der zweiten Aufgabe:

W. W. fl. x	A ℔ Sterling
℔ Sterling 1	35½ ß vlämisch
ß vlämisch 1	12 Groot
Groot 2	1 Stüwer
Stüwer 50	1 Amsterdamer Thaler
Amsterdamer Thaler 100	107½ Thaler Augsburger Giro
Thaler Augsburger Giro 100	127 Thaler Augsburger Courant
Thaler Augsburger Courant 100	98¾ Thaler Wiener Silbermünze
Thaler Wiener Silbermünze 1	1½ fl. Wiener Silbermünze
fl. Wiener Silbermünze 100	250 fl. W. W.

Bei gehörig angestellter Vergleichung dieser Ausdrücke erhält man für das kürzere praktische Verfahren folgende

Regeln des Ansatzes:

„Man setze links eines Striches die Unbekannte, oder man fange die „Kette mit der zu suchenden Größe an."

„Dieser gegenüber rechts setze man diejenige Größe der Angaben, welche „mit der zu suchenden Größe den nämlichen Werth hat."

„Sodann setze man wieder links diejenige Größe der Angabe, welche „mit der vorher rechts geschriebenen gleichnamig ist, rechts aber die Größe, „welche mit der so eben links geschriebenen wieder denselben Werth hat." Es versteht sich von selbst, daß eine mehrnamig genannte Größe auch hier als Einnamig genannt, und zwar als von der niedersten Benennung gegeben, betrachtet werden muß.

„Ganz auf dieselbe Weise schreibe man immer wieder links diejenige „Größe der Angabe, welche mit der zuletzt rechts geschriebenen gleichnamig ist,

„rechts aber die Größe, welche mit der links geschriebenen denselben Werth „hat, bis alle Angaben im Ansatze stehen."

„Enthält die Angabe nicht immer eine Größe von der Benennung, „mit welcher das letzte Glied rechts sich schließt, so müssen noch Zwischenver„hältnisse gesetzt werden, bis man einen Ausdruck in der Benennung erhält, „in welcher sich wieder eine gleichartige Angabe vorfindet."

„Die Kette wird sich immer mit einer Größe schließen, die mit dem „Anfangsgliede, d. i. mit der Unbekannten gleichnamig ist."

„Enthält die Angabe keine Größe, die als Schlußglied mit dem An„fangsgliede gleichnamig ist, so müssen ebenfalls so viele Zwischenverhältnisse „noch gesetzt werden, bis die Kette diese verlangte Eigenschaft erhält."

„Zwischenverhältnisse können oft dadurch vermieden werden, daß man „die gleichartigen Ausdrücke während des Ansetzens durch Resolviren oder Re„duziren gleichnamig macht, wenn dieses ohne Schwierigkeit geschehen kann."

Die weitere Auflösung ist aus dem früher Angegebenen von selbst bekannt.

§. 116. Beispiele.

(1) Wie viele Gulden W. W. kosten **6** Zt. **85** ℔ **28** Loth von einer Waare, von welcher **3½** Zt. mit **1234 Francs 75 Centimes** bezahlt werden; wenn **300 Fr.** = **118¼** fl. Silbermünze, wenn **100** fl. Silbermünze = **249¾** fl. W. W. sind, und wenn beim Verkaufe **25%** gewonnen werden? Antwort: **2977** fl. $29\frac{59830411}{71680000}$ Kr. W. W.

(2) Mit wie viel **Francs** wurden **3½** Zt. bezahlt, wenn **6** Zt. **85** ℔ **28** Loth auf **2977** fl. **30** Kr. W. W. zu stehen kommen, wenn letztere Waare um **25%** höher gerechnet ist als die erstere, wenn **100** fl. Silbermünze = **249¾** fl. W. W., und wenn **300 Fr.** = **118¼** fl. Silbermünze sind? Antwort: **1234 Fr. 75 Centimes.**

(3) Um wie viel Gulden W. W. kann man Ein Wiener ℔ verkaufen, wenn **4** Zt. **3 Quarters** und **16** ℔ mit **32** ℔ Sterling **16** ß eingekauft werden, wenn **1** engl. ℔ = **9428·6** holländische Asse, **1** Wiener ℔ = **11655·11** holländ. Asse ist, wenn **1** ℔ Sterling = **13** Hamburger Banko mℓ, wenn **3** mℓ = **1** Thaler, wenn **100** Thaler **217⅛** fl. Silbermünze, wenn **100** fl. Silbermünze = **249¾** fl. W. W., wenn die Kosten wegen Transport, Mauthen u. dgl. **60** Prozent betragen, und wenn der Verkäufer noch überdieß **25** Prozent gewinnen will? Antwort: Um **3** fl. **28** Kr. $2\frac{6825261714 69}{1291718200000}$ ₰.

(4) Wien erhält aus Hamburg den Auftrag, **3000** Stück k. k. Dukaten à **4** fl. **39** Kr. einzukaufen, und zu den Kurs **146⅛** zu trassiren. Wien rechnet für Sensarie und sonstige Spesen **3⅓** Prozent. Wie viel mℓ Banko beträgt die Tratte? Antwort: **29594** mℓ **8** ß $4\frac{988}{1167}$ ₰.

(5) Jemand gibt für eine Parthie Waaren von **396** ℔ Sporko-Gew. **1000 Francs.** Was kostet **1** ℔ **netto** in W. W., wenn die **Tara** zu **8** Prozent auf **100** gerechnet wird (d. h. wenn **100** ℔ **netto** = **108** ℔ **Sporco** sind), wenn die Spesen **12½** Prozent betragen, wenn **300 Francs 117¼** fl. Silbermünze gelten, und wenn **100** fl. Silberm. gleich **249½** fl. W. W. sind?

Antwort: **2·99187357954** fl. W. W.

(6) Auf wie viel **Francs** kommen **396** ℔ Sporko-Gewicht von einer Waare zu stehen, von welcher **1** ℔ **netto** $2\frac{698279}{704000}$ fl. W. W. kostet, die

Tara zu 8 Prozent auf 100 gerechnet, wenn die Spesen 12½ Prozent betragen, wenn 300 Francs = 117¼ fl. Silbermünze gelten, und wenn 100 fl. Silbermünze = 249½ fl. W. W. sind? Antwort: 1000 Francs.

Anmerkung. Die Erklärung der Art und Weise, wie man die beschwerlichen Multiplikazionen vermeiden und mit den möglichst wenigsten Ziffern eine derlei Aufgabe auflösen kann, muß zur Ersparniß des Raumes dem mündlichen Vortrage überlassen bleiben.

Fünfter Abschnitt.

Von der Münz- und Pari-Rechnung.

(Vorzügliche Anwendung der Kettenrechnung.)

§. 117. Zur Werthbestimmung und Vergleichung der Münzen unter einander, muß entweder (§. 51) die gesetzlich bestimmte Anzahl Stücke bekannt seyn, die aus Einer rauhen Mark geprägt werden sollen, wobei zugleich auch immer der Feingehalt einer rauhen Mark angegeben seyn muß, oder es wird festgesetzt, in wie vielen Stücken Eine feine Mark enthalten seyn soll. Ist eine dieser Angaben bestimmt, so kann die andere daraus berechnet werden.

Außer diesem bestimmen die Münzgesetze auch noch die dem Münzmeister gestattete Abweichung (das Remedium) am Schrott und Korne. (Nach dem Allerhöchsten Patente vom 1. November 1823, wird bei den neuen Italienischen Münzen am Korne gar keine Abweichung, hier Tolleranz genannt, Statt finden; die Tolleranz am Schrotte beträgt beim Golde 0·00125, beim Silber 0·0025, beim Kupfer 0·01.)

(1) Wenn aus Einer rauhen Mark 23 Karat 8 Gran fein 67 Stück k. k. Dukaten gepräget werden, in wie vielen Stücken solcher Dukaten wird Eine feine Mark enthalten seyn?

$23\frac{2}{3} : 24 = 67 : ?$ Antwort: In $67\frac{67}{71}$ Stücken.

(2) Wenn 20 Stück Konvenzionsmünze Eine feine Köllnische Mark Silber enthalten, wie viele Gulden werden aus einer rauhen Mark geprägt werden können, wenn das Silber 13⅓ löthig ist?

$16 : 13\frac{1}{3} = 20 : ?$ Antwort: 16⅔ fl.

(3) Wenn aus Einer feinen Köllnischen Mark geprägt, oder auf Eine feine Köllnische Mark gerechnet werden: a) 20 fl. Konvenzionsmünze; b) 24·3275 fl. Amsterdamer Courant; c) 14 Thaler Preußisch; d) 102·8 Reales de plata, Kadix; e) 51·933789 Francs; f) 27·625 Hamburger ℳ︎ß Banko; g) 42½ ß oder 2⅛ ℔ Sterling; so wird gefragt, was jede genannte Einheit für einen Werth in Silbermünze, und welchen in Francs d'argent hat?

Da bei allen diesen Geldsorten das Gewicht von Einer Köllnischen Mark fein Silber zum Grunde liegt, so sind auch alle diese Beträge in den verschiedensten Münzgattungen ausgedrückt, einander gleich, oder sie sind al pari.

Es gelten sonach folgende Proporzionen:

Amst. fl.	fl. K. M.	Amst. fl.	fl. K. M.	Amst. fl.	Francs	Amst. fl.	Frcs.
24·3275 :	**20 =**	**1 :**	b	**24·3275 :**	**51·933789 =**	**1 :**	b.

b) Es ist daher Ein Amsterdamer fl. = **49·327** Kr. K. M. = **2** Francs **13·478** Centimes.

Preuß. Thl.	fl. KM.	Thal.	fl. KM.	Preuß. Thl.	Francs	Preuß. Thl.	Fr.
14 :	**20 =**	**1 :**	c	**14 :**	**51·933789 =**	**1 :**	c.

c) Es ist daher Ein Preußischer Thaler = **1** fl. **25·71426** Kr. = **3** Francs **70·9556** Centimes.

Reales	fl. K. M.	Real	Kr.	Reales	Francs	Real	Centimes
102·8 :	**20 =**	**1 :**	d	**102·8 :**	**51·933789 =**	**1 :**	d.

d) Es ist daher Ein Real de plata = **11·643** Kr. = **50·51925** Centimes.

Francs	fl. K. M.	Francs	fl. KM.	fl. K. M.	Francs	fl. KM.	Francs
51·933789 :	**20 =**	**1 :**	e	**20 :**	**51·933789 =**	**1 :**	e

e) Es ist daher **1** Franc = **23·1** Kreuzer, und **1** fl. K. M. = **2·59668945** Francs = **2** Francs **59·668945** Centimes.

Hamb. Mk.	fl. KM.	Hamb. Mk.	Kr. KM.	Hamb. Mk.	Francs	Hamb. Mk.	Francs
27·625 .	**20 =**	**1 :**	f	**27·625 :**	**51·933789 =**	**1 :**	f

f) Es ist daher Eine Hamburger Mk. Banko = **43·44** Kr. Konv. Münze = **1** Franc **87·9956** Centimes.

£ Sterl.	fl. K. M.	℔ St.	fl. K. M.	£ Sterl.	Francs	℔ St.	Francs
42·5 :	**20 =**	**1 :**	g	**42·5 :**	**51·933789 =**	**1 :**	g

g) Es ist daher ein ℔ Sterling = **9** fl. **24·7** Kr. Konv. Mze. = **24** Francs **43·943** Centimes.

Ganz auf dieselbe Weise würde man auch das Verfahren einzuleiten haben, wenn der Preis von was immer für einer Münzeinheit in was immer für einer Münzgattung aufgestellt werden sollte.

§. 118. Beispiele über Silbermünzen nach ihrem Verhältnisse im Korn.

(4) Wie viel Thaler Wiener Konvenzionsmünze, den Thaler zu **1½** fl., kommen für **100** Amsterdamer Thaler, den Thaler zu **2½** fl. holländisch Courant?

Thaler K. M. ?	**100** Amsterdamer Thaler
1	**2½** fl. holländisch Courant
24·3275	**20** fl. Konv. Münze
1½	**1** Thaler Konv. Münze.

Antwort: **137·02** Thaler Wiener Konv. Münze.

(5) Wie viel Deniers oder Groot vlämisch (**40** Groot = **1** fl. Courant) in Amsterdam stehen mit **3** Francs al pari?

Groot ?	**3** Francs
51·933789	**24·3275** fl. holländisch Courant
1	**40** Groot vlämisch.

Antwort: **56·21** Groot.

(6) Wie viel Kreuzer Konvenzionsmünze kommen auf Eine lira austriaca, wenn 1 lira austr. = 3·897828 Denari im Korn hat, und aus Einer Wiener Mark fein Silber 24 fl. Konvenzionsmünze geprägt werden,

A wenn Eine Wiener Mark = 2·80644 Oncien wiegt,

B " " " " = 65536 Richtpfennige, und Ein Metrisches ℔ = 3 Mark 9 Loth 48 Richtpfennige wiegt?

A. Kr K. M. ?	1 lira austr.
1	3·897828 Den.
10	1 Grosso
10	1 Oncia
2·80644	1 Wien. Mark
1	24 fl. Konv. Mze.
1	60 Kr. Konv. Mze.
Antwort	20 Kr. Konv. Mze.

B. Kr. K. M. ?	1 lira austr.
1	3·897828 Den.
10	1 Grosso
10	1 Oncia
10	1 Metrisches ℔
1	3 Mk 9 *Lth.* 48 Richtpf.
65536	24 fl. Konv. Mze.
1	60 Kr.
Antwort	20 Kr.

(7) Wie viele Oesterreichische Liren werden aus der Köllnischen Mark fein Silber geprägt?

lire austr. ?	1 Kölln. Mk. fein Silb.
6	5 Wiener Mark
1	2·80644 Oncien
1	10 Grossi
1	10 Denari
3·897828	1 Lira austr.
Antwort	60 Stück.

lire austr. ?	1 Kölln. Mark fein
6	5 Wiener Mark
1	65535 Richtpfennige
233520	1 Metrisches ℔
1	10 Oncien
1	10 Grossi
1	10 Den.
3·897828	1 Lira
Antwort	60 Stück.

(8) Wie viele Oesterreichische Liren werden aus der Köllnischen Mark fein Silber geprägt, wenn 1 Kölln. Mark = 4866 } Holländische Asse wiegt?
" 1 Metrisches ℔ = 20812 }

Lire austr. ?	1 Kölln. Mark fein
1	4866 Holländische Asse
20812	1 Metrisches ℔
1	10 Oncien
1	10 Grossi
1	10 Denari
3·897	1 Lira austr.
Antwort	60 Stück.

Lire austr. ?	1 Kölln. Mark fein
6	5 Wiener Mark
1	2·80644 Oncien
1	100 Denari
3·897	1 Lira austr.
Antwort	60 Stück.

(9) Wenn Eine Lira austriaca 4·33092 Denari im Schrotte wiegt, wie viele Holländische Asse wiegt diese Lira, und wie viel Holländische Asse beträgt ihr Korn?

Holländ. Asse ?	1 Lira austr.
1	4·33092 Denari
10	1 Grosso
10	1 Oncia
10	1 Metrisches ℔
1	20812 Holländ. Asse.
Antwort	90·375 Holländ. Asse im Schrott.

90·375 × 0·9

81·3375 Holländ. Asse im Korn,
also 9·0375 " " der Zusatz.

(10) Wenn die Oesterreichische Lira 9/10 fein ausgeprägt wird, wie viel Loth und Grain fein Silber enthält Eine Mark?

Antwort: **16×0·9**, oder **14** Loth **7**⅕ Grain.

§. **119.** Beispiele über Goldmünzen nach ihrem Verhältnisse im Korn.

Aus Einer Köllnischen Mark fein Gold werden geprägt:

a) Amsterdam .....**25·648** Ruyder b) Brabant.........**40·364** Souveraind'or (einfache) c) England.. ......**30·510** Guineen d) Frankreich........**20·310** 40 Franken-Stücke e) Deutschland ....**67·944** Stück Dukaten	Da alle diese Geldsorten dieselbe Quantität fein Gold enthalten, so sind sie dem inneren Werthe nach einander gleich.

(11) Welchen Werth hat jede der unter **a**, **b**, **c** und **d** angeführten Münzeinheiten in k. k. Dukaten?

a) **25·648** Ruyder : **67·944** # = **1** Ruyder : ? # Antwort: **2·64905** #
b) **40·364** Souvraid. : **67·944** # = **1** Souvraid. : ? # Antwort: **1·46545** #
c) **30·510** Guineen : **67·944** # = **1** Guinee : ? # Antwort: **2·22675** #
d) **20·310** 40 Fr.-St. : **67·944** # = **1** 40 Fr.-St. : ? # Antwort: **3·34539** #

Ganz auf dieselbe Weise würde man auch das Verfahren einzuleiten haben, wenn der Werth von was immer für einer Münzeinheit in was immer für einer andern Gattung bestimmt werden sollte.

(12) Wie viel Wiener Thaler in Gold kommen auf **100** Amsterdamer Thaler in Gold, wenn **1** # = **4**½ fl., und **1** Ruyder **14** fl. Holländisch Courant, wenn ferner der Wiener Thaler zu **1**½ fl. und der Amsterdamer Thaler zu **2**½ fl. Holländisch Courant gerechnet wird?

Wiener Thaler ?	**100** Amst. Thal.	
1	**2**½ fl. Holländ. Cour.	
14	**1** Ruyder	Antwort: **141·915** Wiener Thaler.
25·648	**67·944** #	
1	**4**½ fl.	
1½	**1** Wiener Thaler.	

(13) Wenn das Oesterreichische **40** Liren-Stück **11·332 Denari** Gold im Schrotte, **10·1988 Denari** Gold im Korn enthält, und aus Einer Köllnischen Mark fein Gold **67·944** # à **4**½ fl. geprägt werden; wenn ferner **29** Metrische ℔ **124** Köllnische Mark geben: Wie viel Gulden in Gold ist das Oesterreichische **40** Liren-Stück werth?

In Gold fl. ?	**1** Stück à **40 Lire**	
1	**10·1988 Denari**	
10	**1 Grosso**	
10	**1 Oncia**	Antwort: **13** fl. **20** Kr. in Gold.
10	**1** Metrisches ℔	
29	**124** Köllnische Mark	
1	**67·944** #	
1	**4**½ fl. in Gold.	

(14) Wenn das Oesterreichische **40** Liren Stück **10·1988** Denari Gold im Korne enthält, aus der Wiener Mark fein Gold **81·533** Stück # à **4**½ fl. geprägt werden, und **87** Metrische ℔ **310** Wiener Mark geben; wie viele Gulden in Gold ist dieses **40** Liren Stück werth?

fl. in Gold ?	1 St. à 40 Lire	
1	10·1988 Denari	
1000	1 Metrisches ℔	Antwort: **13** fl. **20** Kr. in Gold.
87	310 Wiener Mark	
1	81·533 #	
1	4½ fl. in Gold.	

(15) Wie viele Oesterreichische **40** Liren Stücke werden aus der Köllnischen feinen Mark geprägt?

Stücke ?	1 Kölln. Mark fein Gold, oder:
124	29 Metrische ℔
1	1000 Denari
10·1988	1 Stück.

Antwort: **22·931** Stücke.

St. ?	1 Kölln. Mk. fein Gold
6	5 Wiener Mark
1	2·80664 Oncien
1	100 Denari
10·1988	1 Stück

Antwort: **22·931** Stück.

§. 120. Beispiele von Silbermünzen nach ihrem absoluten Gewichte. (Nach ihrem Schrotte.)

(16) Wenn aus der rauhen Köllnischen Mark **13** Loth **6** Gran fein, $8\frac{1}{3}$ Stück Species Thaler à **2** fl. ausgeprägt werden, so frägt sichs:

a) Wie viele Species Thaler werden aus der Köllnischen Mark fein Silber ausgeprägt?

b) Wie viele Holländische Asse enthält Ein Species Thaler
 α) im Schrotte
 β) im Korn
 γ) im Zusatze
 } wenn man zur Bequemlichkeit der Rechnung die Mark = **4864** Holländische Asse annimmt?

c) Wie viel Gulden nach dem Konvenzionsfuße werden aus der rauhen Köllnischen Mark geprägt?

d) Wie viel Gulden nach dem Konvenzionsfuße werden aus der feinen Köllnischen Mark geprägt?

e) Wie viele Holländische Asse enthält Ein Gulden
 α) im Schrotte
 β) im Korne
 γ) im Zusatze?

Wegen a) $13\frac{1}{3} : 16 = 8\frac{1}{3} : ?$ Antwort: **10** Stück Species Thaler.

Wegen b) α) $4864 : 8\frac{1}{3} = 583·68$ Holländische Asse,
 β) $4864 : 10 = 486·40$ „ „
 also γ) $97·28$ „ „

Wegen c) $8\frac{1}{3} \times 2$. Antwort: $16\frac{2}{3}$ fl.

Wegen d) $13\frac{1}{3} : 16 = 16\frac{2}{3} : ?$ Antw.: **20** fl. K.M. aus der feinen Kölln. Mk.

Wegen e) α) $4864 : 16\frac{2}{3} = 291·84$ Holländische Asse,
 β) $4864 : 20 = 243·20$ „ „
 γ) $= 48·64$ „ „

(17) Die Oesterreichische **Lira** hat im Schrotte **4 Denari 3 Grani** und $30\frac{25}{27}$ Hunderttheile eines Grans, oder **4·330927 Denari** Metrisches Gewicht, und wird $\frac{9}{10}$ fein ausgeprägt, es frägt sich:

a) Wie viel Kreuzer Konvenzionsmünze ist Eine **Lira** werth, wenn aus der Köllnischen Mark 13 Loth 6 Gran fein, 16⅔ fl. geprägt werden, und das Korn im Gulden $\frac{4867}{20} = 243{\cdot}35$ Holländische Asse ist?

b) Wie viele **Lire austriache** werden aus der Köllnischen Mark fein Silber geprägt, oder was dasselbe ist: Wie viele **Lire austriache** enthalten Eine feine Köllnische Mark?

Wegen a) Kr. Konv. Mze. ?	1 Lira austr.
1	4·330927 Denari
10	9 Denari fein
10	1 Grosso
10	1 Oncia
10	1 Metrisches ℔
1	3 Mark 9 Loth 48 Richtpf. Wien. Gewicht
65536	1 Wiener Mark
5	6 Köllnische Mark
1	16 Loth fein
13⅓	16⅔ fl.
1	60 Kreuzer.
Antwort	20 Kreuzer Konv. Mze.;

oder Kr. Konv. Mze. ?	1 Lira austr.
1	4·330927 Denari
10	9 Denari fein
100	1 Oncia
2·80644	1 Wiener Mark
5	6 Köllnische Mark
1	16 Loth fein
13⅓	16⅔ fl. Konv. Mze.
1	60 Kreuzer
Antwort	20 Kreuzer Konv. Mze.

Wegen b) Lire austr. ?	1 feine Köllnische Mark
1	16 Loth
13⅓	16⅔ fl. Konv. Mze.
1	243·35 Holländische Asse im Korn
20812	1 Metrisches ℔
1	1000 Denari fein
9	10 Denari rauh
4·330927	1 Lira austriaca
Antwort	60 Lire austriache;

oder Lire austr. ?	1 feine Köllnische Mark
6	5 Wiener Mark
1	65536 Richtpfennige
233520	1 Metrisches ℔
1	1000 Denari fein Silber
9	10 Denari rauh
4·330927	1 Lira austriaca
Antwort	60 Lire austriache.

(18) Wie viele Lire italiane gehen auf Eine feine Köllnische Mark, wenn 87 Lire italiane = 100 Lire austriache gerechnet werden?

Lire taliane ?	1 Köllnische Mark fein.
1	60 Lire austriache.
100	87 Lire italiane.

Antwort: 52⅕ Lire italiane.

(19) Wenn in Frankreich Ein Franc 5 Grammes wiegt, und $^{9}/_{10}$ fein ist (1000 Grammes = 1 Kilogramm = 1 Metrisches ℔), wenn ferner 29 Kilogrammes = 124 Köllnische Mark sind, und aus der rauhen Köllnischen Mark (fein 13 Loth 6 Gran) 16⅔ fl. geprägt werden, so ist die Frage: Mit wie vielen Kreuzern wird 1 Franc nach diesen Bedingungen al pari seyn?

Kreuzer ?	1 Franc
1	5 Grammes.
10	9 Grammes fein
10	1 Decagramme.
10	1 Hectogramme.
10	1 Kilogramme.
29	124 Köllnische Mark.
1	16 Loth.
13⅓	16⅔ fl.
1	60 Kreuzer.

Antwort: 1 Franc = 23·08 Kreuzer.

§. 121. Beispiele von Goldmünzen nach dem absoluten Gewichte. (Nach dem Schrotte.)

(20) Wenn aus der rauhen Köllnischen Mark 23 Karat 8 Gran fein 67 Stück Dukaten geprägt werden, so frägt sichs:

a) Wie viel Stück Dukaten werden aus der feinen Kölln. Mark geprägt?

b) Wie viele Holländische Asse hat der Dukaten

α) im Schrotte
β) im Korn
γ) im Zusatz? } die Köllnische Mark zu 4864 Holländische Asse gerechnet.

c) Wie viele Dukaten gehen auf Eine Wiener Mark?

a) 23⅔ : 24 = 67 : ? # Antwort: $67\frac{67}{71}$ = 67·9439.

b) wegen α) 4864 : 67 = 72·597 im Schrotte,
β) 4864 : $67\frac{67}{71}$ = 71·588 im Korn,
also γ) = 1·009 Zusatz.

c) 5 : 6 = 67 : ? #. Antwort: 80⅖ #.

(21) Das Oesterreichische 40 Liren Stück oder der Souvraind'or ist $^{9}/_{10}$ fein, und wiegt im Metrischen Gewichte 11 Denari 3·$32\frac{10}{146}$ Grani = 11·332068 Denari. Wenn nun aus der Köllnischen Mark 23⅔ karatigem Goldes 67 Dukaten geprägt werden, so entsteht die Frage: Wie viele Gulden im Golde dieses Münzstück werth ist?

fl. in Gold ?	1 Souvraind'or.
1	11·332068 Denari im Schrott.
10	9 Denari fein Gold.
1000	1 Metrisches ℔ fein.
1	233520 Richtpfennige.
65536	1 Wiener Mark.
5	6 Köllnische Mark.
1	24 Karat fein.
23⅔	67 #
1	4½ fl. in Gold.

Antwort: 13 fl. 20 Kr.

(22) Wie viele 40 Liren Stücke werden aus Einer Köllnischen Mark fein Gold geprägt, wenn aus der rauhen Mark $23\frac{2}{3}$ karatigen Goldes 67 Dukaten geprägt sind, und wenn 1 # 71·638 Holländische Asse im Korn hat?

1 Souvraind'or oder Ein 40 Liren Stück 11·332068 Den. von $\frac{9}{10}$ Feingehalt.

Stück Souvraind'or ?	1 feine Köllnische Mark.
1	24 Karat fein.
$23\frac{2}{3}$	67 #
1	71·638 Holländische Asse im Korn.
20812	1 Metrisches ℔
1	1000 Denari Korn.
9	10 Denari Schrott.
11·332068	1 Souvraind'or.

Antwort: 22·931 Stück.

(23) Wenn aus Einer feinen Köllnischen Mark Gold 22·931 Stück Souvraind'or geprägt werden, wie viele Stücke werden aus der rauhen Mark $\frac{9}{10}$ fein geprägt werden?

$$22·931 \times 0·9.$$

Antwort: 20·6379 Stücke.

(24) Wie viele Holländische Asse enthält 1 Souvraind'or

α) im Schrotte
β) im Korne
γ) im Zusatze
} wenn Eine Mark zu 4866 Holländischen Asse gerechnet wird?

α) 4866 : 20·6379 = 235·767 Holländische Asse,
β) 4866 : 22·931 = 212·202 " "
also γ) = 23·565 " "

(25) Wenn der Souvaind'or 212·202 Holländische Asse, der Dukaten 71·619 Holländische Asse im Korn enthalten, wie viele Gulden in Gold ist der Souvraind'or werth?

fl. in Gold ?	1 Souvraind'or.
1	212·262 Holländische Asse.
71·619	1 #
1	$4\frac{1}{2}$ fl. in Gold.

Antwort: 13 fl. 20 Kr.

(Beispiele mit Remedium.)

(26) In Frankreich werden aus dem Kilogramme (1000 Grammes) Gold $77\frac{1}{2}$ Stück à 40 Francs $\frac{9}{10}$ fein geprägt. Wenn nun Ein Gramme = 20·81 Holländische Asse, die Köllnische Mark 4864 Holländische Asse, das Remedium beim Golde am Gehalte 0·004 (nämlich 0·002 en dehors und 0·002 en dedans) und beim Gewichte 4 Grammes beim Kilogramme (nämlich wieder 0·002 en dehors, und 0·002 en dedans) gestattet ist, so frägt sichs:

Wie viele solche Frankenstücke auf Eine feine Köllnische Mark gehen?

40 Francs Stück ?	1 feine Köll. Mark.
1	4864 Holländ. Asse.
20·81	1 Gramme.
902	1000 Grammes.
1002	$77\frac{1}{2}$ Stück.

Antwort: 20·043 Stücke.

Sechster Abschnitt.

Von den Interessen-Rechnungen.

§. 122. Unter einem **Kapitale** versteht man einen, gewöhnlich in der Geldform sich darstellenden Gütervorrath, der entweder in eine Unternehmung verwendet, oder an einen Andern verliehen wird, in der Absicht, durch diese Anwendung den Betrag des Vorrathes zu vergrößern.

Die nutzbringende Verwendung eines Kapitals kann auf verschiedene Weise geschehen, z. B. zum Einkaufe von Waaren, wo der Mehrbetrag beim Verkaufe die Kapitalsvergrößerung bewirket; oder zum Ankaufe von Realitäten, wo durch deren Erträgnisse die Vergrößerung des Kapitales geschieht u. dgl. In den genannten Fällen werden außer der ursprünglichen Kapitalssumme jederzeit auch noch andere Ausgaben gemacht, als z. B. für Reisen, um Waaren einzukaufen oder zu verkaufen, Auslagen zur Erhaltung und Verwaltung der Realität, Auslagen zur Belohnung für verwendete Zeit und Mühe u. dgl.

Ein Kapital kann aber auch ohne weitere Auslage und Mühe dadurch verwendet werden, daß man eine Summe Geldes einer andern Person zu ihrem beliebigen Gebrauche überläßt, unter der Bedingung, **daß diese Person dafür etwas Bestimmtes wieder im Gelde entrichte.** Die Person, welche die Geldsumme überläßt, heißt **Kapitalist**, **Darleiher** oder **Kreditor**, jene aber, welche das Geld übernimmt, heißt **Schuldner**, **Borger** oder **Debitor**.

Gleich bei der Aufnahme der Kapitalssumme kommen der Geber und Nehmer mit einander überein, wie viel dieser für die jährliche Benützung von **100** Gulden an Jenen zu bezahlen hat. Dieser verabredete **Betrag für 100 fl. in Einem Jahre** heißt **Prozent** (%), und der für die ganze dargeliehene Kapitalssumme entfallende Betrag für eine bestimmte Zeit der Benützung die **Interessen**. Wenn man daher sagt, es hat Jemand sein Geld zu **5%**, **6%**, **7%** u. s. w. ausgeliehen oder aufgenommen, so heißt dieß, daß er für **100** fl. in Einem Jahre **5**, **6**, **7** u. s. w. Gulden empfängt oder bezahlt, überdieß aber noch den ganzen Betrag des dargeliehenen Kapitals zu fordern berechtiget oder zu bezahlen verpflichtet ist. Den letzteren Fall der Kapitalsverwendung berücksichtiget die **Interessen-Rechnung**. Diese muß daher zeigen, welche Interessen von einem gegebenen Kapitale zu den bedungenen Prozenten in einer gegebenen Zeit entfallen, und zugleich nachweisen, wie man jede von diesen vier zusammengehörigen Größen aus den drei übrigen gegebenen durch gehörige Zusammenstellung bestimmen kann.

Die Beantwortung der Frage, um wie viel sich ein Kapital nach den Bestimmungen der früher genannten Kapitalsbenützungsarten vergrößert, nämlich durch den Handel, durch den Ankauf von Realitäten u. dgl., ist theils mit der Beantwortung der Frage um die Interessen von einem Kapitale identisch, theils mit Nebenbedingungen dieser Frage gemischt, kann aber niemals zweifelhaft seyn, wenn man die vorkommenden Fragen für die Interessen-Rechnung in dem Sinne der letzten Aufgabe zu beantworten im Stande ist.

§. 123. Bei den Interessen-Rechnungen sind immer **vier Stücke** zu berücksichtigen, nämlich das **Kapital**, die **Prozente**, die **Zeit** und die **Interessen**.

Alle Aufgaben der Interessen-Rechnung können durch die zusammengesetzte Regel de Tri aufgelöset werden, nur ist hierbei zu bemerken, daß, nach der für die Prozente aufgestellten Erklärung, mittelst der gegebenen oder zu suchenden Prozente immer ein ganzer Bedingungssatz (§. 108) gegeben ist, wobei die Zahl für die Prozente als die mit den Interessen im andern Bedingungssatze gleichartige Größe erscheint. Z. B.

I. Wie viel Interessen erhält man von 5600 fl. zu 6% in 3 Jahren?

100 fl. Kap. 1 Jahr 6 fl. Int.
5600 " " 3 " ?

100 : 5600 = 6 : ?
1 : 3

Antwort: 1008 fl. Interessen.

II. Ein wie großes Kapital muß zu 5% durch 4 Jahre liegen bleiben, um 1600 fl. Interessen zu erhalten?

100 fl. Kap. 1 Jahr 5 fl. Int.
? " 4 " 1600

4 : 1 = 100 : ?
5 : 1600

Antwort: 8000 fl. Kapital.

III. Wie viel Jahre muß ein Kapital von 5400 fl. zu 6¼% anliegen, um 2700 fl. Interessen zu geben?

100 fl. Kap. 1 Jahr 6¼ fl. Int.
5400 " ? 2700 "

5400 : 100 = 1 : ?
6¼ : 2700

Antwort: 8 Jahre.

IV. Zu wie viel % hat sich ein Kapital von 3600 fl. verinteressirt, wenn man dafür nach 4½ Jahr 972 fl. Interessen erhält?

100 fl. Kap. 1 Jahr ? Int.
3600 " 4½ " 972 fl. Int.

3600 : 100 = 972 : ?
4½ : 1

Antwort: Zu 6%.

§. 124. Eine viel einfachere Methode zur Auflösung der Aufgaben, welche zur Interessen-Rechnung gehören, ergibt sich aus der Auflösung folgender Aufgabe:

Wie viel Interessen erhält man für K fl. Kapital, welches zu P Prozente während der Zeit Z Jahre angelegt ist?

100 fl. K. 1 J. P fl. Int. | 100 : K = P : x | 100 x = KPZ.
K Z x fl. Int. | 1 : Z |

Da x die Interessen angibt, so zeigt sich: **Es sind jedesmal die hundertfachen Interessen gleich dem Produkte aus dem Kapitale mit den Prozenten und den Jahren**, oder es ist

$$100\ J. = K.P.Z.$$

Löset man diese Gleichung für jede in derselben vorkommende Größe auf, so erhält man:

$$J. = \frac{K.P.Z.}{100};\ K = \frac{100\ J}{P.Z.};\ P = \frac{100\ J}{K.Z.};\ Z = \frac{100\ J}{K.P.}.$$

Werden die aufgefundenen Formeln in Worten ausgedrückt, so erhält man für die Auflösung der Aufgaben bei der Interessen-Rechnung folgende Regeln des Verfahrens:

1. Man findet die **Interessen**, wenn man das Produkt aus dem Kapitale mit den Prozenten und den Jahren durch 100 dividirt.

2. Man findet das Kapital	wenn man die hundertfachen Interessen durch das Produkt der beiden andern Angaben dividirt.
3. „ „ die Prozente	
4. „ „ die Jahre	

§. 125. Sind die Interessen nicht nach Prozenten, sondern nach per mille zu bestimmen, d. h. wird nicht der von 100 fl. Kapital entfallende Zinsenbetrag zur Grundlage der Berechnung gewählt, sondern der Zinsenbetrag, welcher von 1000 fl. entfällt, so bleibt das Verfahren ganz dem vorigen gleich, nur muß man in allen Formeln statt der Zahl 100 die Zahl 1000 setzen.

§. 126. Wäre Z nicht in Jahren, sondern in Monaten oder Tagen gegeben, so würde man in dem Bedingungssatze für die Prozente statt 1 Jahr, der Angabe entsprechend, 12 Monate oder 360 Tage zu setzen haben; es müßten mithin bei Bestimmung der Interessen die Zahlen 12 oder 360 als Faktor im Nenner, bei Bestimmung aller übrigen Größen aber als Faktor im Zähler vorkommen; oder man müßte die gegebenen Monate oder Tage in einen Jahresbruch verwandeln, wo sodann diese Auflösezahlen wegfallen.

Anmerkung. Bei den gewöhnlichen Interessen-Rechnungen wird das Jahr nicht zu 365 oder 366 Tagen gerechnet, sondern es werden der bequemen Rechnung wegen 360 Tage für Ein Jahr genommen.

V. Wie viel Interessen erhält man für 2456 fl. 36 Kr. zu $5\frac{1}{2}$% in 3 Jahr, 8 Monaten und 25 Tagen?

100	$2456\frac{3}{5}$	oder: 100	$2456\frac{3}{5}$	oder: 100	$2456\frac{3}{5}$
360	$5\frac{1}{2}$	12	$5\frac{1}{2}$		$5\frac{1}{2}$
	3„8„25		$44\frac{5}{6}$		$3\frac{53}{72}$.

Antwort: 504 fl. $47\frac{997}{1200}$ Kreuzer.

VI. Ein wie großes Kapital muß man zu $4\frac{1}{2}$% durch 2 Jahr 9 Monate und 20 Tage angelegt lassen, um 1234 fl. 50 Kr. Interessen zu erhalten?

$4\frac{1}{2}$	$1234\frac{5}{6}$	oder: $4\frac{1}{2}$	$1234\frac{5}{6}$	oder: $4\frac{1}{2}$	$1234\frac{5}{6}$
2 J. 9 M. 20 T.	100	$33\frac{2}{3}$	100	$2\frac{29}{36}$	100
	360		12		

Antwort: 9780 fl. $51\frac{49}{101}$ Kreuzer.

VII. Zu wie viel Prozente verinteressirt sich ein Kapital von 8450 fl., welches in 1 Jahr 9 Monaten und 18 Tagen 988 fl. 39 Kr. Interessen gibt?

1 J. 9 M. 18 T.	$988\frac{13}{20}$	oder: 8450	$988\frac{13}{20}$	oder: 8450	$988\frac{13}{20}$
8450	100	$21\frac{3}{5}$	100	$1\frac{4}{5}$	100
	360		12		

Antwort: Zu $6\frac{1}{2}$%.

VIII. Wie viel Jahre muß ein Kapital von 9876 fl. 54 Kr. zu $5\frac{1}{2}$% anliegen, um 1234 fl. 45 Kr. Interessen zu geben?

$9876\frac{9}{10}$	$1234\frac{3}{4}$
$5\frac{1}{2}$	100

Antwort: 2 Jahr 3 Monat $8\frac{8986}{32923}$ Tage.

§. 127. Die Formel $J = \frac{K.P.Z.}{100}$ dient insbesondere auch noch dazu, um für einzelne Fälle kürzere Rechnungsmethoden aufzufinden. Setzt man $P = 5$, so wird $J = \frac{KZ}{20}$, und wird auch $Z = 1$ gesetzt, so ist

$J. = \frac{K}{20}$, d. h. man findet die Interessen zu 5% auf Ein Jahr, wenn man das Kapital durch 20 dividirt, und mithin die Interessen zu 5% auf ½ Jahr, wenn man das Kapital durch 40 dividirt.

IX. Wie viel Interessen zu 5% geben in Einem Jahre

8760 fl. K.	98765 fl. K.	7653 fl. 40 Kr.	6573 fl. 36 Kr.
438 fl.,	4938 fl. 15 Kr.,	382 fl. 41 Kr.,	328 fl. $40\frac{1}{5}$ Kr.

X. Wie viel Interessen zu 5% geben in ½ Jahr

9880 fl. K.	87654 fl. K.	30614 fl. 40 Kr.	9876 fl. 45 Kr.
247 fl.,	2191 fl. 21 Kr.,	765 fl. 22 Kr.,	246 fl. $55\frac{1}{8}$ Kr.

Setzt man in der allgemeinen Form $J = \frac{K P Z}{100}$, $P = 5$, und ferner $Z = 2$, $Z = 2\frac{1}{2}$, $Z = 3\frac{1}{3}$, $Z = 4$, $Z = 5$ u. s. w., so wird $J. = \frac{K}{10}$, $J. = \frac{K}{8}$, $J. = \frac{K}{6}$, $J. = \frac{K}{5}$, $J. = \frac{K}{4}$ u. s. w., welche Formeln in Worten ausgedrückt sehr kurze Verfahrungsweisen angeben, um die 5prozentigen Interessen für 2, 2½, 3⅓, 4, 5 u. s. w. Jahre aufzufinden.

Setzt man blos $Z = 1$, so wird $J = \frac{K P}{100}$, woraus folgt: Man findet die Einjährigen Interessen von jedem Kapitale zu jeder beliebigen Anzahl Prozente, wenn man das Kapital mit den Prozenten multiplizirt und das Produkt mit 100 dividirt.

XI. Wie viel Interessen erhält man in Einem Jahre von

9876 fl. K. à 7%;	von 8765 fl. 45 Kr. à 8%;	von 7654 fl. 54 Kr. à 9%
691·32	701·26 „ — „	688·941
691 fl. 19⅕ Kr.	701 fl. 15⅗ Kr.	688 fl. $56\frac{23}{50}$ Kr.

§. 128. Hat man die Einjährigen Interessen zu irgend einer Anzahl von Prozenten schon gefunden, so lassen sich hieraus durch die wälsche Praktik die Interessen zu einer jeden andern Anzahl von Prozenten berechnen. Werden die Interessen für mehr Prozente, als wofür sie schon berechnet sind, verlangt, so zerlege man diese mehreren Prozente in vielfache und aliquote Theile von den schon berechneten, und nehme von den schon gefundenen Interessen die eben so großen vielfachen und aliquoten Theile. Die Summe aus diesen ist das Verlangte. Werden die Interessen für weniger Prozente verlangt, so zerlege man diese wenigeren in aliquote Theile von den schon berechneten, die Summe der diesen Theilen entsprechenden Interessen ist das Verlangte. Fehlt aber den neuen Prozenten nur ein aliquoter Theil von den schon berechneten, so suche man den Interessenbetrag für diesen aliquoten Theil, und ziehe ihn von den schon bekannten Interessen ab.

XII. Wie viel Interessen erhält man in Einem Jahre von 11845 fl. 40 Kr. bei einer Verzinsung zu

$6\frac{1}{4}$ %.

11845 fl. 40 Kr.

zu 5 %	592 fl.	17 Kr.
" $1\frac{1}{4}$ %	148 "	$4\frac{1}{4}$
" $6\frac{1}{4}$ %	740 "	$21\frac{1}{4}$.

$7\frac{1}{2}$ %.

11845 fl. 40 Kr.

zu 5 %	592 fl.	17 Kr.
" $2\frac{1}{2}$ %	296 "	$8\frac{1}{2}$
" $7\frac{1}{2}$ %	888 "	$25\frac{1}{2}$.

$12\frac{7}{8}$ %.

11845 fl. 40 Kr.

zu 5 %	592 fl.	17 Kr.
zu 10 %	1184 "	34
" $2\frac{1}{2}$ %	296 "	$8\frac{1}{2}$
" $\frac{1}{4}$ %	29 "	$36\frac{17}{20}$
" $\frac{1}{8}$ %	14 "	$48\frac{17}{40}$.
Zu $12\frac{7}{8}$ %	1525 fl.	$7\frac{31}{40}$ Kr.

$4\frac{1}{2}$ %.

11845 fl. 40 Kr.

zu 5 %	592 fl.	17 Kr.
" $\frac{1}{2}$ %	59 "	$13\frac{7}{10}$
" $4\frac{1}{2}$ %	533 "	$3\frac{3}{10}$

$3\frac{2}{3}$ %.

11845 fl. 40 Kr.

zu 5 %	592 fl.	17 Kr.
" 1 %	118 "	27·4
" 2 %	236 "	54·8
" $\frac{2}{3}$ %	78 "	58·26
zu $3\frac{2}{3}$ %	434 "	20·46.

$1\frac{1}{2}$ %.

11845 fl. 40 Kr.

zu 5 %	592 fl.	17 Kr.
" 1 %	118 "	$27\frac{2}{5}$
" $\frac{1}{2}$ %	59 "	$13\frac{7}{10}$
zu $1\frac{1}{2}$ %	177 "	$41\frac{1}{10}$.

§. 129. Sind nach gegebenen Bedingungen die Einjährigen Interessen aufgefunden, so lassen sich aus denselben die Interessen für was immer für eine andere beliebige Zeit mittelst der wälschen Praktik bestimmen. Für die ganzen Jahre multiplizire man die Einjährigen Interessen mit dieser Anzahl der Jahre. Die Monate zerlege man in aliquote Theile von Jahren, die Tage in aliquote Theile von Monaten, und bestimme sonach die diesen aliquoten Theilen entsprechenden Interessenbeträge. Die Summe daraus ist das Verlangte.

XIII. Wie viel Interessen erhält man von einem Kapitale, wenn dieses in Einem Jahre 579 fl. 42 Kr. trägt,

in 2 Jahren 10 Mon. u. 20 Tagen?

in 1 Jahr . . .	579 fl.	42 Kr.	
in 2 Jahren .	fl.	1159 "	24
in 8 Mon. .	fl.	386 "	28
in 2 " .	fl.	96 "	37
in 20 Tagen .	fl.	32 "	$12\frac{1}{3}$
2 J. 10 M. 20 T.	fl.	1674 "	$41\frac{1}{3}$.

in 5 Jahren 11 Mon. u. 19 Tagen?

in 1 Jahr . . .	579 fl.	42 Kr.	
in 5 Jahren .	fl.	2898 "	30
in 10 Mon. .	fl.	483 "	5
in 1 " .	fl.	48 "	18·5
in 15 Tagen .	fl.	24 "	9·25
in 3 " .	fl.	4 "	49·85
in 1 " .	fl.	1 "	36·616
5 J. 11 M. 19 T.	fl.	3460 "	29·216.

in 8 Jahren 7 Mon. u. 26 Tagen?

in 1 Jahr . . .	579 fl.	42 Kr.	
in 8 Jahren .	fl.	4637 "	36
in 6 Monat. .	fl.	289 "	51
in 1 " .	fl.	48 "	18·5
in 15 Tagen .	fl.	24 "	9·25
in 10 " .	fl.	16 "	6·166
in 1 " .	fl.	1 "	36·616
8 J. 7 M. 26 T.	fl.	5017 "	37·533.

§. **130.** Die in den beiden zunächst vorhergehenden Paragraphen angegeben Auflösungsmethoden vereinigt, lehren die Berechnung der Interessen nach was immer für Bedingungen durch die wälsche Praktik.

XIV. Wie viel Interessen erhält man von **5894** fl. **48** Kr. zu **6¾ %** in **3** J. **8** M. **21** T.?

	fl.	5894·8
zu 6 %	fl.	353·688
zu ¾ %	fl.	44·211
in Einem Jahre . .	fl.	397·899
in 3 Jahren . .	fl.	1193·697
in 6 Monaten . .	fl.	198·9495
in 2 „ . .	fl.	66·3165
in 15 Tagen . .	fl.	16·5791
in 6 „ . .	fl.	6·6317
	fl.	1482·1738

Antwort: **1482** fl. **10** Kr.

XV. Wie viel Interessen erhält man von **9726** fl. **45** Kr. zu **5⅝ %** in **2** J. **7** M. **23** T.?

		9726 fl. 45 Kr.
zu 5 %	fl.	486„20·25
zu ⅝ %	fl.	60„47·53
in Einem Jahre .	fl.	547„ 7·78
in 2 Jahren . .	fl.	1094„15·56
in 6 Mon. . . .	fl.	273„33·89
in 1 „ . . .	fl.	45„35·65
in 10 Tagen . .	fl.	15„11·88
in 10 „ . .	fl.	15„11·88
in 3 „ . .	fl.	4„33·57
	fl.	1448„22·43

Antwort: **1448** fl. **22·43** Kr.

Anmerkung. Die Vergleichung dieser Resultate, welche bei der Annahme, daß das Jahr nur zu 360 Tagen gerechnet wird, aufgestellt worden sind, mit den richtigeren Resultaten, die man erhält, wenn man das Jahr wirklich zu 365, und respective zu 366 Tagen rechnet, wie dieß insbesondere in England durchgehends der Fall ist, bleibt dem mündlichen Vortrage überlassen. Eben so wird der mündliche Vortrag jene Berechnungen umfassen, nach welchen die Interessen nicht nach Prozenten per anno, sondern nach Prozenten per mese, oder per settimana zu berechnen kommen.

§. **131.** Die Interessen-Rechnungen werden von den praktischen Rechnern (insbesondere dann, wenn die Zeit kurz, vielleicht nur in Tagen angegeben ist) dadurch aufgelöset, daß man sich vorläufig die dieser Zeit entsprechenden Interessen zu **6 %** bestimmt, und die Interessen zu andern Prozenten aus diesen durch die wälsche Praktik ableitet.

Setzt man in der allgemeinen Formel $J = \frac{KPZ}{100}$, daß die Zeit in Tagen (T) gegeben, und $P = 6$ ist, so erhält man $J = \frac{K.6.T}{100.360} = \frac{K.T}{100.60}$.

Hieraus ergibt sich, daß man die 6perzentigen Interessen für irgend eine Anzahl Tage auffindet, wenn man das Kapital mit der Anzahl Tage multiplizirt, und das Produkt mit **100** und mit **60** dividirt; oder daß das Produkt aus dem Kapitale mit den Tagen, durch **100** dividirt, die verlangten Interessen in der Benennung Kreuzer angibt, die noch ferner in Gulden zu verwandeln sind.

Bei mehr oder weniger als **6 %** ist es meistens bequemer, die für die 6perzentigen Interessen aufgefundenen Kreuzer nicht sogleich in Gulden zu verwandeln, sondern auch diese in Kreuzern zu bestimmen, und erst aus dem Endresultate die in demselben enthaltene Anzahl von Gulden abzuleiten.

Wie viel Interessen zu **6 %** erhält man

XVI. von fl. **24827„45** in **12** Tagen?

Kr. 2979·33

fl. 49„39·33

XVII. von fl. **4897„48** in **97** Tagen?

800

Kr. 4750·866

fl. 79„10·866.

XVIII. Wie viele Interessen erhält man von 6984 fl. 22½ Kr. zu 7½ % in 75 Tagen?

```
        fl. 6984·375×75
            1746·09375
6 %  Kr.    5238·28125
1½ %        1309·57031
7½ %        6547·85156
        fl. 109„7·85156
```

XIX. Wie viel von 12873 fl. 24 Kr. zu 5½ % in 103 Tagen?

```
         fl. 12873·4×103
6 %  Kr.     13259·602
½ %           1104·967
5½ %         12154·635
         fl. 202„34·635.
```

§. 132. Sind weder das Kapital noch die Interessen einzeln gegeben, sondern blos die Summe aus beiden, woraus sie einzeln bestimmt werden sollen, so geschieht dieß durch die Regel de Tri; man darf nämlich nur der Natur der Aufgabe gemäß, in das erste Glied die Summe von 100 fl. und die für die gegebene Zeit davon entfallenden Zinsen, ferner in ein mittleres Glied, je nachdem man das Kapital oder die Interessen entwickeln will, die Zahl 100, oder die davon entfallenden Zinsen setzen. Das andere Mittelglied ist der angegebene zusammengesetzte Betrag.

XX. Jemand hat nach Verlauf Eines Jahres für sein zu 5½ % ausgeliehenes Kapital 9247 fl. 4½ Kr. an Kapital und Interessen zurückerhalten. Wie groß war das Kapital und was betragen die Interessen?

Zur Bestimmung des Kapitals.
$105\frac{1}{2} : 100 = 9247\frac{3}{40} : K.$
Antwort: 8765 fl. Kapital.

Zur Bestimmung der Interessen.
$105\frac{1}{2} : 5\frac{1}{2} = 9247\frac{3}{40} : J.$
Antwort: fl. 482„4½ Interessen.

XXI. Jemand hat ein zu 4¾ Prozent angelegtes Kapital durch 2½ Jahre liegen gelassen, und nach dieser Zeit 9397½ fl. zurückerhalten. Wie groß war das Kapital und was betrugen die Interessen?

Berechnet man vorläufig die Interessen für 100 fl. zu 4¾ Prozent in 2½ Jahr, so findet man hierfür 11⅞ fl. Demnach erhält man für die Berechnung

des Kapitals:
$111\frac{7}{8} : 100 = 9397\frac{1}{2} : K.$
Antwort: 8400 fl. Kapital.

der Interessen:
$111\frac{7}{8} : 11\frac{7}{8} = 9397\frac{1}{2} : J.$
Antwort: 997½ fl. Interessen.

XXII. Ein Kapital ist zu 5½ Prozent in 10 Monaten zu 6275 fl. angewachsen. Wie groß ist hiervon der Kapitals- und wie groß der Interessenbetrag?

Die Interessen zu 5½ % in 10 Monaten von 100 fl. Kapital betragen 4 7/12 fl., daher

$104\frac{7}{12} : 100 = 6275 : K.$
Antwort: 6000 fl. Kapital.

$104\frac{7}{12} : 4\frac{7}{12} = 6275 : J.$
Antwort: 275 fl. Interessen.

§. 133. Sehr oft kommen Aufgaben vor, welche zwei verschiedene Kapitalsfälle in sich begreifen, die aber dadurch mit einander verbunden sind, daß von den vier bei jeder einzelnen Aufgabe vorkommenden Bedingungen K, P, Z, J Eine oder zwei in beiden Fällen gleich sind, mithin in der Angabe gar nicht erscheinen. Ist bei zwei auf diese Weise vereinigten Kapitalsfällen (a) nur Eine Bedingung gleich, so wird die Auflösung dieser Aufgaben

durch die zusammengesetzte Regel de Tri möglich; sind aber (b) zwei Bedingungen gleich, so können Aufgaben dieser Art durch die einfache Regel de Tri aufgelöset werden.

Alle hierher gehörigen Aufgaben können zwar auch mittelst der gewöhnlichen Interessenrechnung gelöset werden, jedoch ist dieser Weg immer viel weitläufiger, als wenn man sie durch die Regel de Tri löset. Um die unten (a) begriffenen Aufgaben durch die Interessenrechnung zu lösen, bestimme man in dem Kapitalsfalle, der die eigentlich in der Frage stehende Unbekannte nicht enthält, d. i. im bekannten Falle, das nicht Gegebene oder das, was auch dem andern Kapitalsfalle gemeinsam ist, und setze dieses Resultat als eine Angabe in den andern Kapitalsfall, wodurch man alle erforderlichen Angaben haben wird, um die eigentlich in der Frage stehende Unbekannte zu bestimmen.

Um die unter (b) vorkommenden Aufgaben durch die Interessenrechnung zu lösen, darf man nur, weil zwei Bedingungen gleich sind, die Eine davon beliebig annehmen, und aus der Aufgabe des bekannten Falles mittelst der beliebig angenommenen Größe die zweite Bedingungsgröße durch Rechnung bestimmen. Die beliebig angenommene Größe sammt dem erwähnten Resultate, verbunden mit der noch vorhandenen Angabe des unbekannten Falles sind geeignet, um dann die eigentlich in der Frage stehende Größe gehörig auszumitteln.

XXIII. Ein wie großes Kapital muß man zu $5\frac{1}{2}$ Prozent durch 3 Jahre liegen lassen, um eben so viel Interessen zu erhalten, als 5500 fl. Kapital zu 6 Prozente in 2 Jahren geben?

? fl. K.	$5\frac{1}{2}$ %	3 J.	Antwort: 4000 fl. Kapital.
5500 "	6 "	2 "	

Um diese Aufgabe durch die Interessenrechnung zu lösen, löse man zuerst die Aufgabe auf: Wie viele Interessen erhält man von 5500 fl. Kapital zu 6 % in 2 Jahren? (Antwort: 660 fl.); ferner die Aufgabe: Wie groß muß ein Kapital seyn, welches zu $5\frac{1}{2}$ % angelegt, in 3 Jahren 660 fl. Interessen gibt? Antwort: 4000 fl.

XXIV. Wie viel Interessen erhält man zu $5\frac{3}{4}$ % in 4 Jahren und 4 Monaten von demselben Kapitale, welches zu $6\frac{1}{4}$ % in $3\frac{1}{2}$ Jahr $1640\frac{5}{8}$ fl. Interessen gibt?

? Int.	$5\frac{3}{4}$ %	$4\frac{1}{3}$ J.	Antwort: $1868\frac{3}{4}$ fl. Interessen.
$1640\frac{5}{8}$	$6\frac{1}{4}$ "	$3\frac{1}{2}$ "	

Oder man löse erstlich die Aufgabe auf: Ein wie großes Kapital gibt zu $6\frac{1}{4}$ Prozent in $3\frac{1}{2}$ Jahren $1640\frac{5}{8}$ fl. Interessen? (Antwort: 7500 fl.); dann die Aufgabe: Wie viel betragen die Interessen von 7500 fl. Kapital zu $5\frac{3}{4}$ Prozent in 4 Jahren und 4 Monaten? Antwort: $1868\frac{3}{4}$ fl.

XXV. Wie viel Interessen erhält man für 5400 fl. Kapital nach denselben Bedingungen, nach welchen 2400 fl. Kapital 720 fl. Interessen geben? (Für diesen Fall sind die Prozente und die Zeit die für beide Kapitalsfälle gemeinsamen Bedingungen.)

2400 fl. Kap.	720 fl. Int.	Antwort: 1620 fl. Interessen.
5400 "	? Int.	

Um diese Aufgabe durch die Interessenberechnung zu lösen, nehme man Eine von den zwei gemeinsamen Bedingungen, nämlich entweder die Prozente

oder die Zeit willkürlich an, z. B. 6 %, und bestimme aus dem bekannten Falle die andere gemeinsame Bedingung, hier also die Zeit, oder man löse die Aufgabe auf: Wie lange muß ein Kapital von **2400** fl. zu **6** % anliegen, um **720** fl. Interessen zu geben? (Antwort: **5** Jahre); dann löse man die weitere Aufgabe auf: Wie viel Interessen erhält man von **5400** fl. Kapital zu **6** % in **5** Jahren? Antwort: **1620** fl. Interesse.

Auf dasselbe Endresultat muß man aber auch gelangen, wenn man die Zeit willkürlich annimmt, z. B. **3** Jahre **9** Monate, und aus dem bekannten Falle die Prozente berechnet, oder die Aufgabe auflöset: Zu wie viel Prozente verinteressirt sich ein Kapital von **2400** fl., welches in $3^3/_4$ Jahren **720** fl. Interessen gibt? (Antwort: zu **8** Prozent); ferner löse man die Aufgabe auf: Wie viel Interessen erhält man von **5400** fl. Kapital zu **8** % in $3^3/_4$ Jahren? Antwort: **1620** fl.

XXVI. Ein wie großes Kapital muß man zu $4^1/_2$ % anlegen, um eben so viel Interessen zu erhalten, als man von **3600** fl. Kapital zu $5^1/_2$ % in derselben Zeit erhalten hat?

? fl. Kap. $4^1/_2$ %
3600 „ $5^1/_2$ % } Antwort: **4400** fl. Kapital.

Auflösung durch die Interessenrechnung: Man wähle von den zwei gemeinsamen Bedingungen die Eine willkürlich. Man nehme z. B. die Zeit gleich **6** Jahre, und löse die Aufgabe auf: Wie viele Interessen geben **3600** fl. zu $5^1/_2$ % in **6** Jahren? (Antwort: **1188** fl.); ferner löse man die Aufgabe auf: Ein wie großes Kapital gibt zu $4^1/_2$ % in **6** Jahren **1188** fl. Interessen? Antwort: **4400** fl. Kapital.

§. **134.** Bisweilen ereignet sich der Fall, daß die Unbekannte in **2** Gliedern einer Proporzion vorkommt. Für diesen Fall kann die Auflösung durch eine passende Zusammenstellung der Proporzionsglieder bewerkstelliget werden.

XXVII. Jemand verkauft Ein Pfund von einer Waare um **32** Groschen theurer als er es einkaufte, und gewinnt dabei **20** Prozent. Wie theuer hat er Ein ℔ eingekauft, wie theuer verkauft?

$$120 : (32+x) = 100 : x.$$
$$120 : 100 = (32+x) : x$$
$$(120-100) : 100 = (32+x-x) : x$$
$$20 : 100 = 32 : x.$$
$$x = 160 \text{ Groschen} = 8 \text{ fl.}$$

Es wird Ein ℔ um **8** fl. eingekauft, folglich um **9** fl. **36** Kr. verkauft. Auch geben **8** fl. Kapital zu **20** % wirklich **1** fl. **36** Kr. Interessen.

XXVIII. Jemand verkauft eine Waare mit **20** % Verlust, und muß auf diese Weise den Zenten um **35** fl. wohlfeiler geben, als er ihn eingekauft hat. Wie theuer hat er einen Zenten eingekauft und wie theuer verkauft?

Wird Ein Zenten um x fl. eingekauft, so wird er um x—**35** fl. verkauft, und **100** fl. Einkaufsgeld geben **80** fl. Verkaufsgeld. Hieraus folgt:

$$100 : x = 80 : (x-35)$$
$$100 : 80 = x : (x-35)$$
$$(100-80) : 100 = (x-x+35) : x$$
$$1 : 5 = 35 : x$$
$$x = 175.$$

Ein Zenten wurde um **175** fl. eingekauft, folglich um **140** fl. verkauft.

§. **135.** Gemischte Beispiele besonders in Bezug auf das Taxwesen:

XXIX. Ein mit **1000** fl. Gehalt angestellter Beamter geht auf **8** Monate auf Urlaub; was beträgt die **10**prozentige Urlaubstaxe, wenn die sechswochentliche freie Urlaubszeit in Abschlag gebracht wird?

Da **8** Monate zu **240** Tage gerechnet, und wegen **6** Wochen, welche frei sind, **42** Tage abgerechnet werden, so hat man die Aufgabe zu lösen: Was betragen die **10** Prozent Interessen in **198** (d. i. **240**—**42**) Tagen? Antwort **55** fl.

XXX. Ein mit **1000** fl. Gehalt angestellter Beamter geht auf Urlaub, und bezahlt die für die Urlaubzeit bemessene **10**perzentige Taxe mit Abschlag der **42** freien Tage mit **55** fl. Auf wie viel Monate war ihm der Urlaub bewilliget?

Hieraus folgt die vorläufige Aufgabe: Wie lange sind **1000** fl. zu **10** Prozent zu verinteressiren, um **55** fl. Interessen zu geben? Antwort: **198** Tage.

Werden hierzu die **42** freien Tage gerechnet, so erhält man als Antwort: **240** Tage oder **8** Monate.

XXXI. Ein mit **1000** fl. Gehalt angestellter Beamter geht **8** Monate auf Urlaub, und bezahlt mit Abschlag der **42** freien Tage, **55** fl. Urlaubstaxe. Zu wie viel Prozente wird die Urlaubstaxe berechnet?

Hieraus folgt die Aufgabe: Zu wie viel Prozente verinteressiren sich **1000** fl. Kapital, welche in **198** (d. i. **240**—**42**) Tagen **55** fl. Interessen geben? Antwort: Zu **10** Prozent.

XXXII. Was für einen Gehalt hat ein Beamter, der auf **8** Monate Urlaub nimmt, und dem mit Abschlag von **42** freien Tagen die Urlaubstaxe mit **55** fl. bemessen wird?

Hieraus folgt die Aufgabe: Welches Kapital gibt in **198** Tagen zu **10** Prozent gerechnet, **55** fl. Interessen? Antwort: **1000** fl.

XXXIII. Ein mit **400** fl. angestellter Beamter geht in seinen eigenen Angelegenheiten auf Urlaub, und bezahlt für die Dauer seines Urlaubs **30** fl. an Taxen. Wie lange war er auf Urlaub, wenn ihm die **42**tägige freie Urlaubszeit in Abschlag gebkacht wird? Antwort: **10** Monat **12** Tage.

XXXIV. Ein mit einem Gehalte von **1200** fl. angestellt gewesener Beamter ging vor mehreren Jahren auf Urlaub, und bezahlte für seine **5**monatliche Urlaubsdauer, von welcher zu Folge Hofdekrets eine gewisse Frist frei blieb, die Urlaubstaxe mit **36** fl. — In diesem Jahre ging er wieder auf Urlaub, und bezahlte, da er nunmehr in **1400** fl. vorgerückt ist, von seinem jetzigen Gehalte für die **2**monathliche Urlaubsdauer, von welcher dieselbe Frist taxfrei blieb, die Taxe mit **7** fl. Es frägt sich sonach um die Anzahl der freien Tage, und um die Prozente der Urlaubstaxe?

Läßt man die Anzahl der Prozente für die Urlaubstaxe, da diese in beiden Fällen dieselben sind, hinweg, und setzt die Anzahl der freien Tage gleich x, so kömmt die Aufgabe der zusammengesetzten Regel de Tri zu lösen:

1200 fl. in (**150**—x) Tagen, geben **36** fl. Tax,
1400 fl. in (**60** — x) Tagen, geben **7** fl. Tax.

Da die Unbekannte in beiden Fällen vorkommt, so ist es gleichgültig, welchen dieser beiden Fälle man als bekannt, welchen als den unbekannten

Fall annimmt. Wir wollen den unterhalb stehenden Fall als den unbekannten betrachten. Sonach erhalten wir in Folge der Regeln des Ansatzes bei der zusammengesetzten Regel de Tri (§. 108):

$$1400 : 1200 = (150-x) : (60-x)$$
$$36 : 7$$
$$36\times7 : 7\times6 = (150-x) : (60-x)$$
$$6 : 1 = (150-x) : (60-x)$$
$$(6-1) : 1 = (150-x-60+x) : (60-x)$$
$$5 : 1 = 90 : (60-x)$$
$$1 : 1 = 18 : (60-x);\ \text{alſo}\ 18 = 60-x;\ \text{alſo}\ x = 42.$$

Es beträgt daher die Anzahl der freien Tage 42.

Zur Beantwortung der zweiten Frage: Zu wie viel Prozenten die Urlaubstaxe berechnet wird, löse man die Aufgabe auf: zu wie viel Prozente verinteressiren sich 1200 fl., welche in 108 (d. i. 150—42) Tagen 36 fl. Interessen geben; oder aus dem andern Falle die Aufgabe: Zu wie viel Prozente verinteressiren sich 1400 fl., welche in 18 d. i. in (60—42) Tagen 7 fl. Interessen geben? — In beiden Fällen ist die Antwort: Zu 10 Prozent.

XXXV. Ein mit 700 fl. angestellt gewesener Beamter ging vor mehreren Jahren auf Urlaub, und bezahlte laut saldirter Taxnote die Urlaubstaxe mit 23 fl. 43⅓ Kr. Nach einiger Zeit ging er abermals in eigenen Angelegenheiten auf Urlaub, und bezahlte für dieselbe Urlaubsdauer, wie beim ersten Falle, die Taxe mit 30 fl. 30 Kr. Eine ämtliche Anfrage an das Taxamt macht es nöthig, den Gehalt zu wissen, von welchem Gehalte letztere Taxe bemessen wurde? Zugleich entsteht die Nebenfrage: Wie lange war die Urlaubsdauer?

Man löse die Aufgabe der einfachen Regel de Tri auf: Wenn von 700 fl. Gehalt die Taxe mit 23 fl. 43⅓ Kreuzer bemessen ist, von welchem Betrage wird die Taxe mit 30 fl. 30 Kr. bemessen seyn? Antwort: Von 900 fl. Gehalt.

Um die Nebenfrage zu beantworten, löse man entweder die Aufgabe auf: Wie viele Tage sind erforderlich, daß eine Summe von 700 fl. zu 10 Prozent 23 fl. 43⅓ Kr. Interessen gibt; oder daß eine Summe von 900 fl. zu eben so vielen Prozenten 30 fl. 30 Kr. Interessen gibt. — In beiden Fällen ist die Antwort: In 122 Tagen. Werden hierzu die 42 freien Tage gerechnet, so erhält man 164 Tage, oder 5 Monate und 14 Tage.

XXXVI. In einem Amte erhalten die Beamten desselben eine jährliche Remunerazion, und zwar: A. 400 fl., B. 350 fl., C. 300 fl., D. 250 fl., E. 200 fl., F. 100 fl., von welcher jeder die 5¼prozentigen Kameraltaxen so lange bezahlen muß, bis die Summe dieser Zahlungen die 25prozentige Karenztaxe erreicht. — Was betragen die Kameraltaxen für die einzelnen jährlich, was betragt die Karenztaxe, und wie lange muß die Kameraltaxe entrichtet werden, bis die Karenztaxe bezahlt ist?

F	100 fl.	Renumerazion	5¼ fl.	Kameraltaxe	25 fl.	Karenztaxe.
E	200 fl.	"	10½ fl.	"	50 fl.	"
D	250 fl.	"	13⅛ fl.	"	62½ fl.	"
C	300 fl.	"	15¾ fl.	"	75 fl.	"
B	350 fl.	"	18⅜ fl.	"	87½ fl.	"
A	400 fl.	"	21 fl.	"	100 fl.	"

Für jeden Fall ist die Kameraltaxe durch 4 Jahre vollständig, im fünften sind $\frac{16}{21}$ Theile derselben zu bezahlen, um die Karenztaxe vollständig zu machen.

XXXVII. Ein Amt erhält für seine **5** Beamten jährlich **2000** fl. Remunerazion, welche im Verhältnisse ihres Gehaltes so vertheilt werden, daß **A 600**, **B 500**, **C 400**, **D 300** und **E 200** fl. bekömmt. Was beträgt die $5\frac{1}{4}$prozentige Kameraltaxe eines Jeden?

Für A $= 31\frac{1}{2}$ fl., für B $= 26\frac{1}{4}$ fl., für C $= 21$ fl., für D $= 15\frac{3}{4}$ fl., für E $= 10\frac{1}{2}$ fl., also von allen zusammen: **105** fl. — Eben dieses Resultat erhält man aus **2000** fl. à $5\frac{1}{4}$ Prozent.

XXXVIII. Was beträgt das Mortuarium von **4567** fl. Mobilar-Vermögen, à $1\frac{2}{3}$ Prozent?

Antwort: **76** fl. **7** Kr.

XXXIX. Was beträgt das Mortuarium von **5678** fl. Real-Vermögen à **1** Prozent?

Antwort: **56** fl. **47** Kr.

XL. Was beträgt das Mortuarium von **6789** fl. Mobilar-, **7890** fl. Real-Vermögen, Ersteres zu $1\frac{2}{3}$, Letzteres zu **1** Prozent?

Antwort: **113** fl. **9** Kr. + **78** fl. **54** Kr., zusammen **192** fl. **3** Kr.

XLI. In einer Verlassenschaft finden sich folgende Activa vor:

A. Mobilar-Vermögen.

a) An baarem Gelde **1234** fl. Silberm. $=$ **1234** fl. — „

b) **825** k. k. Dukaten à **4** fl. **38** Kr...... $=$ **3822** fl. **30** Kr.

c) Preziosen im Schätzungspreise....... $=$ **2400** fl. — „

d) Möbeln ꝛc. im Schätzungspreise........ $=$ **1675** fl. — „

e) Ein Wechsel auf **3600** fl............. $=$ **3600** fl. — „

f) Eine 4perzent. Obligazion über **12000** fl. im Kurse zu $101\frac{5}{16}$ $=$ **12157** fl. **30** Kr.

g) **48** Zt. **75** ℔ Waaren à Zt. **124** fl. **36** Kr...... $=$ **6074** fl. **15** Kr.

B. Real-Vermögen.

a) Ein Stadthaus, geschätzt auf................**34500** fl. —

b) Ein Landhaus sammt Obst-, Wein- und Küchengarten auf...........**10750** fl. —

c) Ein intabulirter Haussatz mit....................**12850** fl. —

d) Ein radizirtes Gewerbe nach dem Einlagspreise auf................ **600** fl. —

Was beträgt das Mortuarium beim Mobilar-Vermögen zu $1\frac{2}{3}$ Prozent, beim Real-Vermögen zu **1** Prozent?

Antwort: Fürs Mobilar-Vermögen von **30963** fl. **15** Kr.....fl. **516**„ **3**
Fürs Real-Vermögen von......**58700** fl. — „ ....fl. **587**„—

Zusammen....fl. **1103**„ **3**

XLII. In einer Verlassenschaft finden sich vor:

A. Activ-Stand.

a) Mobilar-Vermögen.

An Waaren:

1. 7895½ ℔ à Zt. 135¾ fl. W. W.
2. 2740 ℔ à Zt. 218 Francs 60 Cent. pr. Fr. 23⅒ Kr.
3. 318 Bout. Wein à 48 Kr. Silberm.
4. Eine Quantität Wein verkaufbar, der Eimer zu 18 fl. Silberm., bei welcher der gerichtliche Zehent 21 Eimer betrug.
5. 17½ Zenten, einer um den Einkaufspreis geschätzten Waare, wovon 1 Zt. um 85 fl. 40 Kr. Silbermünze geschätzt war, und mit 20 Proz. Gewinn verkauft werden.
6. Möbeln im Schätzungspreise 897 fl. 24 Kr. Silbermünze.
7. Am barem Gelde 4218 fl. Silberm.
8. 218 St. # à 4 fl. 36 Kr.
9. Eine 4perzentige Obligazion über 8000 fl. im Kurse zu 101¼ Prozent.

b) Real-Vermögen.

1. Stadthaus im Schätzungswerthe 28700 fl. Silbermünze.
2. Eine Land-Realität sammt Grundstücken im Schätzungswerthe von 15800 fl. Silbermünze.
3. Ein grundbüchlich vorgemerkter Schuldschein über 8400 fl. Silbermünze.

B. Passiv-Stand.

1. Ein Wechsel über 10000 Fr. à 23⅒ Kr.
2. Eine Versicherung über empfangene 6000 fl. Silbermünze.
3. An mehreren kleinen Legaten..........9600 fl. "
4. Kranken- und Leichenkosten............1080 fl. "

Was beträgt die Mortuars-Taxe?

a) Mobilar-Vermögen.			b) Real-Vermögen.			Passiv-Stand.		
1. Silberm.	fl.	4287„15	1. Silberm.	fl.	28700	1. Silberm.	fl.	3850
2. "	fl.	2306„ 1	2. "	fl.	15800	2. "	fl.	6000
3. "	fl.	254„24	3. "	fl.	8400	3. "	fl.	9600
4. 189 Eim.	fl.	3402„—	Zusammen	fl.	52900	4. "	fl.	1080
5. Silberm.	fl.	1799„—				Zusammen	fl.	20530
6. u. 7.	fl.	5115„24						
8. "	fl.	1002„48						
9. "	fl.	8100„—						
Zusammen	fl.	26266„52						

Werden die Passiva vom Mobilar-Vermögen in Abschlag gebracht, so bleibt für letzteres fl. 5736„52, wovon die Mortuartaxe zu 1⅔% fl. 95„37 und für das Real-Vermögen zu 1% . . . . fl. 529„—

also zusammen fl. 624„37

beträgt.

XLIII. Was beträgt die 5¼perzentige Kameraltaxe für eine Witwe, deren Gatte mit **1000** fl. angestellt war, von welchem Gehalte ihr ⅓ Theil angewiesen wird?

Hieraus die Aufgabe: ? fl. Interessen geben 333⅓ fl. zu 5¼ Prozent. Antwort: **17** fl. **30** Kr.

XLIV. Eine Witwe erhält ⅓ Theil von dem Gehalte ihres verstorbenen Gatten als Pension, von welcher sie die 5¼perzentige Kameraltaxe mit **17** fl. **30** Kr. zu entrichten hat. In der Taxnote ist der Gehalt des Gatten nicht angegeben worden. Wie viel Gulden beträgt der Gehalt?

Gehalt fl. ?	17½ Pensionstaxe	Probe.
5¼	100 fl. Pension	⅓ von 1000 = 333 fl. 20 Kr.
1	3 fl. Gehalt	5¼ % von 333 fl. 20 Kr. = 17 fl. 30 Kr.

Antwort: **1000** fl. Gehalt.

XLV. Wie viel Gulden betrug der Jahresgehalt des Gatten, wovon der Witwe ⅓ Theil als Pension bewilliget wurde, und diese nach Abzug der 5¼perzentigen Pensionstaxe den ersten monatlichen Pensionsgenuß mit **10** fl. 16⅔ Kr. behob?

Setzt man die Pension = **1**, so ist der Antheil für **1** Monat $= \frac{1}{12}$, für die Taxe $\frac{5\frac{1}{4}}{100}$ gleich $\frac{21}{400}$, also für den ersten Bezug nach Abzug der Taxe $\frac{1}{12} - \frac{21}{400} = \frac{37}{1200}$ der Pension.

Gehalt fl. ?	10 fl. 16⅔ Kr.	Probe.
60	1 fl.	⅓ von 1000 = 333⅓ fl. Pension, also monatlich 27 fl. 46⅔ Kr.
37/1200	1 Pension	5¼ Prozent Kameraltaxe macht 17 fl. 30 Kr.
1	3 fl. Gehalt	Bezug fürs erste Monat 10 fl. 16⅔ Kr.

Antwort: **1000** fl. Gehalt.

XLVI. Wie viel Gulden hat ein Beamter im aktiven Stande bezogen, wenn derselbe mit ⅔ Theilen seines Gehaltes quiescirt wurde, und die Witwe, welcher ⅓ Theil von dem Quiescentengenusse ihres Mannes als Pension bewilligt wird, an 5¼perzentiger Pensionstaxe **14** fl. zu bezahlen hat?

Gehalt fl. ?	14 fl. Pensionstaxe	Probe.
5¼	100 fl. Pension	Gehalt im aktiven Stand 1200 fl.
1	3 Quiescentengehalt	im Quiescentenstande 800 fl.
2	3 Gehalt im aktiven Stand	Hiervon Pensionsgenuß 266⅔ fl.
		Pensionstaxe 5¼ % von 266⅔ fl. = 14 Gulden.

Antwort: **1200** fl.

XLVII. Einer Witwe wurde ⅓ Theil von dem Gehalte ihres verstorbenen Mannes als Pension bewilliget, den Kindern wurde ⅙ Theil von demselben Gehalte als Gnadengabe angewiesen. — Die Witwe hat von ihrer Pension 5¼ Prozent Kameraltaxe zu bezahlen. — Wenn nun die Mutter nach dem ersten Monate nach Abzug der Taxen **24** fl. **10** Kr. für den Pensionsrest und die Gnadengabe der Kinder behebt; so frägt sichs: a) wie viel

beträgt die jährliche Pension der Mutter, b) wie viele Gulden gehören von den 24 fl. 10 kr. den Kindern, c) wie viele Gulden erhalten die Waisen als jährliche Gnadengabe?

Da die Witwe ⅓ Theil und die Kinder ⅙ Theil von dem Gehalte des Verstorbenen beziehen, so genießen sie zusammen den halben Gehalt. Setzt man den Gehalt gleich 1, so beziehen sie zusammen in 1 Monat ½ von $\frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{24}$ Theil. Die Mutter hat hiervon an Taxen zu bezahlen $\frac{1}{3} \cdot \frac{5\frac{1}{4}}{100} = \frac{7}{400}$, sie bezieht daher nach dem ersten Monate $\frac{1}{24} - \frac{7}{400} = \frac{29}{1200}$ Theile des Gehaltes.

a) Wie viele Gulden beträgt die jährliche Pension der Mutter?

Pension ?	24⅙ Abzug
$\frac{29}{1200}$	1 fl. Gehalt
3	1 fl. Pension.

Antwort: 333⅓ fl.

Probe: Pension der Mutter jährlich 333⅓ fl., monatlich 27 fl. 46⅔ Kr.
" " Kinder " 166⅔ fl., " 13 " 53⅓ "

Zusammen 41 fl. 40 Kr.
Pensionstaxe für die Mutter......17 fl. 30 Kr.

Bezug im 1. Monate......24 fl. 10 Kr.

b) Gulden monatliche Pension der Kinder?

Gulden monatliche Pension der Kinder ?	24⅙ Abzug
$\frac{29}{1200}$	1 fl. Gehalt
6	1 fl. Kinderpension jährlich
12	1 fl. monatlich.

Antwort: 13 fl. 53⅓ Kr.

c) Gulden jährliche Pension der Kinder?

Gulden jährliche Pension der Kinder?	24⅙ fl. Bezug
$\frac{29}{1200}$	1 fl. Gehalt
6	1 fl. jährliche Pension.

Antwort: 166 fl. 40 Kreuzer.

XLVIII. Die Witwe eines Italienischen Beamten, welcher 6000 Lire italiane bezog, wovon 87 = 100 Lire austriache, und 3 von diesen 1 fl. Konvenzionsmünze geben, wird nach dem Österreichischen Pensionsnormale behandelt, und erhält ⅓ Theil vom Gehalte ihres Gatten als Pension. Wie viel fl. Konvenzionsmünze beträgt die 5¼perzentige Taxe?

fl. Taxe ?	6000 Lire italiane
87	100 Lire austriache
3	1 fl. Gehalt
3	1 fl. Pension
100	5¼ fl. Taxe.

Antwort: 40 fl. $13\frac{23}{29}$ Kr.

XLIX. Nach obigen Bedingungen soll aus dem Taxbetrage 40 fl. $13\frac{23}{29}$ Kr. der Gehalt des Verstorbenen berechnet werden.

Lire italiene Gehalt?	40 fl. $13\frac{23}{29}$ Kr. Taxe
60	1 fl. Taxe
5¼	100 fl. Pension
1	3 fl. Gehalt
1	3 Lire austriache
100	87 Lire italiane.

Antwort: 6000 Lire italiane.

Noch einige Beispiele über die Prozenten-Rechnung, besonders in Bezug auf das Steuerwesen.

§. 136. Es ist aus der Lehre von den Proporzionen bekannt, daß, wenn vier Größen eine Proporzion formiren, diese durch Versetzung auf 8 verschiedene Weisen in eine neue Proporzion gestellt werden können.

Es ist ferner bekannt, daß durch eine passende Addizion und Subtrakzion der verschiedenen Glieder wieder viele andere richtige Proporzionen abgeleitet werden können, in welchen sich abermals wieder die vier erhaltenen Glieder auf 8 verschiedene Weisen versetzen lassen.

Wenden wir diese Gesetze auf eine Steuerrechnung an, indem wir den Steuerbetrag mit S, die Prozente mit P, und die Interessen von S zu P Prozente mit J bezeichnen, und wenn der Zuschuß zu berechnen kommt, P und J positiv, wenn aber ein Nachlaß berechnet werden soll, P und J negativ setzen; bezeichnen wir eine andere Anzahl Prozente mit p, und die beziehungsweisen Interessen mit i, nach Erforderniß positiv und negativ: so ergeben sich aus den mannigfaltigen, aus diesen Ausdrücken zusammengesetzten Proporzionen eben so viele, verschiedenen Zwecken anpassende, Aufgaben mit ihren Auflösungen.

L. Setzen wir den Steuerbedarf $S = 3600$ fl., so ist
wenn $P = 2\%$ ist; $J = 72$; $(100+P) = 102$; $(100-P) = 98$;
$S+J = 3672$; $S-J = 3528$; und
wenn $p = 2\frac{1}{2}$ ist; $i = 90$; $(100+p) = 102\frac{1}{2}$; $(100-p) = 97\frac{1}{2}$;
$S+i = 3690$; $S-i = 3510$;
auch ist $p-P = 2\frac{1}{2}-2 = \frac{1}{2}$.

Die Proporzionen:	lehren die Aufgaben lösen:
1.) $100 : S = P : J$ $100 : 3600 = 2 : J$ $J = 72.$	Es sey die jährliche Steuer für eine Stadt 3600 fl. Hiervon sollen 2% Zuschuß eingebracht werden. Was beträgt dieser Zuschuß? Antwort: 72 fl.
2.) $S : 100 = J : P$ $3600 : 100 = 72 : P$ $P = 2.$	Wie viel Prozent Zuschuß wurden gerechnet, wenn dieser bei 3600 fl. Steuer 72 fl. betrug? Antwort: 2%.
3.) $P : 100 = J : S$ $2 : 100 = 72 : S$ $S = 3600.$	Wie hoch belauft sich die Steuer, wenn der 2perzentige Zuschuß 72 fl. ausmacht? Antwort: 3600 fl.
4.) $100 : S = (100+P) : (S+J)$ $100 : 3600 = 102 : (S+J)$ $S+J = 3672.$	Von dem Steuerbetrage 3600 fl. sollen 2% Zuschuß eingebracht werden; was beträgt die Abfuhr an der Steuer sammt Zuschuß?

Die Proporzionen:	lehren die Aufgaben lösen:
5.) $(100+P):(S+J)=100:S$ $102:3672=100:S$ $S=3600.$	Ein Steuereinnehmer führt an das Provinzial-Zahlamt **3672** fl. an der bemessenen Steuer sammt **2%** Zuschuß ab; was betrug die Steuer ohne Zuschuß? Antwort: **3600** fl.
6.) $100:S=(100-P):(S-J)$ $100:3600=98:(S-J)$ $S-J=3528.$	Wenn von der Steuer mit **3600** fl. **2%** Nachlaß bewilliget wurden, was beträgt die Abfuhr? Antwort: **3528** fl.
7.) $(100-P):(S-J)=100:S$ $98:3528=100:S$ $S=3600.$	Die Abfuhr der um **2%** gemilderten Steuer betrug **3528** fl. Wie viele Gulden betrug die Steuer vor dem Nachlasse? Antw.: **3600** fl.
8.) $100:S=(P+p):(J+i)$ $100:3600=4\frac{1}{2}:(J+i)$ $J+i=162.$	Von einer Steuer mit **3600** fl. soll die Gemeinde **A 2%** und die Gemeinde **B 2½%** zum Armenfonde entrichten. Wie viele Gulden beträgt die gemeinschaftliche Abfuhr an den Armenfond? Antwort: **162** fl.
9.) $100:S=2P:2J$ $100:3600=4:2J$ $2J=144.$	Ein Steuereinnehmer soll **3600** fl. Steuer mit **2%** Nachlaß einheben. Statt dessen hat er irriger Weise **2%** Zuschuß eingebracht. Wie viele Gulden kommen der besteuerten Gemeinde als Rückersatz zu Guten? Antwort: **144** fl.
10.) $100:S=(p-P):(i-J)$ $100:3600=\frac{1}{2}:(i-J)$ $(i-J)=18.$	Ein Steuereinnehmer hat statt **2%** Zuschuß von **3600** fl. **2½%** eingebracht. Wie viele Gulden sind der Parthei zu vergüten? Antwort: **18** fl.
11.) $P:J=(100+P):(S+J)$ $2:72=102:(S+J)$ $(S+J)=3672.$	Wenn der **2**perzentige Zuschuß **72** fl. betrug, wie viele Gulden waren an Steuer sammt Zuschuß abzuführen? Antw.: **3672** fl.
12.) $(100+P):(S+J)=P:J$ $102:3672=2:J$ $J=72.$	Die Abfuhr für Steuer sammt Zuschuß betrug **3672** fl. Der Zuschuß ist aber für den Schulfond in Empfang zu nehmen. Wie viele Gulden gebühren dem Schulfonde? Antwort: **72** fl.
13.) $P:J=(100-P):(S-J)$ $2:72=98:(S-J)$ $(S-J)=3528.$	Man weiß, daß der **2**perzentige Steuer-Nachlaß **72** fl. betrug, und möchte wissen, wie viele Gulden für die Steuer-Abfuhr in Empfang genommen wurden? Antw.: **3528** fl.
14.) $(100-P):(S-J)=P:J$ $98:3528=2:J$ $J=72.$	Ein Steuereinnehmer führt für eingehobene Steuer nach Abzug des **2**perzentigen Nachlasses **3528** fl. ab. Im Kassa-Journale soll auch der Steuer-Nachlaß ersichtlich seyn. Wie viel beträgt der Steuer-Nachlaß? Antwort: **72** fl.
15.) $P:J=p:i$ $2:72=2\frac{1}{2}:i$ $i=90.$	Ein Steuereinnehmer führt anstatt **2½%** nur **2%** mit **72** fl. für den Sanitätsfond ab. Wie viele Gulden hätte er abführen sollen? Antwort: **90** fl.

Die Proporzionen:	lehren die Aufgaben lösen:
16.) $J : P = i : p$ $72 : 2 = 90 : p$ $p = 2\frac{1}{2}$.	Ein Steuereinnehmer hat **90** fl. abgeführt. Im nächsten Jahre führt er, indem er von demselben Steuerbetrage **2%** berechnet hat, **72** fl. ab. Wie viele Prozente sind im frühern Jahre in Anschlag gebracht worden? Antwort: **2½%**.
17.) $P : J = (100+p) : (S+i)$ $2 : 72 = 102\frac{1}{2} : (S+i)$ $(S+i) = 3690$.	Ein Steuereinnehmer führt die eingehobene Steuer sammt **2½%** Zuschuß ab. Von derselben Steuer führt er später **2%** für den Armenfond mit **72** fl. ab. Wie hoch belief sich die ganze erste Abfuhr? Antw.: **3690** fl.
18.) $(100+p) : (S+i) = P : J$ $102\frac{1}{2} : 3690 = 2 : J$ $J = 72$.	Ein Steuereinnehmer führt die Steuer sammt **2½%** Zuschuß mit **3690** fl. ab. Von derselben Steuer sollen nachträglich noch **2%** Steuer abgeführt werden. Wie viele Gulden sind in Abfuhr zu bringen? Antwort: **72** fl.
19.) $(S+i) : (100+p) = J : P$ $3690 : 102\frac{1}{2} = 72 : P$ $P = 2$.	Ein Steuereinnehmer führt die Steuer sammt **2½%** Zuschuß mit **3690** fl. ab. Nachträglich führt er einen andern Zuschuß mit **72** fl. ab. Wie viele Prozente sind bei dem späteren Zuschusse eingehoben worden? Antwort: **2%**.
20.) $J : P = (S+i) : (100+p)$ $72 : 2 = 3690 : (100+p)$ $(100+p) = 102\frac{1}{2}$, also $p = 2\frac{1}{2}$.	Ein Steuereinnehmer führt die Steuer sammt Zuschuß mit **3690** fl. ab. Nachher führt er von demselben Steuerbetrage den **2**perzentigen Zuschuß mit **72** fl. ab. Zu wie viel Prozente war der erste Zuschuß berechnet? Antwort: Zu **2½%**.
21.) $P : J = (100-p) : (S-i)$ $2 : 72 = 97\frac{1}{2} : (S-i)$ $(S-i) = 3510$.	Der **2**perzentige Nachlaß von einer Steuer betrug **72** fl. Was beträgt die Steuerabfuhr bei **2½%** Nachlaß? Antwort: **3510** fl.
22.) $(100-p) : (S-i) = P : J$ $97\frac{1}{2} : 3510 = 2 : J$ $J = 72$.	Der Gemeinde **A** sind von der Steuer **2%** Nachlaß, der Gemeinde **B** von derselben Steuer **2½%** Nachlaß bewilliget. **B** führt **3510** fl. ab. Was beträgt der Nachlaß für die Gemeinde **A**? Antwort: **72** fl.
23.) $J : P = (S-i) : (100-p)$ $72 : 2 = 3510 : (100-p)$ $(100-p) = 97\frac{1}{2}$, also $p = 2\frac{1}{2}$.	Wenn der Gemeinde **A 2%** Nachlaß bewilliget werden, so beträgt dieser Nachlaß **72** fl. Wie viele Prozente sind der Gemeinde **B** nachgelassen worden, wenn die Abfuhr **3510** fl. beträgt? Antwort: **2½%**.
24.) $(S-i) : (100-p) = J : P$ $3510 : 97\frac{1}{2} = 72 : P$ $P = 2$.	Die Abfuhr der Gemeinde **B** betrug bei **2½%** Nachlaß **3510** fl. Wenn nun der Nachlaß von derselben Steuer bei der Gemeinde **B 72** fl. beträgt, wie viele Prozente Nachlaß sind bewilliget worden? Antw.: **2%**.

Die Proporzionen:	lehren die Aufgaben lösen:
25.) $P : J = (p - P) : (i - J)$ $2 : 72 = \frac{1}{2} : (i - J)$ $(i - J) = 18.$	Der Gemeinde **A** sind **2%**, der Gemeinde **B** **2½%** Nachlaß bewilliget worden. Aus Versehen wurde jeder Gemeinde **72** fl. Nachlaß angerechnet. Wie viel kömmt der Gemeinde **B** zurückzuersetzen? Antwort: **18** fl.
26.) $(100 + P) : (S + J) = \ldots\ldots$ $\ldots\ldots = (100 - P) : (S - J)$ $102 : 3672 = 98 : (S - J)$ $(S - J) = 3528.$	Der Gemeinde **A** sind **2%** Steuer-Nachlaß bewilliget worden. Irriger Weise sind aber **2%** Steuer-Zuschuß eingebracht, und somit an Steuer sammt Zuschuß **3672** fl. abgeführt worden. Wie viele Gulden hätte die Abfuhr nach Abzug des Nachlasses betragen sollen? Antwort: **3528** fl.
27.) $(100 - P) : (S - J) = \ldots\ldots$ $\ldots\ldots = (100 + P) : (S + J)$ $98 : 3528 = 102 : (S + J)$ $(S + J) = 3672.$	Wenn die Steuer nach Abzug von **2%** Nachlaß **3528** fl. betrug, wie viel fl. hätte diese Steuer bei **2%** Zuschuß betragen? Antwort: **3672** fl.
28.) $(100 + P) : (S + J) = \ldots\ldots$ $\ldots\ldots = (100 + p) : (S + i)$ $102 : 3672 = 102\frac{1}{2} : (S + i)$ $(S + i) = 3690.$	Die Steuer sammt **2%** Zuschuß betrug **3672** fl. Es hätten aber **2½%** Zuschuß genommen werden sollen. Wie viel Steuer sammt Zuschuß hätte sollen abgeführt werden? Antwort: **3690** fl.
29.) $(S + J) : (100 + P) = \ldots\ldots$ $\ldots\ldots = (S + i) : (100 + p)$ $3672 : 102 = 3690 : (100 + p)$ $(100 + p) = 102\frac{1}{2}$, also $p = 2\frac{1}{2}$.	Ein Steuereinnehmer hatte an Steuer sammt **2%** Zuschuß **3672** fl. abgeführt, er hätte aber **3690** fl. abführen sollen. Wie viel Prozente Zuschuß hätte er berechnen sollen? Antwort: **2½%**.
30.) $(100 + P) : (S + J) = \ldots\ldots$ $\ldots\ldots = (100 - p) : (S - i)$ $102 : 3672 = 97\frac{1}{2} : (S - i)$ $(S - i) = 3510.$	Ein Steuereinnehmer führt an Steuer sammt **2%** Zuschuß **3672** fl. ab. Er hätte aber **2½%** Nachlaß rechnen sollen. Wie viele Gulden hätte da die Abfuhr betragen? Antwort: **3510** fl.
31.) $(100 - p) : (S - i) = \ldots\ldots$ $\ldots\ldots = (100 + P) : (S + J)$ $97\frac{1}{2} : 3510 = 102 : (S + J)$ $(S + J) = 3672.$	Ein Steuereinnehmer, welcher **2½%** Nachlaß statt **2%** Zuschuß rechnete, führte an die Einnahmskassa des Provinzialzahlamtes **3510** fl. ab. Wie viel hätte er an Steuer sammt **2%** Zuschuß abführen sollen? Antwort: **3672** fl.
32.) $(S - i) : (100 - p) = \ldots\ldots$ $\ldots\ldots = (S + J) : (100 + P)$ $3510 : 97\frac{1}{2} = 3672 : (100 + P)$ $(100 + P) = 102$; also $P = 2$.	Ein Steuereinnehmer rechnet **2½%** Nachlaß, und führt **3510** fl. ab. Er hätte aber **3672** fl. einbringen sollen. Wie viel Prozente Zuschuß hätte er rechnen sollen? Antwort **2%**.
33.) $(100 + P) : (S + J) = \ldots\ldots$ $\ldots\ldots = (P + p) : (J + i)$ $102 : 3672 = 4\frac{1}{2} : (J + i)$ $(J + i) = 162.$	Ein Steuereinnehmer führt an Steuer sammt **2%** Zuschuß **3672** fl. ab, er hätte aber **2½%** Nachlaß rechnen sollen. Wie viel Gulden sind der Gemeinde zu vergüten? Antwort: **162** fl.

Siebenter Abschnitt.

Von den Berechnungen wegen einer früheren Bezahlung.

§. **137**. Wer verpflichtet ist, eine bestimmte Summe an einem bestimmten Tage zu bezahlen, und diese Bezahlung vor diesem bestimmten Tage leistet, dem gebühren die Zinsen seines früher ausgelegten Kapitals von dem Tage der wirklichen Leistung bis zu dem Tage, an welchen er eigentlich zu bezahlen verpflichtet gewesen wäre.

Der um die Interessen verminderte Nennwerth (N) der Schuld, oder jener Betrag, mit welchem man im Stande ist, eine später zahlbare Summe schon früher zu tilgen, heißt der gegenwärtige Werth (W) dieser Schuld.

Die Interessen werden wieder nach Prozenten berechnet, jedoch dürfen sie nicht von N, sondern sie müssen von W berechnet werden, mithin nach der im §. **132** angegebenen Methode, wo Kapital und Interessen vereiniget vorkommen.

(1) Welcher ist der gegenwärtige Werth von **1000** nach **2** Jahren zahlbaren Gulden bei **6%** Interessenvergütung?

100 fl. geben in **2** Jahren zu **6%** an Interessen **12** fl.

Folglich $112 : 100 = 1000 : W$.

Antwort: $892\frac{6}{7}$ fl. (Die von W entfallenden Interessen $107\frac{1}{7}$ fl. ergänzen dasselbe wirklich zu N.)

Wollte man die Interessen von N nehmen, so betragen diese **120** fl., welche von **1000** fl. weggenommen, den gegenwärtigen Werth auf **880** fl. bestimmen würden. Hiervon entfallen nach den gegebenen Bestimmungen $105\frac{3}{5}$ fl. Interessen, welche zu **880** fl. addirt **985** fl. **36** Kr. nicht aber **1000** fl. zur Summe geben.

Anmerkung. Das für diese Fälle anzuwendende Verfahren, um W zu bestimmen, nennt man die Rechnung auf Hundert, zum Gegensatze der gewöhnlichen Art die Interessen zu berechnen, welche die Rechnung in Hundert genannt wird.

§. **138**. Um das Verfahren aufzufinden, nach welchem alle hierher gehörigen Rechnungsaufgaben aufzulösen sind, wollen wir folgende Aufgabe in Betrachtung ziehen: Es soll der gegenwärtige Werth W einer nach Z Jahren zahlbaren Schuld N gesucht werden, wenn P Prozente bedungen sind. — Offenbar muß N die Summe aus W sammt den von W entfallenden Interessen zu P Prozent in der Zeit Z seyn, oder es muß

(I) $N = W + \frac{WPZ}{100} = \frac{W(100+PZ)}{100}$ seyn. Hieraus findet man:

(II) $W = \frac{100N}{PZ+100}$. Wird diese Gleichung noch für P und Z aufgelöset, so erhält man:

(III) $P = \frac{(N-W)100}{ZW}$, und (IV) $Z = \frac{(N-W)100}{PW}$.

Drückt man diese aufgefundenen Ausdrücke in Worten aus, so ergeben sich hierdurch die entsprechenden Verfahrungsarten, z. B. der gegenwärtige Werth ist gleich dem **100**fachen Nennwerthe, getheilt durch das um **100** vermehrte Produkt aus den Prozenten und der Zeit u. s. w.

Anmerkung. Wenn man in den Formeln III und IV den Ausdruck N—W als Interessen betrachtet, wie er sie auch wirklich bezeichnet, wenn das Kapital W ist, so stimmen diese mit den Formeln zum Auffinden der Prozente und der Zeit bei der gemeinen Interessen-Rechnung genau zusammen. Es können daher die hierher gehörigen Aufgaben, in welchen um die Prozente oder Zeit gefragt wird, blos allein durch die Interessen-Rechnung gelöset werden.

(2) Jemand hat eine am letzten Dezember **1842** zahlbare Summe von **5082** fl. gegen **6%** Interessenvergütung am **1.** Juli **1839** eingelöset. Wie groß war die Einlösungssumme?

Antwort: $W = \frac{5082 \times 100}{6 \times 3\frac{1}{2} + 100} = 4200$ fl.

(3) Welchen Werth hat heute eine nach **3** Jahren und **5** Monaten zahlbare Summe von **5460** fl. die Interessen zu **5½%** gerechnet?

Antwort: $W = \frac{5460 \times 100}{5\frac{1}{2} \times 3\frac{5}{12} + 100} = 4596$ fl. **16·92** Kr.

(4) Jemand löset eine nach **4½** Jahr zahlbare Schuld bei **5¾%** Interessenvergütung mit **8560** fl. ein. Über welchen Betrag war dieser Schuldschein ausgestellt?

$$N = \frac{8560\,(100 + 4\frac{1}{2} \times 5\frac{3}{4})}{100} = \frac{8560\,(800 + 9 \times 23)}{800}.$$

Antwort: Über **10774** fl. **54** Kr.

(5) Jemand gibt für einen über **6441** fl. **36** Kr. ausgestellten Schuldschein bei **6½%** Interessenvergütung **6400** fl. Um wie viele Tage vor der Verfallszeit wurde dieser Schuldschein übertragen?

$$\text{Tage} = \frac{(6441\frac{3}{5} - 6400) \times 100 \times 360}{6\frac{1}{2} \times 6400} = \frac{208 . 2 . 100 . 360}{13 . 5 . 6400} = 36.$$

Antwort: Um **36** Tage.

(6) Jemand löset einen nach **4½** Jahr zahlbaren Schuldschein über **4428** fl. mit **3456** fl. ein. Wie viel Prozente genießt er in der Zwischenzeit von seinem ausgelegten Kapitale?

$$P = \frac{(4428 - 3456)100}{4\frac{1}{2} \times 3456} = \frac{972 . 2 . 100}{9 \times 3456}.$$ Antwort: **6¼%**.

(7) Welches Kapital muß man heute anlegen, damit dieses sammt **5%** Zinsen nach **32** Jahren zu dem Betrage von **2496** fl. anwachse?

$$W = \frac{2496 \times 100}{5 \times 32 + 100}.$$ Antwort: **960** fl.

(8) Jemand ist schuldig **10000** fl. in vier gleichen jährlichen Raten zu bezahlen, so daß am Schlusse des vierten Jahres die letzte Rate bezahlt wird.

Mit einem wie großen Betrage kann er bei **5%** Interessenvergütung die ganze Schuld sogleich einlösen, und mit welchem Betrage kann er, wenn er seine Ratenzahlungen vertragsmäßig zugehalten hat, nach jedem Jahre die erst später noch zahlbaren Raten einlösen?

Jede Rate beträgt **2500** fl. — Die nach dem

ersten Jahre zahlbare Rate ist gegenwärtig	**2380·9524**	fl. werth, die nach dem
zweiten „ „ „ „ „	**2272·7273**	„ „ „ „ „
dritten „ „ „ „ „	**2173·9130**	„ „ „ „ „
vierten „ „ „ „ „	**2083·3333**	„ „ „ „ „

Also können alle vier Raten sogleich mit **8910·926** fl. eingelöset werden.

Wird nach Verlauf des ersten Jahres die Rate vollständig bezahlt, so kann man die drei erst später zahlbaren mit **6827·5927** fl. einlösen.

Wird nach Verlauf des zweiten Jahres die zweite Rate auch wieder vollständig bezahlt, so können die zwei erst später zahlbaren Raten mit **4653·6797** fl. eingelöset werden.

Wird nach Verlauf des dritten Jahres die dritte Rate wieder vollständig gezahlt, so ist man im Stande, die letzte noch später zahlbare Rate mit **2380·9524** fl. einzulösen.

(9) Jemand ist schuldig, an irgend einen Fond **2500** fl. zu entrichten, die aber erst nach **20** Jahren sich in diesem Fonde mit ihrem Nennwerthe vorfinden dürfen. Mit welchem Betrage kann er diese Schuld sogleich, und mit welchem nach dem **5.**, **10.** und **15.** Jahre tilgen, wenn die Interessenvergütung zu **5%**, und mit welchen Beträgen, wenn die Interessenvergütung zu **6%** berechnet wird? Antwort:

Werden die Interessen	zu **5%**	zu **6%** berechnet,
sogleich mit	fl. **1250**	fl. **1136 8/11**
nach **5** Jahren mit	fl. **1428 4/7**	fl. **1315 15/19**
nach **10** Jahren mit	fl. **1666 2/3**	fl. **1562 1/2**
nach **15** Jahren mit	fl. **2000**	fl. **1923 1/13**
nach **20** Jahren mit	fl. **2500**	fl. **2500**.

(10) Um eine Herrschaft zu kaufen, finden sich **3** Käufer. **A** biethet **38000** fl. sogleich zu bezahlen, **B** verspricht als Kaufschilling **40000** fl., wovon er **10000** fl. sogleich bezahlen, die **30000** fl. aber in **6** gleichen halbjährigen Raten entrichten will; **C** verspricht **42000** fl. in **10** gleichen Terminen zu zahlen, und zwar **4200** fl. sogleich, jeden andern eben so großen Betrag aber um **8** Monate später, als den zuletzt bezahlten. Zugleich erbiethen sich **B** und **C** gegen **6%** Interessenvergütung den Kaufschilling sogleich baar zu bezahlen. Welcher Käufer hat das beste Anerbiethen gemacht, und wie groß ist der Anboth eines jeden?

Der Anboth des **A** ist **38000** fl.

Der Anboth des **B** ist

für sogleiche Bezahlung	fl.	**10000**
für die erste Rate	„	**4854·3689**
„ „ zweite „	„	**4716·9811**
„ „ dritte „	„	**4587·1560**
„ „ vierte „	„	**4464·2857**
„ „ fünfte „	„	**4347·8261**
„ „ sechste „	„	**4237·2881**
Zusammen....	fl.	**37207·9059**

Der Anboth des **C** ist

für sogleiche Bezahlung	fl.	**4200**
für die zweite Rate	„	**4038·4615**
„ „ dritte „	„	**3888·8889**
„ „ vierte „	„	**3750**
„ „ fünfte „	„	**3620·6897**
„ „ sechste „	„	**3500**
„ „ siebente „	„	**3387·0968**
„ „ achte „	„	**3281·25**
„ „ neunte „	„	**3181·8182**
„ „ zehnte „	„	**3088·2353**
Zusammen....	fl.	**35936·4404**

Aus diesen Resultaten ergibt sich, daß **A**, welcher den kleinsten Nominalwerth ausgesprochen hatte, der beste Käufer war, **B** aber besser als **C**, obgleich dieser den größten Kaufschilling benannte.

Achter Abschnitt.

Von den Berechnungen wegen des Diskontes.

§. 139. Unter dem Diskonte versteht man die Interessen wegen einer früher als am Zahltage erfolgten Bezahlung eines Wechsels, es mag die Einlösung des Wechsels vom Acceptanten selbst, oder das Einkaufen desselben (das Diskontiren) von irgend jemand Andern erfolgt seyn. — Die Berechnungen wegen des Diskontes betreffen daher ebenfalls die Bestimmungen des gegenwärtigen Werthes eines erst nach einiger Zeit zahlbaren Betrages, und sollten aus dieser Ursache ganz auf dieselbe Weise angestellt werden, wie die Berechnungen im nächstvorhergehenden Abschnitte. Es ist jedoch unter den Handelsleuten üblich, den Diskont nicht auf, sondern in Hundert zu berechnen, d. h. die Interessen nicht vom gegenwärtigen Werthe, sondern vom Nennwerthe zu bestimmen, wornach der diskontirte Werth eines Wechsels erhalten wird, indem man die so gefundenen Interessen (den Diskont) vom Nennwerthe subtrahirt. Bei der Berechnung des Diskontes begeht man in der Praxis einen weiteren Fehler dadurch, daß man zwischen dem Diskontirungs- und dem Zahltage nach dem Kalender rechnet, daher man die **7** längeren Monate auch wirklich zu **31** Tage nimmt, während doch das übrige Rechnungsverfahren sich auf die Annahme des Jahres zu **360** Tage stützt.

Da das Diskontiren eigentlich nur bei Wechseln Statt findet, mithin die Berechnung des Diskontes gewöhnlich nur auf kurze Zeitperioden, oder auf Tage angestellt wird, so ist der Unterschied unbedeutend, und man kann dieses Verfahren wegen der Bequemlichkeit bei der Berechnung zugeben; keineswegs aber würde es angewendet werden dürfen, wenn die Diskontirungszeit bedeutend lang wäre, wenn sie viele Monate oder sogar Jahre betragen würde.

Die Auflösung der hierher gehörigen Aufgaben geschieht sonach nach den Regeln der gewöhnlichen Interessen-Rechnung, insbesondere aber nach der Anleitung im §. **131**.

(1) Was beträgt der Diskont und der diskontirte Werth eines am **16.** März **3** Monate **a dato** über **5400** fl. ausgestellten, und am **13.** April mit **6%** diskontirten Wechsels?

(Die Zeit beträgt sammt den **3** Respekttagen **67** Tage.)

5400×67	fl. 5400
361,800 Kr.	60„18
Betrag des Diskontes **60** fl. **18** Kr.	fl. **5339„42** der diskontirte Werth.

Anmerkung. Bei der Bestimmung der Tage wird entweder der Diskontirungs- oder der Zahltag mitgezählt, von manchen Einkäufern beide; die 3 Respekttage sind jedesmal mitzuzählen, wenn der Wechsel solche genießt.

(2) Ein am **27.** Mai **6** Wochen **a dato** über **9564** fl. **45** Kr. ausgestellter Wechsel wird am **11.** Juni mit **5¾%** diskontirt. Was beträgt der Diskont und der diskontirte Werth.

(Verfallstag 8. Juli, Zahltag 11. Juli, Diskontirungszeit 30 Tage.)

	9564·75		
Wegen 6 %	2869·425 Kreuzer.		
Wegen 3 %	1434·7125		fl. 9564„45
„ 2 %	956·475	Diskont	45„49⁹⁄₁₀
„ ¾ %	358·6781	Diskontirter Werth	fl. 9518„55 ¹⁄₁₀
Wegen 5¾ %	2749·8656 Kr.		

Diskont....fl. 45„49⁹⁄₁₀ Kr.

(3) Für einen über 9564 fl. 45 Kr. ausgestellten Wechsel betrug der Diskont zu 5¾ % 45 fl. 49⁹⁄₁₀ Kr. Wie viele Tage vor dem Zahltage wurde der Wechsel diskontirt?

Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit folgender: Wie viele Tage muß ein Kapital von 9564 fl. 45 Kr. zu 5¾ % anliegen, um 45 fl. 49⁹⁄₁₀ Kr. Interessen zu geben? Antwort: 30 Tage.

(4) Für einen über 8765 fl. 45 Kr. ausgestellten Wechsel präcise 18. Mai zahlbar, betrug der Diskont am 27. April 28 fl. 7½ Kr. Zu wie viel Prozente war der Diskont berechnet?

Diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit folgender: Zu wie viel Prozent verinteressirt sich ein Kapital von 8765¾ fl., welches in 21 Tagen 28⅛ fl. Interessen gibt? Antwort: Zu 5·5003, d. i. zu 5½ %.

(5) Welchen Nennwerth hat ein am 16. März 3 Monat à dato ausgestellter und gegen 6 % Diskont am 13. April mit 5339 fl. 42 kr. diskontirter Wechsel? (Zeit 67 Tage.)

Die Auflösung dieser Aufgabe wird durch eine Proporzion möglich, in welcher der diskontirte Werth (5339 fl. 42 Kr.) ein Glied ist. Es muß daher noch ein zu diesem gleichartiger Ausdruck aufgestellt werden, welcher 100 fl. ist, vermindert um den nach den Bedingungen der Aufgabe hiervon entfallenden Diskont. Letzterer ergibt sich aus der Proporzion:

360 Tage : 67 Tage = 6 fl. Diskont : ? fl. Diskont.

$$\text{Diskont} = \frac{67 \times 6}{360} = \frac{67}{60}.$$

So erhält man

$$\left.\begin{array}{l}\left(100 - \frac{67}{60}\right) : 5339\tfrac{7}{10} = 100 : N \\ \left(\frac{6000-67}{60}\right) : 5339\tfrac{7}{10} = 100 : N\end{array}\right\} \text{Antwort: 5400 fl.}$$

§. 140. Sollte die Aufgabe (1) mit vollständiger Genauigkeit aufgelöset werden, so müßte man sich der im §. 138 angegebenen Formel $W = \frac{100\,N}{P\,Z + 100}$ bedienen, und man würde, wenn man zugleich auch das Jahr wirklich zu 365 Tage rechnet, erhalten:

$$\text{Diskontirter Werth} = \frac{5400 \times 100}{6 \times \frac{67}{365} + 100} = \frac{5400 \times 365 \times 100}{402 + 36500} =$$
$$5341\tfrac{3209}{18451} = \text{fl. } 5341„10.$$

Eben so würde man die Aufgabe (5) mit vollständiger Genauigkeit auflösen können, wenn man sich der Formel $N = \frac{W(100 + PZ)}{100}$ bedient.

Hierdurch würde man erhalten:

$$N = \frac{5341\frac{3209}{18451}(100 + \frac{6 \times 67}{365})}{100} = \frac{98550000 \times 36902}{100 \times 18451 \times 365} = 5400 \text{ fl.}$$

Neunter Abschnitt.

Von den Berechnungen bei Termin-Zahlungen.

§. 141. Wenn eine schuldige Summe in einzelnen Theilbeträgen nach bestimmten Zeitperioden bezahlt wird, so nennt man eine solche Zahlungsweise eine Termin-Zahlung, wie dieß z. B. bei theilweisen Abtragungen von größeren Kaufsummen der Fall ist. Hierbei kann es im Interesse des Gläubigers oder des Schuldners liegen, die sämmtlichen Theilbeträge auf Ein Mal zu erhalten oder zu geben, jedoch ohne dem Gläubiger einen Vortheil oder dem Schuldner einen Nachlaß zu gestatten. Diesem Verlangen kann dadurch willfahrt werden, daß die früher fälligen Summen später, als in den vorgeschriebenen Zeitpunkten, und umgekehrt die später fälligen Summen vor dem angesetzten Termine bezahlt werden, und es kommt darauf an, einen solchen mittleren Termin zu bestimmen, bei welchem der Schuldner durch den längern Genuß des früher zu entrichtenden Kapitals für den Verlust entschädiget wird, der ihm aus der früheren Abtragung einer später zu entrichtenden Summe erwächst.

Um das Verfahren zur Bestimmung dieses mittleren Termines aufzufinden, wollen wir die Aufgabe auflösen: Jemand ist schuldig **A** fl. in m Monaten, **B** fl. in n Monaten, **C** fl. in p Monaten und **D** fl. in q Monaten zu bezahlen. Nach wie viel Monaten wäre die ganze Schuld $S = A + B + C + D$ auf Ein Mal zu bezahlen, wenn weder der Gläubiger noch der Schuldner etwas am Interesse verlieren soll?

Werden von den einzelnen Beträgen die Interessen zu **P** Prozent nach ihrer Zeitbedingung entwickelt, so ist ihre Summe $\frac{APm}{1200} + \frac{BPn}{1200} + \frac{CPp}{1200} + \frac{DPq}{1200}$. Drückt man die zu bestimmende mittlere Zeit durch x Monate aus, und berechnet man für die ganze Summe **S** die Interessen ebenfalls zu **P** Prozent für x Monate, so erhält man $\frac{SPx}{1200}$, oder auch $\frac{(A+B+C+D)Px}{1200}$. Weil aber weder der Gläubiger noch der Schuldner etwas am Interesse verlieren soll, so muß $\frac{APm}{1200} + \frac{BPn}{1200} + \frac{CPp}{1200} + \frac{DPq}{1200} = \frac{(A+B+C+D)Px}{1200}$ seyn, woraus sich ergibt: daß $Am + Bn + Cp + Dq = Sx$ seyn muß. Diese ist die Hauptformel für alle hierher gehörigen Aufgaben, und gibt, in Worten

ausgedrückt, folgendes Gesetz an: „Die Summe der Produkte aus jeder „Theilzahlung in ihre Zeit, ist gleich dem Produkte aus der Summe aller „Theilzahlungen mit der zu bestimmenden mittleren Zeit.“ Hieraus folgt:

$$x = \frac{Am + Bn + Cp + Dq}{S}$$, d. h. „die mittlere zu bestimmende Zeit wird ge„funden, wenn man die Summe der Produkte aus jeder Theilzahlung in ihre „Zeit durch die ganze schuldige Summe dividirt.“

(1) Jemand ist 10000 fl. schuldig. Er verspricht 4000 fl. in 2 Monaten, 2000 fl. um 3 Monate später, 1000 fl. wieder um Einen Monat später, und endlich der Rest um 2 Monate später, als die dritte Termin-Zahlung zu bezahlen. Nach wie viel Monaten kann man fordern, daß der ganze Betrag auf Ein Mal bezahlt werde?

4000×2	Haben die einzelnen Beträge ein	$4 \times 2 = 8$	
2000×5	gemeinschaftliches Maß, so kann	$2 \times 5 = 10$	$x = \frac{48}{10} = 4\frac{4}{5}$ M.
1000×6	man vorläufig durch dasselbe ab-	$1 \times 6 = 6$	
3000×8	kürzen, und man erhält:	$3 \times 8 = 24$	
10000		10 48	

$$x = \frac{48000}{10000} = \frac{24}{5} = 4 \text{ Monate und } 24 \text{ Tage.}$$

(2) Von einer bestimmten Summe soll 1/8 Theil sogleich, der 1/10 Theil nach 5, der 1/6 Theil nach 10, der 1/5 Theil nach 15, der 1/4 Theil nach 20 Monaten und der Rest nach 2 Jahren bezahlt werden. Nach wie viel Monaten kann man verlangen, daß der ganze Betrag auf Einmal bezahlt werde?

Bringt man alle diese Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner, so wird die Ergänzung der Summe der Zähler zum gemeinschaftlichen Nenner, der Zähler des Restes seyn müssen.

	120			
1/8	15	× 0 = 0		1676 : 120 = 13 Monat 29 Tage.
1/10	12	× 5 = 60		47
1/6	20	× 10 = 200		116 : 4
1/5	24	× 15 = 360		36
1/4	30	× 20 = 600		= =
Rest	19	× 24 = 456		
	120	1676.		

Antwort: In 13 Monaten und 29 Tagen.

Nimmt man, um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, ein beliebiges Kapital, z. B. 7200 fl. an, bestimmt man aus diesem, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, die Termin-Zahlungen, berechnet man aus den einzelnen Leistungen die ihnen entsprechenden Zinsen zu 6%, so erhält man aus der Summe derselben 502 fl. 48 Kr., welche man auch auffindet, wenn man die Interessen von 7200 fl. für 13 Monate und 29 Tage berechnet.

(3) Jemand kauft

36 Zt. 75 ℔ à 218 fl. 30 Kr. per Zenten = fl. 8029·875
75 „ 80 „ à 120 fl. 48 „ „ „ = „ 9156·64
21 „ 60 „ à 158 fl. 36 „ „ „ = „ 3425·76.

Er verspricht die Hälfte des Betrages in 3 Monaten, ⅕ Theil desselben in 4 Monaten und den Rest in 6 Monaten zu bezahlen. Nach welcher Zeit kann der Verkäufer rechnen, daß er die Bezahlung auf Einmal erhält?

fl. 20612·275.

10306·1375×3 = 30918·4125   84510·3275 : 20612·275 = 4·1
4122·455 ×4 = 16489·82
6183·6825×6 = 37102·095.

20612·275   84510·3275.

Antwort: Nach 4 Monaten und 3 Tagen.

§. 142. Ist Jemand verpflichtet, nach Verlauf einer bestimmten Zeit eine gewisse Summe zu bezahlen, und zahlt er von dieser Summe eine oder einige Raten früher, als er zu bezahlen verpflichtet ist, so kann er offenbar den Rest im gehörigen Verhältnisse später bezahlen, als an dem Tage, an welchem der ganze Betrag vertragsmäßig hätte bezahlt werden sollen. — Die Art und Weise, wie diese gehörige Zeit auszumitteln ist, ergibt sich aus dem Satze: daß die Summe der Produkte aus jeder Termin-Zahlung in ihre Zeit gleich ist dem Produkte aus der Summe aller Termin-Zahlungen mit der zu bestimmenden mittleren Zeit.

(4) Jemand ist vertragsmäßig verpflichtet 10000 fl. nach 15 Monaten zu bezahlen. Er bezahlt nach 6 Monaten 2000 fl., 3 Monate später wieder 2000 fl., und nochmals 3 Monate später abermals 2000 fl. Nach wie viel Monaten ist er verpflichtet den Rest mit 4000 fl. zu bezahlen?

Das Produkt der Summe mit der mittleren Zeit ist 10000×15 = 150000.
„ „ für die erste Termin-Zahlung ist............2000× 6 = 12000
„ „ „ „ zweite „ „ „............2000× 9 = 18000
„ „ „ „ dritte „ „ „............2000×12 = 24000

Zusammen....6000............54000

Die Differenz beträgt....4000............96000.

Hieraus folgt, daß die Anzahl der Monate für die Bezahlung dieser 4000 fl. gleich $\frac{96000}{4000} = 24$ ist, oder daß diese 4000 fl. erst 9 Monate nach dem vertragsmäßig bestimmten Tage für die Totalbezahlung ausbezahlt werden dürfen.

(5) Eine gewisse Summe soll in 18 Monaten bezahlt werden. Der Schuldner bezahlt nach 3 Monaten ¼ Theil der Schuld, 4 Monate später ¼ Theil des noch schuldigen Restes, und wieder 3 Monate später die Hälfte des neuen noch schuldigen Restes. Den wie vielten Theil der ganzen Schuld ist er noch zu bezahlen schuldig, und nach welcher Zeit ist er erst verpflichtet, diesen noch schuldigen Rest zu bezahlen?

Betrachtet man die ganze Schuld als Eins, so ist 1×18 = 18 das Produkt aus der Summe (1) aller Termin-Zahlungen mit der mittleren Zeit (18), folglich auch gleich de˙˙ Summe der Produkte aus jeder Termin-Zahlung in ihre Zeit.

Das Produkt für die erste Termin-Zahlung ist $\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$; Rest: $\frac{3}{4}$ Theile der Schuld; also beträgt die zweite Termin-Zahlung $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ mit dem neuen Reste $\frac{9}{16}$. Das Produkt für die zweite Termin-Zahlung ist daher $\frac{3}{16} \times 6 = 1\frac{1}{8}$.

Die Hälfte des neuen Restes, also die dritte Termin-Zahlung ist, $\frac{9}{32}$, und eben diese Zahl ist auch der zuletzt noch schuldige Rest.

Das Produkt für die dritte Termin-Zahlung ist $\frac{9}{32} \times 9 = \frac{81}{32} = 2\frac{17}{32}$.

Die Summe der Produkte für die 3 früheren Termin-Zahlungen ist sonach $4\frac{13}{32}$, welche von 18 abgezogen den Rest $13\frac{19}{32}$ gibt, der das Produkt aus dem Reste $\frac{9}{32}$ in seine (d. i. die zu bestimmende) Zeit darstellt.

Es ist sonach die Zeit für den bedingungsweisen Rest der Schuld $= 13\frac{19}{32} : \frac{9}{32} = 435 : 9 = 48\frac{1}{3}$ Monat. Also kann der Schuldner erst nach 30 Monaten und 10 Tagen nach dem zuerst vertragsmäßig bestimmten Zahltage verpflichtet werden die letzte Termin-Zahlung zu leisten.

(6) Um eine Zahlung von 12000 fl. zu leisten, verbindet sich A nach Verlauf einiger Zeit 4000 fl. zu geben, die übrigen 8000 fl. aber in 4 gleichen Raten, deren jede um 2 Monate später als die nächst vorhergehende zahlbar seyn soll. Späterhin vergleicht er sich mit dem Gläubiger dahin, daß er die ganze Schuld nach 10 Monaten bezahlt, weil auf diese Weise weder der Gläubiger noch der Schuldner etwas an Interessen verliert. Wann war die erste Zahlung zu leisten verabredet?

Die Anzahl dieser Monate sey x. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} 4000 \times x &= 4x \\ 2000(x+2) &= 2x+4 \\ 2000(x+4) &= 2x+8 \\ 2000(x+6) &= 2x+12 \\ 2000(x+8) &= 2x+16 \\ & \overline{12x+40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x+40 &= 12 \times 10 \\ 12x &= 80 \\ x &= 6\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Es war daher bestimmt, daß die erste Termin-Zahlung 6 Monate und 20 Tage nach Abschließung des Vertrages bezahlt werde.

Berechnet man zur mehreren Überzeugung noch die 6perzentigen Interessen, so erhält man sowohl aus den Resultaten für die Raten als für die ganze Schuld nach den ihnen zukommenden Zeitbedingungen 600 fl. Interessen.

(7) Jemand hat die Verpflichtung 48000 fl. zu zahlen, und zwar 9000 fl. nach 3, 11000 fl. nach 6, 13000 fl. nach 9 und 15000 fl. nach $11\frac{3}{5}$ Monaten. Nun wünscht der Gläubiger den ganzen Betrag in zwei gleichen Termin-Zahlungen zu erhalten, wovon die zweite nur um Einen Monat später als die erste erfolgen soll. Nach wie viel Monaten muß die erste Termin-Zahlung erfolgen?

$$\begin{array}{rl|r} 9000 \times & 3 & 27 \\ 11000 \times & 6 & 66 \\ 13000 \times & 9 & 117 \\ 15000 \times & 11\frac{3}{5} & 174 \\ & & \overline{384} \end{array} \qquad \begin{aligned} & 24 \times x \\ & 24(x+1) \\ 384 &= 48x+24 \\ 48x &= 360 \\ x &= 7\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Es müssen daher die ersten 24000 fl. nach $7\frac{1}{2}$, die zweiten nach $8\frac{1}{2}$ Monaten bezahlt werden.

Berechnet man die 6% Zinsen, so erhält man sowohl aus den vier Raten nach der ersten, als aus den zwei Raten nach der zweiten Bedingung den Interessenbetrag mit 1920 fl.

Zehnter Abschnitt.

Von der Durchschnitts-Rechnung.

§. 143. Wenn eine Größe in mehrere Theile zu theilen ist, so kann dieß auf eine verschiedene Weise geschehen. Es kann verlangt werden, daß diese Größe in eine bestimmte Menge gleicher Theile getheilt werde. Die Auflösung dieser Aufgabe lehret die gemeine Division. Oder es soll eine aus ungleichen Theilen zusammengesetzte Größe in gleiche Theile getheilt werden; diese Aufgaben, so wie auch jene, durch welche eine Größe zwar nicht in gleiche Theile getheilt werden soll, in welchen sich aber das Ungleiche aus dem durch eine Theilung in gleiche Theile aufgefundenen Quozienten, mittelst einer Addizion oder Subtrakzion, oder sonst auf eine einfache Weise ableiten läßt, werden durch die Durchschnitts-Rechnung gelöset. Wird verlangt, irgend eine Größe in mehrere Theile so zu theilen, daß die einzelnen Theile in einem bestimmten geometrischen Verhältnisse zu einander stehen, so lehret die Gesellschafts-Rechnung die Auflösung solcher Aufgaben. Endlich kann zu den Theilungs-Rechnungen auch noch die Allegazions-Rechnung gezählt werden, welche lehrt, wie groß verschiedenartige Theile seyn müssen, um daraus ein gleichartiges Ganzes von bestimmter Größe zu erhalten.

§. 144. Die Durchschnitts-Rechnung umfaßt sonach Aufgaben zweierlei Art; erstlich solche, in welchen ein aus ungleichen Theilen zusammengesetztes Ganzes in gleiche Theile getheilt werden soll. Das Resultat der Aufgaben dieser Art wird Durchschnitt, Mittelpreis oder auch das arithmetische Mittel genannt. Ferner gehören zur Durchschnitts-Rechnung jene Aufgaben, in welchen verlangt wird, eine Größe in ungleiche Theile zu theilen, wenn es möglich ist, die ungleichen Theile durch eine entsprechende Rechnungsverbindung aus dem durch eine Theilung in gleiche Theile aufgefundenen Quozienten zu bestimmen.

§. 145. Die Auflösung der Aufgaben für die erste Art wird dadurch bewirkt, daß man die gegebenen verschiedenen Größen addirt, und die Summe durch die Anzahl dieser Größen dividirt.

Sind die höchsten Bestandtheile der ungleichen Angaben gleich, so gelten die gleichen Bestandtheile auch für den Durchschnitt, und man braucht bloß den Durchschnitt aus den ungleichen Theilen zu suchen, und diesen dem gleichen Theile beizusetzen.

(1) Jemand mischt **5** Eimer Wein aus Einem Eimer zu **18½** fl., einem andern zu **19¼** fl., einem dritten zu **20¾** fl., einem vierten zu **21** fl., und einem fünften zu **21½** fl. Was kostet Ein Eimer im Durchschnitte?

Alle **5** Eimer kosten zusammen $18\frac{1}{2} + 19\frac{1}{4} + 20\frac{3}{4} + 21 + 21\frac{1}{2}$ oder **101** fl., folglich kömmt Ein Eimer auf **20** fl. **12** Kr. zu stehen.

(2) Welches ist das Durchschnittserträgniß von einer Herrschaft, deren reine Erträgnisse in den 6 letzten Jahren folgende gewesen sind?

fl. 10863„45
10934„36
10716„24
10879„18
10918„42
10695„15
5008„—

Antwort: fl. 10834„40.

(3) Jemand kauft 5 Stück Obligazionen, jede im Nennwerthe von 100 fl. Was kostet Eine im Durchschnitt, wenn die Einkaufspreise der einzelnen folgende waren?

$102\frac{7}{16}$
$104\frac{3}{8}$
$103\frac{1}{4}$
$103\frac{7}{8}$
$104\frac{3}{16}$
$18\frac{1}{8}$

Antwort: fl. $103\frac{5}{8}$.

§. 146. Bei der Auflösung der Aufgaben der zweiten Art sind zu der ganzen zu theilenden Größe noch vorläufig die den Bedingungen entsprechenden Nebengrößen zu addiren, oder diese davon zu subtrahiren, und sodann die Summe oder Differenz zu theilen. Aus dem auf diese Weise aufgefundenen Quozienten ist es sodann leicht, die verlangten Theile den Bedingungen entsprechend aufzustellen.

(4) Ein Erblasser hinterläßt seiner Witwe und seinen 6 Kindern ein Vermögen von 48000 fl., wovon die Witwe ihr beigebrachtes Heirathsgut von 3000 fl. verdoppelt zurückerhält, übrigens aber noch mit den Kindern zu gleichen Theilen erben soll. Was bekömmt die Witwe und was jedes Kind?

Die Witwe erhält vorläufig $3000 \times 2 = 6000$ fl. Diese von der Verlassenschaft abgezogen, geben 42000 fl., welche auf 7 gleiche Theile getheilt für jeden Erben 6000 fl. geben. Sonach erhält die Witwe 12000 fl., jedes Kind aber 6000 fl.

(5) Aus einer Verlassenschaft von 16850 fl. soll die Witwe den $\frac{1}{3}$ Theil erhalten, der Rest aber unter die 2 Söhne und 3 Töchter so vertheilt werden, daß eine Tochter um 600 fl. mehr erhält, als ein Sohn. Was bekömmt jede dieser Personen?

Die Witwe erhält $5616\frac{2}{3}$ fl. Von dem Reste $11233\frac{1}{3}$ fl. sind vorläufig wegen der vergrößerten Erbtheile der Töchter 1800 fl. abzuziehen, wornach der neue Rest $9433\frac{1}{3}$ fl. auf 5 gleiche Theile zu theilen kömmt. Der Quozient $1886\frac{2}{3}$ fl. gibt den Erbtheil für Einen Sohn an, woraus zugleich folgt, daß jede Tochter $2486\frac{2}{3}$ fl. erben wird.

(6) Ein Betrag von 9139 fl. 30 Kr. soll unter A, B und C so vertheilt werden, daß B um 400 fl. mehr als A, C aber um 200 fl. mehr als B erhalten soll. Was bekömmt jeder?

Antwort: A 2713 fl. 10 Kr; B 3113 fl. 10 Kr.; C 3313 fl. 10 Kr.

(7) A, B, C, D und E sollen sich nach vorhergegangener Ausgleichung in das Resultat der Ausgleichung und in die überdieß noch vorhandene Summe von 20518 fl. 36 Kr. zu gleichen Theilen theilen. A hat vorläufig von dieser Summe 1500 fl., D 2400 fl. zu fordern. Hingegen ist B schuldig 1250 fl. und C 850 fl. zu dieser Summe zu zahlen. Was bekömmt jeder?

Die auf 5 gleiche Theile zu theilende Zahl ist 20518 fl. 36 Kr. weniger 3900 fl., mehr 2100 fl.

Antwort:
- A bekömmt.......5243 fl. 43⅕ Kr.;
- B bekömmt........2493 fl. 43⅕ Kr.;
- C bekömmt........2893 fl. 43⅕ Kr.;
- D bekömmt........6143 fl. 43⅕ Kr. und
- E bekömmt........3743 fl. 43⅕ Kr.

(8) Vier Personen sollen sich in 14400 fl. so theilen, daß B um 2000 fl. mehr als A, C um 1000 fl. mehr als B, und D um 2000 fl. weniger als C erhalte. Was bekömmt jeder?

Antwort: A bekömmt 2100 fl., B 4100 fl., C 5100 fl. und D 3100 fl.

§. 147. Werden bei der Bestimmung des Durchschnittes einzelne Quantitäten nicht als gleich vorausgesetzt, so hat man auch diese zu berücksichtigen als Größen, die auf das verlangte Resultat einen besonderen Einfluß nehmen. Für diesen Fall wird die Auflösung dadurch bewirkt, daß man die Summe der Produkte aus den zusammengehörigen Größen durch die Summe der Quantitäten theilt.

(9) Ein Müller kauft folgende Parthien Getreide:

A	50 Metzen	à 118 Gr.	=	5900 Gr.
B	30 „	à 114 „	=	3420 „
C	40 „	á 117 „	=	4680 „
D	30 „	à 120 „	=	3600 „
	150 Metzen kosten..........			17600 Gr.

Was kostet Ein Metzen?

Antwort: 117⅓ Gr. = 5 fl. 52 Kr.

(10) Ein Wirth kauft folgende Weingattungen:

A	54 Eimer	à 28 fl.	=	1512 fl.
B	60 „	à 31 fl.	=	1860 fl.
C	26 „	à 33 fl.	=	858 fl.
D	40 „	à 36 fl.	=	1440 fl.
	180 Eimer kosten...........			5670 fl.

Was kostet Ein Eimer?

Antwort: 31 fl. 30 Kr.

(11) Ein Silberarbeiter legirt folgende Silbergattungen:

12 Mk.	13löthig.	Silber	=	156 Lth. fein
15 „	12 „	„	=	180 „ „
13 „	11 „	„	=	143 „ „
20 „	11½ „	„	=	230 „ „
60 Mk. enthalten..........				709 Lth. fein.

Wie viellöthig ist die Legirung?

Antwort: $11\frac{49}{60}$ Loth fein.

(12) Ein Wirth hat Ein Faß, welches 210 Eimer hält. Dieses füllt er mit

A	20 Eimer	à 25 fl. 30 Kr.	=	510 fl.
B	35 „	à 28 „ 24 „	=	994 „
C	60 „	à 30 „ 36 „	=	1836 „
D	45 „	à 31 „ — „	=	1395 „
E	der Rest...	à 32 „ — „	=	1600 „
	210 Eimer kosten.....			6335 fl.

Was kostet Ein Eimer?

Antwort: 30 fl. 10 Kr.

§. 148. Ein Beispiel, in welchem eine zur Durchschnitts-Rechnung gehörige Aufgabe mit mehreren Aufgaben aus den früheren Abschnitten vereinigt vorkommt.

(13) Ein Kaufmann hinterläßt eine Witwe, 3 Söhne und 2 Töchter, welche sich nach beendigter Abhandlung in der Art in die Verlassenschaft theilen sollen, daß die Witwe ihr beigebrachtes Heirathsgut von 6000 fl. verdoppelt, und überdieß so viel als Ein Sohn und Eine Tochter bekommen soll. Jede Tochter soll um 500 fl. mehr erhalten als Ein Sohn.

Dem Willen des Erblassers zur Folge sollen die drei Sohne die Handlung gemeinschaftlich fortführen; die Witwe soll für den auf sie entfallenden

Betrag das ihm eigenthümliche Haus, so wie Einen Drittheil Präziosen und Effekten um den Schätzungswerth behalten; was ihr überdieß hinaus noch zukömmt, soll bis zu ihrem Tode, oder bis zur etwaigen Auflösung der Handlung zum besseren Betriebe des Geschäftes in der Handlung bleiben, gegen dem, daß ihr die Söhne den überlassenen Betrag mit **5** vom Hundert verzinsen. Eben so sollen die Erbtheile der Töchter unter derselben Bedingung bis zu ihrer Großjährigkeit in der Handlung bleiben.

Nach dem Schlusse der Abhandlung finden sich:

Activa:

In der Kassa an barem Gelde in Silbermünze.................fl. **16175**„—
„ „ „ „ „ Wiener Währung.........fl. **12850**„—
„ „ „ „ „ **750** Stück k. k Dukaten......à **4** fl. **39** Kr.
8 Stück Rothschild'sche Lose vom Jahre **1820** à......................**217¼** fl.
10 „ 4perzentige Parziale vom Jahre **1821** à...................**146%**
8 „ Eisenbahn-Akzien von der Kaiser Ferdinands Nordbahn
(eingezahlt **2** Raten à **100** fl.) zu........**115%**
Auswärtige Forderungen: **45600** Piaster............(**402 Paras = 1** fl.)
9600 Franks............(Paris **117⅔**)
Platzforderung: **12800** fl. Silbermünze.

NB. Da unter dem letzten Posten sich eine zweifelhafte befindet, so werden sie sämmtlich nur zu **80%** einbringbar berechnet.

Das Haus wird geschätzt auf..............................**25800** fl. Silbermünze.
Präziosen und Effekten im Schätzungswerthe von......**3960** fl.

An Waaren.........**75** Zenten **60** ℔	à	**85** fl.	**40** Kr.	} Silbermze.
36 „ **75** ℔	à	**104** „	**12** „	
Wein.........**218** Eimer	à.............	**24** „	— —	

Passiva:

Kapitals-Einlage eines Kompagnons von **6000** fl. sammt den davon entfallenden Interessen zu **6¾%** für **8⅘** Monate.
Schuld in Hamburg **2148** mℓ Banko; Hamburg **146¾**.
„ Amsterdam **3145** fl. Holld.; Amsterd. **36¼** fl. Holld. = **30** fl. Silbm.
„ London........**145** ℔ Sterling à **10** fl. **2** Kr. Silbermünze.

Wie groß ist der Erbtheil der Witwe, der eines Sohnes und der einer Tochter? Ein wie großes Kapital hat die Witwe in der Handlung? Was bezieht die Witwe und jede Tochter jährlich an Interesse?

Da sich der Kompagnon erklärt, aus der Handlung austreten zu wollen, so vereinigen sich die Söhne mit ihm dahin, daß sie ihm sogleich seine von früher her fälligen Interessen und noch **2000** fl. bar hinausbezahlen wollen, die übrigen **4000** fl. aber in **2** gleichen von Vierteljahr zu Vierteljahr zahlbaren unverzinslichen Raten; oder, wenn der Kompagnon es vorzieht, den ganzen Betrag sogleich gegen **6%** Interessenvergütung.

Mit welchem Betrage kann der Kompagnon sogleich abgefertigt werden? Mit welchem Fonde beginnen die drei Brüder nach Abfertigung des Kompagnons die Handlung? Wie groß ist ihr eigenes Vermögen?

Auflösung.

Activa:

Silbermünze bar	fl. 16175
WW. fl. 12850 in Silbm.	„ 5140
750 # à 4 fl. 39 Kr.	„ 3487·5
8 Lose vom Jahre 1820	„ 1738
10 Parziale v. Jahre 1821	„ 3650
8 Stück Nordbahn-Akzien	„ 2800
45600 Piaster fl. 4537·3; 9600 Franks „ 3765·3; Platzforderung 12800; zusammen 21102·6; 20 % ab ..... 4220·5	fl. 16882·1
Schätzungspreis des Hauses	„ 25800
Präziosen und Effekten	„ 3960
Waaren: 75 Zt. 60 ℔	„ 6476·4
„ 36 Zt. 75 ℔	„ 3829·4
Wein 218 Eimer	„ 5232
Activa: Zusammen ...	fl. 95170·4

Passiva:

Kompagnon	fl. 6297„—
Hamburg	„ 1576·2
Amsterdam	„ 2602·8
London	„ 1454·8
Passiva	fl. 11930·8

Werden die **Passiva** von den **Activis** abgezogen, so folgt, daß die Verlassenschaftsmassa fl. 83239·6 beträgt.

Hiervon gebühren d. Witwe	fl. 32425·6
Einem Sohne	„ 9962·8
Einer Tochter	„ 10462·8

Ausgleichung mit der Witwe:

Besitz des Hauses	fl. 25800„—
1/3 Theil der Präziosen ..	„ 1320„—
Zusammen ...	fl. 27120„—

Demnach bleiben von der Witwe noch in der Handlung fl. 5305·6, wovon die jährlichen Interessen à 5% 265 fl. 16 Kr. betragen. Eine Tochter bezieht jährlich 523 fl. 8 Kr. Interessen.

Der Kompagnon erhält sogleich	fl. 2297„—
Ferner wegen 3 Monat früher	fl. 1970·5
„ „ 6 „ „	fl. 1941·7
Er wird daher sogleich abgefertiget mit	fl. 6209·2

Somit besteht der neue Fond:

in dem von der Witwe inliegendem Vermögen mit	fl. 5305·6
„ „ den 3 Söhnen „ „ „	„ 29888·4
„ „ „ 2 Töchtern „ „ „	„ 20925·6
Zusammen in	fl. 56119·6.

Eilfter Abschnitt.

Von der Gesellschafts-Rechnung.

§. 149. Zur Gesellschafts-Rechnung gehören alle jene Aufgaben, in welchen eine gegebene oder erst zu bestimmende Größe in mehrere Theile so getheilt werden soll, daß diese Theile in einem bestimmten geometrischen Verhältnisse stehen. Ist das Verhältniß ein einfaches, so nennt man das Verfahren die einfache Gesellschafts-Rechnung; ist das Verhältniß aus mehreren einfachen Verhältnissen zusammengesetzt, so wird das wegen dieser erforderliche Verfahren die zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnung genannt.

A. Von der einfachen Gesellschafts-Rechnung.

§. 150. Um das zur Auflösung einer Aufgabe der einfachen Gesellschafts-Rechnung erforderliche Verfahren kennen zu lernen, wollen wir folgende Aufgabe auflösen:

Es soll eine gegebene Größe **S** im Verhältnisse der Zahlen **A**, **B**, **C**, **D**, **E** u. s. w. getheilt werden. — Nimmt man an, daß die diesen Verhältnißzahlen entsprechenden Resultate α, β, γ, δ, ε u. s. w. sind, so folgt: daß die Summe dieser Theile gleich **S** seyn muß, oder daß

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + ... = S$ ist. Nach der Bedingung der Aufgabe ist aber

$$\begin{array}{lll} A : B = \alpha : \beta & \text{oder} & A : \alpha = B : \beta \\ B : C = \beta : \gamma & & B : \beta = C : \gamma \\ C : D = \gamma : \delta & & C : \gamma = D : \delta \\ D : E = \delta : \varepsilon \text{ u. s. w.} & & D : \delta = E : \varepsilon \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Hieraus sieht man, daß alle diese Verhältnisse unter einander gleich sind, daß also

$A : \alpha = B : \beta = C : \gamma = D : \delta = E : \varepsilon =$ u. s. w. sind. Hieraus folgt nach der Lehre von gleichen geometrischen Verhältnissen:

$$(A+B+C+D+E+......) : (\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+......) = A : \alpha$$

$$\begin{array}{llr} \text{oder auch: } (A+B+C+D+E+......) : S & = A : \alpha & = B : \beta \\ & = B : \beta & = C : \gamma \\ & = C : \gamma & = D : \delta \\ & = D : \delta & = E : \varepsilon \\ & = E : \varepsilon \text{ u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Demnach ergeben sich folgende Regeln des Ansatzes:

„Man hat immer so viele Proporzionen anzusetzen, als wie viele Theile „bestimmt werden sollen. In allen diesen Proporzionen ist das erste Glied „immer die Summe aller Verhältnißzahlen, das zweite Glied aber die zu „theilende Größe. Als drittes Glied erscheinen für die einzelnen Proporzionen „die einzelnen Verhältnißzahlen der Reihe nach, aus welchen die aufgefundenen vierten Glieder die entsprechenden zu bestimmenden Theile sind."

Als Probe zur Überzeugung über die richtige Auflösung dient, daß die Summe der gefundenen Theile gleich seyn muß der zu theilenden Größe.

(1) Die Zahl **10000** soll im Verhältnisse wie **4 : 5 : 6 : 7 : 8** getheilt werden.

$$\begin{array}{l} 30 : 10000 = 4 : \alpha ....\alpha = 1333\tfrac{1}{3} \\ 30 : 10000 = 5 : \beta ....\beta = 1666\tfrac{2}{3} \\ 30 : 10000 = 6 : \gamma ....\gamma = 2000 \\ 30 : 10000 = 7 : \delta ....\delta = 2333\tfrac{1}{3} \\ 30 : 10000 = 8 : \varepsilon ....\varepsilon = 2666\tfrac{2}{3} \\ \hline S = 10000 \end{array}$$

„—

§: 151. „Wenn alle Verhältnißzahlen ein gemeinschaftliches Maß haben, so dividire man sie vorläufig durch dasselbe, und stelle die Rechnung „mit den so verkleinerten Zahlen an;" denn für diesen Fall wird in den einzelnen Proporzionen immer das erste und dritte Glied mit einer und derselben Zahl dividirt, wodurch die Proporzion unverändert bleibt.

„Haben das erste und zweite Glied ein gemeinschaftliches Maß, so „verkürze man sie durch dasselbe, und schreibe in den später aufzustellenden „Proporzionen blos diese verkürzten Zahlen."

Eine Abkürzung des ersten Gliedes gegen das dritte wird nie vorgenommen, obgleich sie wegen der Lehre von den Proporzionen vorgenommen werden könnte.

„Sind die Verhältnißzahlen in Brüchen gegeben, so drückt man sie „vorläufig in ganzen Zahlen aus.“

„Hat die zu theilende Größe (das zweite Glied) einen Bruch, so richte „man diesen vorläufig ein, und setze seinen Nenner als Faktor ins erste Glied.“

(2) Vier Personen kaufen 10 Lotterie-Lose, und gewinnen damit 10000 fl., welche sie in Verhältnisse des von den einzelnen zum Ankaufe der Lose gegebenen Geldes unter sich theilen. A hat 16, B 20, C 28 und D 32 fl. gegeben. Wie groß ist der Gewinn eines Jeden?

A 16	4	24 : 10000	
B 20	5	3 : 1250 = 4 : α..................A gewinnt fl.	$1666\frac{2}{3}$
C 28	7	3 : 1250 = 5 : β..................B „ „	$2083\frac{1}{3}$
D 32	8	3 : 1250 = 7 : γ..................C „ „	$2916\frac{2}{3}$
		3 : 1250 = 8 : δ..................D „ „	$3333\frac{1}{3}$
			S = 10000 fl.

(3) A, B, C und D kaufen eine Waare um 24000 fl. und theilen beim Verkaufe den Gewinn in dem Verhältnisse der Beträge, welche jeder Einzelne zum Einkaufe hergab. A erhielt 600, B 375, C 300 und D 225 fl. Wie viel hat Jeder zum Einkaufe hergegeben?

A 600	8	20 : 24000	
B 375	5	1 : 1200 = 8 : α.....A hat zum Einkaufe gegeben fl.	9600
C 300	4	1 : 1200 = 5 : β.....B „ „ „ „	„ 6000
D 225	3	1 : 1200 = 4 : γ.....C „ „ „ „	„ 4800
		1 : 1200 = 3 : δ.....D „ „ „ „	„ 3600
			S = fl. 24000

(4) Die Zahl $10\frac{5}{7}$ soll in 3 Theile so getheilt werden, daß sich diese Theile verhalten wie $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$. Welche sind diese Theile?

	12	$25 : \frac{75}{7}$	
A $\frac{1}{2}$	6	7 : 3 = 6 : α........der Theil A ist	$\frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$
B $\frac{3}{4}$	9	7 : 3 = 9 : β........ „ „ B ist	$\frac{27}{7} = 3\frac{6}{7}$
C $\frac{5}{6}$	10	7 : 3 = 10 : γ........ „ „ C ist	$\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$
	25		Zusammen....$10\frac{5}{7}$.

§. 152. „Sind die Verhältnißzahlen leicht eine aus der andern zu be„stimmen, so braucht man blos für diejenige das Resultat mittelst der Pro„porzion zu bestimmen, aus welcher sich die andern leicht ableiten lassen. Die „übrigen Resultate ergeben sich aus dem Aufgefundenen sehr leicht durch die „wälsche Praktik.“

(5) Vier Personen sollen sich in 48000 fl. dergestalt theilen, daß sich ihre Theile $2 : 2\frac{1}{2} : 3 : 4$ verhalten. Was bekömmt jede Person?

A 2	4	23 : 48000 = 4 : α......A bekömmt fl.	8347„19
B 2½	5	23 : 48000 = 5 : β......B „ „	10434„18
C 3	6	= 6 : γ......C „ „	12521„17
D 4	8	= 8 : δ......D „ „	16695„15
	23		S = fl. 48000„—

(4).... 8347„19
(1).... 2086„22
(5)....10434„18
(6)....12521„17
(8)....16695„15.

§. 153. „Wenn die einzelnen Proporzionsglieder bedeutend große „Zahlen sind, so bestimme man vorläufig den Verhältniß-Exponenten, in„dem man das zweite Glied durch das erste dividirt, und multiplizire jede „Verhältnißzahl mit diesem Exponenten, die Produkte geben die verlangten „Resultate.“ Offenbar wird in den meisten Fällen die abgekürzte Multiplikazion angewendet werden müssen.

(6) Ein Kridatar ist an A 10879 fl. 30 Kr., an B 13745 fl. 40 Kr., an C 17079 fl. 48 Kr., an D 19274 fl. 32 Kr. schuldig. Sein Vermögen beläuft sich auf 15000 fl. Wie viel erhält jeder Gläubiger hiervon?

A) fl. 10879„30= 652770 Kr.
B) „ 13745„40= 824740 „
C) „ 17079„48=1024788 „
D) „ 19274„32=1156472 „
3658770.

3658770 : 15000=652770 : A u. s. w.

$$\frac{15000}{3658770} = 0{\cdot}0040997385.$$

A) 0·0040997385	B) 0·0040997385
77256	47428
2459843	3279791
204987	81995
8200	16399
2870	2869
287	164
A fl. 2676·187	B fl. 3381·218

C) 0·0040997385	D) 0·0040997385
8874201	2746511
4099739	4099739
81995	409974
16399	204987
2869	24598
327	1640
33	287
	8
C fl. 4201·362	D fl. 4741·233

A+B+C+D = 15000 fl.

§. 154. Oftmals sind die Verhältnißzahlen, nach welchen die Theilung vorgenommen werden soll, nicht ausdrücklich gegeben, sondern nur solche Bedingungen, aus welchen sich diese Zahlen aufstellen lassen, die man daher auch vorläufig zu bestimmen hat.

Eben so muß bisweilen die Größe, die getheilt werden soll, und manchmal müssen sowohl die Verhältnißzahlen als die zu theilende Größe vorläufig aus bestimmten anderen Abgaben abgeleitet werden, bevor man die eigentliche Gesellschafts-Rechnung in Anwendung bringen kann.

Überdieß werden in sehr vielen Fällen noch Nebenfragen gestellt, deren Beantwortung zwar nicht unmittelbar durch die Gesellschafts-Rechnung erfolgen kann, wozu sie aber durch ihre Resultate die Angaben liefert.

(7.) **60000** fl. sollen unter **5** Personen getheilt werden, daß **B** zweimal so viel als **A**, **C** die Hälfte von **A** und **B**, **D** $\frac{1}{3}$ Theil von **C**, und **E** $\frac{1}{6}$ Theil von **D** erhält. Was bekömmt Jeder?

Nimmt man an, **E** bekomme **1** fl., so muß **D 6**, **C 18**, **B 24**, und **A 12** bekommen. Demnach ist die Zahl **60000** im Verhältnisse wie **12 : 24 : 18 : 6 : 1** zu theilen, und man erhält für **A** $11803\frac{17}{61}$ fl., für **B** $23606\frac{34}{61}$, für **C** $17704\frac{56}{61}$, für **D** $5901\frac{39}{61}$, und für **E** $983\frac{37}{61}$ fl.

(8) Drei Personen unternehmen ein Geschäft mit einander, **A** gibt **10800** fl., **B 16800**, **C 8400** fl. Nach Beendigung des Geschäftes findet sich, daß der Gewinn **1800** fl. mehr als **20%** der Einlage beträgt. Was erhält Jeder zurück?

Hieraus wird die Aufgabe: **45000** fl. sollen im Verhältnisse **9 : 14 : 7** getheilt werden, und man findet für **A 13500**, für **B 21000** und für **C 10500** fl.

(9) Vier Erben sollen sich in die Verlassenschaft eines Kaufmanns in der Art theilen, daß **A** so oft **2** fl. erhält als **B 3**, **B** so oft **2** als **C 3**, **C** so oft **2** als **D 3**. Nach seinem Tode finden sich an barem Gelde **7500** fl., einzukassirende Schulden **6500** fl., Präziosen und Effekten im Schätzungswerthe von **6400** fl., ein Waarenlager im Schätzungswerthe von **14600** fl. Wie viel erhält jeder von diesen Erben?

Hieraus wird die Aufgabe: **35000** fl. sollen im Verhältnisse wie **8 : 12 : 18 : 27** vertheilt werden. Demnach erhält **A** $4307\frac{9}{13}$ fl., **B** $6461\frac{7}{13}$, **C** $9692\frac{4}{13}$ und **D** $14538\frac{6}{13}$ fl.

(10) Auf einem Schiffe hat **A** Waaren im Werthe von **10000** fl., **B** im Werthe von **12000** fl., **C** im Werthe von **8000** fl., **D** im Werthe von **6000** fl. Bei einem Sturme werden zur Erhaltung der übrigen Waaren von **A** für **4000** fl., von **C** für **2000** fl. über Bord geworfen. Wie groß ist der Verlust eines Jeden? Was bleibt Jedem noch? Wie viel haben **B** und **D** zu bezahlen? **A** bekömmt von **B 2000** fl., was hat er von **D** zu fordern? Wie werden sich **D** und **C** mit den übrigen ausgleichen?

Hieraus folgt die Aufgabe: Die Zahl **6000** ist im Verhältnisse wie **5 : 6 : 4 : 3** zu theilen. **A** verliert $1666\frac{2}{3}$, **B 2000**, **C** $1333\frac{1}{3}$, **D 1000** fl., woraus sich von selbst ergibt, was Jedem noch bleibt. **B** hat **2000**, **D 1000** fl. zu bezahlen. Wenn **A** von **B 2000** fl. erhält, so ist **B** ausgeglichen, und **A** hat von **D** noch $333\frac{1}{3}$ fl. zu fordern; **C** erhält von **D** $666\frac{2}{3}$ fl.

(11) In einem Lande ist die Steuer unter seine Kreise so vertheilt, daß, wenn 100000 fl. bezahlt werden sollen, der Kreis A 26561 fl. 32 Kr., der Kreis B 23686 fl. 50 Kr., der Kreis C 14634 fl. 28 Kr., der Kreis D 12055 fl. 35 Kr., der Kreis E 10603 fl. 25 Kr., der Kreis F 7286 fl. 46 Kr., der Kreis G 5171 fl. 24 Kr. zu bezahlen hat. Wenn nun eine Nebensteuer von 18769 fl. 48 Kr. entrichtet werden soll, was hat hiervon jeder Kreis zu bezahlen?

Antwort: A hat zu bezahlen 4985 fl. 32·76 Kr., B 4445 fl. 58·26 Kr., C 2746 fl. 51·54 Kr., D 2262 fl. 48·60 Kr., E 1990 fl. 14·40 Kr., F 1367 fl. 42·72 Kr., G 970 fl. 39·72 Kr.

(12) Mehrere Ortschaften vereinigen sich, eine Brücke zu bauen, welche 31873 fl. 36 Kr. kostet. Sie kontribuiren ihre Beiträge im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernungen von der Brücke. A ist von der Brücke 1 Meile, B 2, C 3, D 4, E 5 und F 6 Meilen weit entfernt. Was hat jede Ortschaft zu bezahlen?

Hieraus folgt die Aufgabe: Der Betrag von 31873 fl. 36 Kr. soll im Verhältnisse wie 60 : 30 : 20 : 15 : 12 : 10 getheilt werden. Antwort: A hat 13009 fl. 37·95 Kr., B 6504 fl. 48·98 Kr., C 4336 fl. 32·66 Kr., D 3252 fl. 24·49 Kr., E 2601 fl. 55·59 Kr., und F 2168 fl. 16·33 Kr. zu bezahlen.

(13) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte hat A 12000, B 9000, C 7000 fl. und D so viel eingelegt, daß er den $\frac{1}{6}$ Theil des ganzen Gewinnes erhält. Der Bücherabschluß weiset einen Gewinn von 11000 fl. aus. Wie groß ist die Einlage des D, und was gewinnt Jeder?

Man findet die Einlage des D = 5600 fl., und sonach ist die Aufgabe aufzulösen: Der Betrag von 11000 fl. soll im Verhältnisse wie 60 : 45 : 35 : 28 getheilt werden. A gewinnt daher 3928 fl. 34·29 Kr., B 2946 fl. 25·71 Kr., C 2291 fl. 40 Kr. und D 1833 fl. 20 Kr.

(14) Ein Vater hinterläßt seinen 6 Kindern ein Vermögen, welches sie auf folgende Art unter sich theilen sollen: A soll $\frac{1}{5}$ Theil + 1000 fl., B $\frac{1}{6}$ Theil + 2000 fl., C $\frac{1}{7}$ Theil mehr 3000 fl., D $\frac{1}{8}$ Theil + 4000 fl., E $\frac{1}{9}$ Theil + 5000 fl. und F den Rest mit 15000 fl. erhalten. Wie groß war das Vermögen, und was bekömmt jedes Kind?

Man wird finden, daß die Summe aus $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{1879}{2520}$ ist, daß also $\frac{641}{2520}$ Theile des Vermögens 15000 fl. ausmachen, woraus folgt, daß die ganze Verlassenschaft $117940\frac{460}{641}$ fl. beträgt; hiervon erhält A $24588\frac{92}{641}$ fl., B $21656\frac{504}{641}$, C $19848\frac{432}{641}$, D $18742\frac{378}{641}$, E $18104\frac{336}{641}$ und F 15000 fl.

(15) Jemand hinterläßt 146400 fl. Hiervon soll B so oft 5 als A 4, C so oft 5 als B 4, und D so oft 5 als C 4 f. erhalten. Von diesen Beträgen sollen dem A seine schon empfangenen 2400 fl., dem C seine schon empfangenen 2000 fl. abgerechnet werden; B aber soll noch 2000 und D 1200 fl. über den früher genannten Betrag erhalten. Was gebührt Jedem von diesen?

Hieraus wird die Aufgabe: Die Summe von 147600 fl. soll im Verhältnisse der Zahlen 64 : 80 : 100 : 125 getheilt werden. A erhält 23200 fl., B 34000, C 38000, D 51200 fl.

(16) Vier Personen vereinigen sich zur gemeinschaftlichen Unternehmung eines Geschäftes, welches einen Fond von **30000** fl. erfordert. **A** gibt **5000** fl., **B** gibt **112** Zt. **60** ℔ von einer Waare, wovon **1** Zt. um **89** fl. **40** Kr. übernommen wird, **C** gibt **129** Zt. **50** ℔ à **67** fl. **48** Kr., **D** gibt den zu **30000** fl. erforderlichen Rest. Zur bessern Besorgung des Geschäftes nehmen sie die Verwendung einer Person **E** in Anspruch, welcher sie **5%** des Gewinnes als Prämie versichern. Nach Beendigung des Geschäftes findet sich, daß die Prämie des **E 180** fl. beträgt.

Wie hoch belaufen sich die Waaren des **B** und **C**? Was hat **D** gegeben? Wie groß ist der Gesammtgewinn, und was gewinnt Jeder? Wie viele Prozente hat dieses Geschäft nach Abzug der Prämie verschafft?

Die Waaren des **B** belaufen sich auf **10096** fl. **28** Kr., die des **C** auf **8780** fl. **6** Kr., mithin war die Einlage des **D 6123** fl. **26** Kr. Der ganze Gewinn war **3600** fl., folglich betrug die zu vertheilende Summe **3420** fl. Hievon erhält **A 570** fl., **B 1150** fl. **59·832** Kr., **C 1000** fl. **55·884** Kr., und **D 698** fl. **4·284** Kr. Das Geschäft verschaffte einen Gewinn von **11**$^2/_5$ Prozenten.

(17) Drei Personen vereinigen sich zu einem Geschäfte. **A** gibt **2400** fl. **B 500** Eimer Wein, **C** einige Zenten von einer Waare, von welcher **1** Zt. **120** fl. werth ist. Nach vollendetem Geschäfte bekömmt **B** $\frac{20}{51}$ Theile, **C** $\frac{16}{51}$ und **A** den Rest. Wie groß war das ganze Kapital? Was kostet Ein Eimer des Weines von **B**, und wie viele Zenten Waare hat **C** gegeben?

Antwort: **A** gibt $\frac{15}{51}$ Theile des Ganzen, welche **2400** fl. betragen, also ist das Gesellschafts-Vermögen **8160** fl. Die Einlage des **B** war demnach **3200** fl., folglich kostet Ein Eimer **6** fl. **24** Kr.; die Einlage des **C** war **2560** fl., somit hat **C 21** Zenten **33**$^1/_3$ ℔ gegeben.

(18) Vier Kaufleute kaufen ein Schiff; **A** wird Eigenthümer von $^1/_4$ Theil, **B** von $^1/_8$ Theil, **C** von $^1/_{16}$ Theil, **D** von dem noch übrigen Theile. Der Theil des **D** kostet **5000** fl.

Der wie vielte Theil des Schiffes ist Eigenthum des **D**? Was kostet das Schiff? Was sind die Theile von **A**, **B** und **C** werth?

Antwort: **D** ist Eigenthümer von $^9/_{16}$ Theilen des Schiffes, welche **5000** fl. kosten, sonach ist der Werth des Schiffes **8888** $^8/_9$ fl. Der Theil des **A** ist im Werthe von **2222**$^2/_9$ fl., der des **B** von **1111**$^1/_9$ fl. und der des **C** von **555**$^5/_9$ fl.

(19) Ein Erblasser hinterläßt ein Vermögen von **71400** fl., welches dem **A**, **B**, **C** und **D** oder ihren Erben im Verhältnisse wie **3:4:5:6** zufallen soll. Weil **A** schon todt ist, so geht sein Vermögen auf **E** und **F**, und zwar im Verhältnisse wie **2:3** über; das Vermögen des **F** aber soll unter **G** und **H** im Verhältnisse wie **4:5** getheilt werden. Der Erbtheil des **C** fällt auf **K** und **L** im Verhältnisse wie **3:4**, und der des **K** auf **M**, **N** und **O**, im Verhältnisse wie **3:4:5**. Was bekömmt jede von den zu betheilenden Personen?

Hieraus wird die Aufgabe: Man theile wegen der Personen **B**, **D**, **E**, **G**, **H**, **L**, **M**, **N**, **O** die Verlassenschaft **71400** fl. in dem Verhältnisse wie **560:840:168:112:140:400:75:100:125**. Auf diese Weise findet man: **B** erhält **15866** fl. **40** Kr., **D 23800** fl., **E 4760** fl., **G 3173** fl. **20** Kr., **H 3966** fl. **40** Kr., **L 11333** fl. **20** Kr., **M 2125** fl., **N 2833** fl. **20** Kr., und **O 3541** fl. **40** Kr.

(20) Eine Handelsgesellschaft verkaufte eine große Parthie Waaren um 80400 fl. Die Verkäufer finden, daß, nach Abzug der an **C** und **D** als Geschäftsführer bedungenen Prämien, das ganze Geschäft **16⅔ %** vom Einkaufspreise als Gewinn bringe.

Die Waaren des **D** betragen so oft **5** fl. als die des **C** **6** fl.
" " " **C** " " **4** fl. " " **B** **5** fl.
" " " **B** " " **3** fl. " " **A** **5** fl.

C bedingt sich für seine Bemühung insbesondere **500** fl., **D** aber **¾ %** des Verkaufspreises.

Was sind die Waaren des **A**, **B**, **C** und **D** beim Beitritte werth? Was gewinnt Jeder? Wie theuer hat **A** Einen Zenten angerechnet, wenn er **216** Zt. **50** ℔ lieferte? Wie viele Zenten hat **B** gegeben, wenn er Einen Zenten zu **126** fl. **35⅖** Kr. anrechnet? **C** hat **120** Zt. **75** ℔ gegeben, wie theuer wurde ihm Ein Zenten angenommen? Wie viele Zenten hat **D** gegeben, wenn **1** Zt. um **108** fl. **56⅘** Kr. angenommen war?

Antwort: **C** erhält als Prämie **500** fl., **D** **603** fl. Es kommen daher zur Vertheilung **79297** fl. Hiervon ist der Preis der gelieferten Waaren **67968⁶⁄₇** fl., der Gewinn **11328¹⁄₇** fl. Sowohl die Waarenpreise als der Gewinn sind für **A**, **B**, **C** und **D** im Verhältnisse wie **25** : **15** : **12** : **10** zu theilen. Hieraus folgt:

	Antheil an den Waaren.	Antheil am Gewinne.	Zurückerhaltener Betrag.	
	217	434	434	
A....	fl. 27406,,173,	fl. 4567,,347...............	fl. 31974,,259	
B....	" 16444,, 17,	" 2740,,295...............	" 19184,,329	
C....	" 13155,, 57,	" 2192,,236...............	" 15847,,350	sammt
D....	" 10962,,156,	" 1827,, 52...............	" 13392,,364	den Prämien
Zusam.	67968⁶⁄₇ fl.	11328¹⁄₇ fl. Präm. 1103 fl.	80400 fl. —	

A rechnete **1** Zenten um **126** fl. **35·4** Kr. **B** hat **129** Zenten **90·03** ℔ gegeben.
C " **1** " um **108** fl. **56·8** Kr. **D** " **100** " **62½** "

B. Von der zusammengesetzten Gesellschafts-Rechnung.

§. 155. Wenn das Verhältniß, nach welchem irgend eine Größe getheilt werden soll, aus mehreren einfachen Verhältnissen zusammengesetzt ist, so sind die Bedingungen jedesmal im Zusammenhange wie Ursache und Zeit, und die durch die Theilung zu suchenden Größen können dann immer als die der Ursache und Zeit entsprechenden Wirkungen angesehen werden.

§. 156. *Die Wirkungen stehen jedesmal im zusammengesetzten Verhältnisse mit ihren Ursachen und Zeiten.* Der Grund dieser Behauptung ergibt sich aus folgenden Betrachtungen: Es sey eine Ursache (U) durch irgend eine Zeit (Z) thätig, und bringe eine Wirkung (W) hervor. Eben so sey eine andere Ursache (u) während der Zeit (z) thätig, und bringe die Wirkung (w) hervor. Denkt man sich nun die Ursache (U) des ersten Falles in der Zeit (z) des zweiten Falles thätig, so kann die Wirkung weder W noch w seyn, weil im ersten Falle die Zeiten, im zweiten die Ursachen verschieden sind. Setzen wir die Wirkung im dritten Falle gleich x, so muß bei Vergleichung des ersten Falles mit diesem $W : x = Z : z$ seyn, weil bei gleichen Ursachen die Wirkungen im Verhältnisse der Zeiten stehen

müssen, daher nmal größer oder kleiner werden, wie die Zeiten es sind. — Vergleicht man die Wirkung des dritten Falles mit der des zweiten, so werden diese Wirkungen im geraden Verhältnisse mit ihren Ursachen stehen, und nmal größer oder kleiner werden, wie diese es sind. Es muß sonach $x : w = U : u$ seyn. Aus diesen beiden Proporzionen folgt mittelst der Zusammensetzung

$$W : w = U \times Z : u \times z,$$ was zu beweisen war.

§. 157. Um das bei der Auflösung einer Aufgabe der zusammengesetzten Gesellschafts-Rechnung erforderliche Verfahren zu erkennen, so löse man die Aufgabe auf:

Eine Größe **S** soll nach dem Verhältnisse der Ursachen **A**, **B**, **C**, **D**, **E** u. s. w. und der dazu gehörigen Zeiten **a**, **b**, **c**, **d**, **e** u. s. w. getheilt werden.

Es seyen die entsprechenden Theile α, β, γ, δ, ε u. s. w., so ist offenbar $S = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots\ldots$ Auch muß nach der Bedingung der Aufgabe

$$\begin{aligned} Aa : Bb &= \alpha : \beta, \quad \text{also auch} \quad & Aa : \alpha &= Bb : \beta \\ Bb : Cc &= \beta : \gamma & Bb : \beta &= Cc : \gamma \\ Cc : Dd &= \gamma : \delta & Cc : \gamma &= Dd : \delta \\ Dd : Ee &= \delta : \varepsilon & Dd : \delta &= Ee : \varepsilon \\ &\text{u. s. w.} & &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß alle Verhältnisse der letzteren Zusammenstellung untereinander gleich sind, folglich auch, daß

$$(Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + \ldots.) : (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots.) = Aa : \alpha$$

oder

$$\begin{aligned} (Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + \ldots.) : S &= Aa : \alpha & &= Bb : \beta \\ &= Bb : \beta & &= Cc : \gamma \\ &= Cc : \gamma & &= Dd : \delta \\ &= Dd : \delta & &= Ee : \varepsilon \\ &= Ee : \varepsilon & &= \text{u. s. w.} \\ &= \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Aus diesen Zusammenstellungen ergeben sich folgende Regeln des Ansatzes:

„Man suche die Produkte aus jeder Ursache in ihre Zeit, und die Summe dieser Produkte."

„Ferner hat man so viele Proporzionen aufzustellen, als in wie viele „Theile die gegebene oder früher berechnete Größe getheilt werden soll. In allen „diesen Proporzionen ist:

„das erste Glied die Summe der Produkte aus jeder Ursache in ihre Zeit,

„das zweite Glied die zu theilende Größe,

„das dritte Glied in irgend einer Proporzion ist ein anderes Produkt aus „einer gegebenen Ursache in ihre Zeit, wozu der diesem Produkte entsprechen„den Theil das Resultat enthalten wird."

Die Regeln der Auflösung sind mit den für die einfache Gesellschafts-Rechnung aufgestellten übereinstimmend. Auch versteht sich von selbst, daß auch hier, wie bei den Aufgaben der einfachen Gesellschafts-Rechnung dieselben Nebenbedingungen vorkommen, und dieselben Auflösungs-Verkürzungen, wie sie im §. **152** und **153** angegeben sind, angewendet werden können.

(21) Zur Führung eines Geschäftes verbinden sich **A**, **B**, **C** und **D**. **A** gibt **5400** fl. auf **8** Monate, **B 6400** fl. auf **9** Monate, **C 7200** fl. auf **10** Monate, **D 9000** fl. auf **6** Monate. Dieses Geschäft bringt einen Gewinn von **6510** fl., wie groß ist der Antheil jeder Person an diesem Gewinne?

A 5400×8	6×8	6×2	12	63 : 6510 = 12 : A
B 6400×9	64×1	16×1	16	21 : 2170
C 7200×10	8×10	2×10	20	3 : 310 = 12 : A
D 9000×6	10×6	5×3	15	A = 1240 fl.
			63	

(12).........fl. 1240„—
(4).........fl. 413„20
(16).........fl. 1653„20
(20).........fl. 2066„40
(5).........fl. 516„40
(15).........fl. 1550„—

A erhält fl. 1240„—
B „ fl. 1653„20
C „ fl. 2066„40
D „ fl. 1550„—
S = fl. 6510„—

(22) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte, welches einen Fond von 48000 fl. erfordert, gibt A 1/5 Theil auf 12 Monate, B 1/3 Theil auf 10 Monate, C 3/8 Theile auf 8 Monate, D den Rest auf 4 Monate. Bei diesem Geschäfte werden 12000 fl. verloren. Was verliert Jeder? Was bleibt Jedem?

		91		91
Antwort: A	verliert fl.	3164„76,	und bekömmt zurück fl.	6435„15
B	„ „	4395„55	„ „ „ „	11604„36
C	„ „	3956„ 4	„ „ „ „	14043„87
D	„ „	483„47	„ „ „ „	3916„44
	Verlust....fl.	12000„—	Rückerstattung....fl.	36000„—

(23) Ein Kaufmann hatte 5 Söhne. Als der älteste zur Selbstständigkeit geeignet war, gab er ihm 8000 fl. und sandte ihn nach Indien. Nach 5 Jahren schickte er seinen zweiten Sohn mit einem Kapitale von 9000 fl. eben dorthin, um sich mit seinem Bruder zu assoziren. Vier Jahre später schickte er seinen dritten Sohn mit einem Kapitale von 10000 fl., wieder 3 Jahre später seinen vierten Sohn mit 11000 fl., und noch 2 Jahre später seinen fünften Sohn mit 12000 fl. zu demselben Zwecke. — Nachdem die Brüder 8 Jahre nach der Ankunft des jüngsten gemeinschaftlich ihr Geschäft geführt hatten, beschlossen sie, sich zu trennen, und es fand sich eine Kapitalsvermehrung von 147630 fl. Sie vereinigen sich dahin, diesen Überschuß im Verhältnisse ihrer Einlagen und der Anzahl der Jahre, wie sie in das Geschäft eingetreten waren, unter sich zu theilen. Wie groß ist der Gewinn jedes Einzelnen, und was bekömmt Jeder für sich? Wie viele Prozente werden bei diesem Geschäfte gewonnen?

Hieraus folgt die Aufgabe: Der Betrag von 147630 fl. soll im Verhältnisse 8×22 : 9×17 : 10×13 : 11×10 : 12×8 getheilt werden. Der Gewinn des A beträgt 39072 fl., der des B 33966 fl., der des C 28860 fl., der des D 24420 fl., und der des E 21312 fl. Aus den Resultaten für jeden Einzelnen findet sich, daß dieses Geschäft einen Gewinn von 22 2/5 % verschafft hat.

(24) Vier Metzger miethen eine Wiese um 250 fl. A gibt 40 Stück Vieh auf 40 Tage, B 45 auf 36 Tage, C 50 auf 32 Tage, und D 60 auf 28 Tage. Was hat Jeder zu bezahlen?

Antwort: A 61 7/13 fl., B 62 4/13 fl., C 61 7/13 fl. und D 64 8/13 fl.

(25) Ein Fuhrmann übernimmt **100** Zenten Waare gegen eine Bezahlung von **384** fl. Die erste Ladung von **30** Zenten führt er **64** Meilen weit, die zweite von **35** Zenten **48** Meilen und den Rest in einer dritten Ladung **56** Meilen weit. Was beträgt die Bezahlung für jede einzelne Ladung?

Antwort: Für die erste $132\frac{84}{139}$ fl., für die zweite $116\frac{4}{139}$ fl., und für die dritte $135\frac{51}{139}$ fl.

(26) Fünf Gemeinden sollen zur Herstellung einer Brücke, welche **18000** fl. kostet, erstlich nach dem Verhältnisse der Häuserzahl, zweitens im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernungen von der Brücke ihre Beiträge leisten.

A	hat	750	Häuser und liegt	½	Meile	entfernt,
B	„	2700	„ „ „	1	„	„
C	„	1800	„ „ „	1½	„	„
D	„	500	„ „ „	2	„	„
E	„	3000	„ „ „	2¼	„	„

Was hat jede Gemeinde zu bezahlen?

Die Aufgabe verlangt, daß der Betrag von **18000** fl. im Verhältnisse wie $750 \times 2 : 2700 \times 1 : 1800 \times \frac{2}{3} : 500 \times \frac{1}{2} : 3000 \times \frac{4}{9}$ getheilt werden soll; sonach hat A $3866\frac{146}{419}$, B $6959\frac{179}{419}$, C $3093\frac{33}{419}$, D $644\frac{164}{419}$ und E $3436\frac{316}{419}$ fl. zu bezahlen.

(27) An einem Festungswerke arbeiten aus einem Orte A **240** Arbeiter **18** Tage, aus einem Orte B **150** Arbeiter **12** Tage, aus einem Orte C **180** Arbeiter **11** Tage, aus einem Orte D **90** Arbeiter **15** Tage, aus einem Orte E **60** Arbeiter **14** Tage. Die ganze Bezahlung beträgt **7717** fl. **30** Kr. Was hat jeder einzelne Ort zu erhalten, und was betrug der Taglohn?

Antwort: Der Ort A erhält **3240** fl., B **1350** fl., C **1485** fl., D **1012½** fl. und E **630** fl. Der tägliche Betrag eines Arbeiters war **45** Kr.

(28) A fängt ein Geschäft mit **16000** fl. an. Zwei Monate später verbindet er sich zum besseren Betriebe mit B, der **20000** fl. einlegt, aber nach Einem Monate wieder **2000** fl. herausnimmt. Wieder um Einen Monat später verbindet sich C mit einem Kapitale von **15000** fl. Ein Monat hierauf nimmt A **6000** fl. heraus, wieder um Ein Monat später nimmt C **1000** fl. und abermals nach Einem Monate nimmt B **3000** fl. heraus. Von dieser Zeit an bleibt der Fond mit den noch vorhandenen Einlagen bis zum Ende des Jahres seit dem Beginne der Unternehmung, d. i. durch **5** Monate, unverändert. Nach Abschluß der Rechnung findet sich ein Gewinn von **8500** fl. Welchen Antheil hat Jeder an diesem Gewinne?

Der Antheil des A ist abhängig von $16000 \times 5 + 10000 \times 7$
„ „ „ B „ „ $20000 \times 1 + 18000 \times 4 + 15000 \times 5$
„ „ „ C „ „ $15000 \times 2 + 14000 \times 6$.

A gewinnt $2958\frac{102}{431}$ fl., B $3293\frac{217}{431}$ fl., C $2248\frac{112}{431}$ fl.

(29) A, B und C schließen einen Gesellschafts-Vertrag. A gibt **720** fl. auf **5** Monate, B **500** ℔ von einer Waare auf **6** Monate, C **900** fl. auf eine unbekannte Anzahl von Monaten. Das unternommene Geschäft gibt einen Gewinn von **504** fl., welche die Theilnehmer so unter sich zu theilen haben, daß A so oft **2** als B **5** fl. erhält; ferner daß B so oft **4** als C **7** fl. bekömmt.

— Was gewinnt jede Person? Wie theuer rechnet **B** 1 ℔ von seiner Waare? Wie lange war **C** in der Gesellschaft?

Antwort: **A** gewinnt **64** fl., **B 160** fl., **C 280** fl. **B** rechnet **1** ℔ von seiner Waare um **3** fl. — **C** war **17½** Monat in der Gesellschaft.

Die Beantwortung der übrigen Rechnungsfragen bezieht sich auf die Bestimmung der Produkte aus den Einlagen und der Zeit eines Jeden. Das Produkt für **A** ist aus seinen Angaben bestimmbar, es ist nämlich $720 \times 5 = 3600$. Die Produkte für **B** und **C** lassen sich aus diesem bekannten Produkte und den frühern Verhältnißzahlen, oder aus dem Verhältnisse der Gewinne ableiten.

Für **B**:	Für **C**:
8 : 20 = 3600 : ?	8 : 35 = 3600 : ?
Produkt....9000	Produkt....15750

Nun ist **9000** das Produkt für **500** ℔ × mit dem Preise Eines Pfundes ×**6**; folglich ist der Preis Eines Pfundes **9000 : 3000 = 3** fl.

15750 ist das Produkt aus **900** fl. × mit der noch zu bestimmenden Anzahl von Monaten, welche sonach gleich **15750 : 900 = 17½** Monate ist.

(**30**) Vier Personen unternehmen gemeinschaftlich ein Geschäft. **A** gibt **8400** fl. auf **3** Monate, **B** gibt **48** Zenten **75** ℔ von einer Waare auf **4** Monate, **C** gibt mehrere Zenten von einer Waare, den Zenten zu **250** fl. **36** Kr. berechnet, auf **5** Monate, **D** gibt eine Summe Geldes auf **6** Monate. Den Gewinn von **13760** fl. vertheilen sie so unter sich, daß **A** so oft **3** fl. erhält als **B 5**; **B** so oft **3** als **C 4**, und **C** so oft **3** als **D 2** fl. — Wie groß ist der Gewinn eines Jeden? Wie viele Gulden kostet **1** Zenten von der Waare des **B**? Wie viele Zenten hat **C** gegeben? Welchen Kapitalsbetrag hat **D** gegeben?

Antwort: **A** gewinnt **2160** fl., **B 3600** fl., **C 4800** fl. und **D 3200** fl.

Als Produkte zur Berechnung der noch weiter verlangten Größen findet man für **A 25200**; für **B 42000**; für **C 56000**; für **D 37333⅓**. Hieraus folgt: daß **1** Zenten von der Waare des **B** $215\frac{5}{13}$ fl. kostet; daß **C 44** Zenten $69\frac{343}{1253}$ ℔ gegeben hat, und daß die Kapitalseinlage des **D** $6222\frac{2}{9}$ fl. war.

Zwölfter Abschnitt.

Von der Allegazions-Rechnung.

§. 158. Unter der Allegazions- oder auch der Vermischungs-Rechnung versteht man das Verfahren, die Größen oder Mengen verschiedenartiger Dinge zu bestimmen, um daraus ein gleichartiges Ganzes von bestimmter Größe und Eigenschaft zu erhalten. Z. B. zu bestimmen, wie viel Mark **12**löthiges und wie viel Mark **15**löthiges Silber man zu legiren hat, um **24** Mark **13**löthiges Silber zu erhalten. Sie erhält ihre Benennung von ihrer vorzüglichsten Anwendung, welche beim Vermengen und Vermischen verschiedenartiger Körper, oder beim Legiren der Metalle Statt findet.

§. 159. Die Bedingungen bei den Aufgaben der Allegazions-Rechnung sind: daß der Werth oder Feingehalt bei der Mischung oder Legirung kleiner ist als die theuerste oder feinste, „hingegen größer als die wohlfeilste oder rau- heste zu verwendende Gattung. Übrigens wird bei Berechnungen, welche hier- her gehören, immer vorausgesetzt, daß durch die Mischungen oder Legirungen nichts verloren geht, und auch sonst auf keine Weise ein Zuwachs oder Abgang Statt finde, daß daher der Werth der zu mischenden oder der Feingehalt der zu legirenden Quantitäten, dem Werthe der gemischten oder dem Feingehalte der legirten Quantitäten gleich ist.

Hieraus ist ersichtlich, daß dasjenige, was durch die geringeren Sorten zu wenig vorhanden ist, um den verlangten Werth oder Feingehalt zu haben, durch die Quantität von der bessern Sorte wieder ersetzt werden muß.

Werden zur Herabsetzung des Werthes oder Feingehaltes fremdartige Dinge mit verwendet, z. B. zu Flüssigkeiten Wasser, zu edlen Metallen Ku- pfer u. dgl., so werden diese fremdartigen Beimischungen ihrem Werthe nach gleich Null genommen, und nur ihrer Quantität nach berücksichtiget. Sind hingegen zur Erhöhung des Werthes der Mischung oder der Legirung werth- vollere oder vollständig reine Gegenstände zu nehmen, so sind diese sowohl ih- rer Quantität als ihrer Qualität nach genau zu würdigen.

§. 160. Die Bemerkung, daß bei der Legirung einer geringern Sorte mit einer besseren zu einer Mittelsorte das, was in der Quantität der gerin- gern Sorte zu wenig vorkommt, durch die Quantität der höhern Sorte wieder mehr vorkommen muß, lehrt uns die Verhältnißzahlen be- stimmen, nach welchen die Quantität getheilt werden muß, die man durch die Legirung erhalten will. Soll z. B. aus 9 und 15löthigem Silber 13löthiges legirt werden, so darf man nur vom 9löthigen Silber so viele Marke nehmen, als wie viele Loth fein Silber Eine Mark des 15löthi- gen mehr enthält, als Eine Mark des 13löthigen (der Mittelsorte); hingegen vom 15löthigen so viele Marke, als die Differenz der Mittelsorte gegen die geringere Sorte anzeigt. Im vorliegenden Falle erhält man in (15—13) = 2 Mark 9löthiges Silber um 8 Loth fein weniger, als man in 2 Mark 13löthigem Silber haben soll; hingegen in (13—9) = 4 Mark 15lö- thigen Silber um 8 Loth fein mehr, als in 4 Mark 13löthigem ent- halten seyn sollen; mithin gleichen sich diese Differenzen wechselseitig aus, und man muß durch die Legirung von 2 Mark 9löthigem Silber mit 4 Mark 15löthigem, 6 Mark 13löthiges erhalten. Und somit ist jede andere Anzahl Mark Silber, die 13löthig erhalten werden soll, aus dem 9löthigen und 15löthigen zu erhalten, wenn man die verlangte Quantität im Verhältnisse 2 : 4 theilt. Sollen z. B. 36 Mark 13löthigen Silbers aus 9 und 15löthigem Silber legirt werden, so findet man die entsprechenden Quantitäten jeder Sorte, wenn man 36 im Verhältnisse wie 2 : 4 oder kürzer, wie 1 : 2 theilt, wor- aus erfolgt: Man hat zur verlangten Legirung 12 Mark 9löthiges und 24 Mark 15löthiges Silber zu nehmen.

Auch folgt ferner, daß, nachdem mittelst der Allegazion die Verhält- nißzahlen zur Theilung der gegebenen Quantität aufgestellt sind, die weitere Berechnung nach den schon bekannten Regeln der Gesellschafts-Rechnung aus- geführt werden muß.

Es ergeben sich hieraus folgende Regeln:

„Soll aus Einer bessern und Einer geringern Sorte eine bestimmte „Quantität irgend einer Mittelsorte gesucht werden, so vergleiche man den

„Feingehalt jeder Sorte mit dem Feingehalte der Mittelsorte, und setze die „Differenz der andern Sorte bei." Der leichtern Übersicht wegen pflegt man den Feingehalt der Mittelsorte zur Seite zu setzen, die Differenzen aber rechts von dieser. Für den vorliegenden Fall würde man bequem schreiben:

15	13	4
9		2

„Die aufgefundenen Differenzen sind die Verhältnißzahlen, „nach welchen die Theilung der Quantität vorzunehmen ist."

„Sind die so aufgefundenen Verhältnißzahlen Brüche oder vermischte „Zahlen, so bringe man sie auf einen gemeinschaftlichen Nenner, und nehme „in der Rechnung blos die Zähler dieser Brüche als die entsprechenden Ver„hältnißzahlen."

§. **161.** Um die Richtigkeit dieses Verfahrens als allgemein gültig zu erweisen, wollen wir nachstehende Aufgabe auflösen:

Es sollen von einer höheren Sorte z. B. vom H löthigen, und irgend einer niederen Sorte, dem N löthigen Silber S Marke von irgend einer Mittelsorte, vom M löthigen Silber legirt werden.

Wie viele Marke sind vom H löthigen und wie viel vom N löthigen Silber zu nehmen?

Setzt man die vom H löthigen Silber zu benützende Anzahl Mark gleich x, die vom N löthigen gleich y, so müssen in der ersten Sorte Hx, in der zweiten Ny Lothe fein Silber enthalten seyn. Da aber die Summe der Lothe fein Silber in den zu legirenden Sorten gleich seyn muß, der in der Legirung verlangten Anzahl Lothe fein Silber, welche offenbar SM ist, so folgt, daß

$$Hx + Ny = SM \text{ seyn muß.}$$

Ferner muß auch die Summe der Marke in den zu legirenden Sorten der Anzahl Marke, die durch die Legirung erhalten werden soll, gleich seyn; folglich ist

$$x + y = S.$$

Löset man diese Gleichungen auf, so findet man:

$$Hx + Ny = SM$$
$$Nx + Ny = SN$$
$$x(H-N) = S(M-N)$$
$$x = (M-N)\frac{S}{H-N}, \text{ und}$$
$$y = S - x = S - \frac{S(M-N)}{H-N}$$
$$y = (H-M)\frac{S}{H-N}.$$

Formirt man aus diesen für x und y aufgefundenen Werthen Proporzionen, mit der Berücksichtigung, daß die Unbekannte im vierten Gliede stehen soll, so folgt:

$$(H-N) : S = (M-N) : x$$
$$(H-N) : S = (H-M) : y$$

Bemerkt man zugleich, daß $H-N = (H-M) + (M-N)$ ist, so ersieht man hieraus, daß die Auflösung der vorliegenden Aufgabe zur Gesellschafts-Rechnung gehört, in welcher verlangt wird, die zu legirende Quantität S im Verhältnisse wie $(M-N) : (H-M)$ zu theilen, und daß durch $(M-N)$ im dritten Gliede der Theil für die höhere, durch $(H-M)$ der Theil für die niedere Sorte erhalten wird, was die früher aufgestellten Verfahrungsarten vollständig begründet.

§. 162. Will man sich von der Richtigkeit der Auflösung einer Aufgabe die Überzeugung verschaffen, so kann dieß geschehen:

1. wenn man untersucht, ob der Werth oder Feingehalt nach der Mischung oder Legirung der Summe der Werthe oder Feingehalte von den zu mischenden oder zu legirenden Quantitäten gleich ist, oder
2. wenn man untersucht, ob das durch die geringeren Sorten zu wenig Genommene durch das durch die höhern Sorten zu viel Genommene kompensirt wird (demselben gleich ist).

Trifft Eine dieser beiden Bedingungen ein, so ist auch die andere nothwendig verbunden, und man hat die Überzeugung von der richtigen Auflösung.

Beispiele.

(1) Jemand will aus 9löthigem und 15löthigem Silber 36 Mark 13löthiges Silber legiren. Wie viel Marke sind von jeder Sorte zu nehmen?

A 9	13	2	1		3 : 36 = 1 : A.
B 15		4	2		= 2 : B
			3		

Vom 9löthigen 12 Mark, diese enthalten 108 Loth fein,
„ 15löthigen 24 „ „ „ 360 „ „

36 Mark enthalten..........468 Loth fein.

In 36 Mark 13löthigen Silber sollen aber wirklich 468 Loth fein Silber enthalten seyn.

Zweite Probe: 12 Mark 9löthigen Silbers enthalten 12×4 oder 48 Loth fein Silber zu wenig, welche in 24 Mark 15löthigem Silber, (24 ×2 = 48 Loth) enthalten sind, so daß das zu Wenige von der geringeren Sorte durch das zu Viele von der höheren Sorte genau kompensirt wird.

(2) Jemand will 60 Eimer Wein so mischen, daß Ein Eimer 35 fl. werth ist. Er nimmt dazu Weine, den Eimer zu 42 und zu 18 fl. Wie viele Eimer sind von jeder dieser beiden Sorten zu nehmen?

A „ 42	35	17	24 : 60 = 17 : A	A = 42½ à 42 = 1785	+ 297½ fl.
B „ 18		7	2 : 5 = 17 : A	B = 17½ à 18 = 315	— 297½ fl.
		24	2 : 5 = 7 : B	60 E. à 35 fl. = fl. 2100„—	

(3) Jemand will 20 Zenten Kaffee à 63 fl. mischen. Wie viel Zenten muß er vom Kaffee zu 75 fl. per Zenten, und wie viele vom Kaffee zu 60 fl. nehmen, um diese Mischung zu erhalten?

A 75	63	3	1	5 : 20 = 1 : A;	A = 4
B 60		12	4	5 : 20 = 4 : B;	B = 16

Von A 4 Zt. à 75 fl. kosten fl. 300„— + 48 fl.
Von B 16 Zt. à 60 fl. „ fl. 960„— — 48 fl.

20 Zt. à 63 fl. „ fl. 1260„—

(4) Aus 18 und 22½karatigem Golde sollen 9 Mark 20karatiges Gold legirt werden; wie viele Mark hat man von jeder Sorte zu nehmen?

A 22½	20	2	4	9 : 9 = 4 : A; A = 4
B 18		2½	5	9 : 9 = 5 : B; B = 5

4 Mark à $22\frac{1}{2}$ Karat	enhalten	90 Karat	}	+ 10
5 „ à 18 „	„	90 „	}	— 10
9 Mark à 20 Karat	enthalten	180 Karat.		

(5) Jemand will $15\frac{1}{2}$ Mark $12\frac{1}{2}$löthiges Silber aus $9\frac{3}{4}$ und $13\frac{5}{8}$löthigem Silber legiren; wie viele Marke und Lothe muß er von jeder Sorte nehmen?

A	$9\frac{3}{4}$	$12\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	9	oder	$9\frac{6}{8}$	$12\frac{4}{8}$ d. i.	78	100	9
B	$13\frac{5}{8}$		$2\frac{3}{4}$	22		$13\frac{5}{8}$		109		22

Von A $4\frac{1}{2}$ Mark à $9\frac{3}{4}$ Loth	geben	$43\frac{7}{8}$ Loth	}	+ $12\frac{3}{8}$
Von B 11 „ à $13\frac{5}{8}$ „	„	$149\frac{7}{8}$ „	}	— $12\frac{3}{8}$
$15\frac{1}{2}$ Mark à $12\frac{1}{2}$ Loth	geben	$193\frac{3}{4}$ Loth fein.		

(6) Jemand will aus 21 Mark $12\frac{1}{2}$löthigem Silber eben so viel 14löthiges Silber legiren. Wie viel Mark und Loth wird er von der gegebenen Quantität wegnehmen, und dafür ganz feines Silber zusetzen müssen?

A	$12\frac{1}{2}$	14	2	4	$7 : 21 = 4 : A;\ A = 12$
B	16		$1\frac{1}{2}$	3	$7 : 21 = 3 : B;\ B = 9$

Antwort: Man muß 9 Mark wegnehmen, und dafür eben so viel ganz reines Silber hinzugeben.

12 Mark à $12\frac{1}{2}$ Loth fein	enthalten	150 Loth	}	— 18 Loth.
9 „ à 16 „ „	„	144 „	}	+ 18 Loth.
21 Mark à 14 Loth fein	enthalten	294 Loth fein.		

(7) Jemand will zu 21 Mark $12\frac{1}{2}$löthigem Silber so viel fein Silber zusetzen, daß die Legirung 14löthig wird. Wie viel Mark fein sind zuzusetzen, und wie viel Mark wiegt die ganze Legirung?

Für diesen Fall ist nicht mehr die Quantität 21 Mark zu theilen, sondern es ist zu bestimmen, wie viele Mark Silber zuzugeben sind, um eine Legirung von bestimmter Eigenschaft zu erhalten. Dieß wird durch eine Regel de Tri gefunden.

Wir wissen aus der Auflösung der früheren Aufgabe, daß sich die Quantitäten des $12\frac{1}{2}$löthigen zum 16löthigen Silber wie $12 : 9$, besser wie $4 : 3$ verhalten. Daraus folgt: $4 : 3 = 21 : ?$; $15\frac{3}{4}$ Mark.

Man muß also $15\frac{3}{4}$ Mark ganz feines Silber zusetzen, und bekömmt sodann $36\frac{3}{4}$ Mark 14löthiges Silber.

21 Mark à $12\frac{1}{2}$ Loth	enthalten	$262\frac{1}{2}$ Loth fein	}	— $31\frac{1}{2}$
$15\frac{3}{4}$ „ à 16 „	„	252 „ „	}	+ $31\frac{1}{2}$
$36\frac{3}{4}$ „ à 14 „	„	$514\frac{1}{2}$ „ „		

Wollte man auf das aus der früheren Auflösung aufgefundene Verhältniß nicht Rücksicht nehmen, so könnte man diese Aufgabe in eine Gleichung setzen, indem man die von ganz feinem Silber zu nehmende Anzahl der Marke mit x bezeichnet. Sonach erhält man:

Vor der Legirung: von A 21 Mark à $12\frac{1}{2}$ Loth enthalten $262\frac{1}{2}$ L. fein.
von B x „ à 16 „ „ 16x „ „

von A und B zusam. $(21+x)$ Mark „ $(16x+262\frac{1}{2})$ „.

Nach der Legirung: $(21+x)$ Marke à 14 Loth enthalten $(294+14x)$ Loth fein.

Hieraus wird die Gleichung: $16x+262\frac{1}{2}=294+14x$, aus welcher $x=15\frac{3}{4}$ gefunden wird.

(8) Jemand will aus 12 Mark $14\frac{1}{2}$löthigem Silber durch Legiren ein $12\frac{1}{2}$löthiges Silber erhalten.

1. Wie viel Mark muß man von den gegebenen **12** Mark wegnehmen, und dafür Kupfer legiren, um wieder **12** Mark, aber $12\frac{1}{2}$löthiges Silber zu erhalten?
2. Wie viel Kupfer muß der ganzen gegebenen Quantität beigegeben werden, um den verlangten Feingehalt zu erhalten, und wie schwer wird die neue Legirung?

A $14\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	25
B 0		2	4

$29 : 12 = 4 : ?$ Man muß $1\frac{19}{29}$ Mark wegnehmen, und dafür zum Reste eben so viel Kupfer legiren.

$10\frac{10}{29}$ Mark à $14\frac{1}{2}$ Loth geben 150 Loth fein } + $20\frac{20}{29}$ Loth.
$1\frac{19}{29}$ „ à 0 „ „ 0 „ „ } — $20\frac{20}{29}$ „

12 Mark à $12\frac{1}{2}$ „ „ 150 Loth fein.

Beziehungsweise auf den zweiten Theil der Aufgabe löse man, nachdem aus der früheren Auflösung das Verhältniß **25 : 4** bekannt ist, die Regel de Tri-Aufgabe auf: $25 : 4 = 12 : ?$, und man findet $1\frac{23}{25}$ Mark; folglich sind den gegebenen **12** Marken $1\frac{23}{25}$ Mark Kupfer zuzusetzen, um $13\frac{23}{25}$ Mark von dem verlangten Feingehalte zu bekommen.

12 Mark à $14\frac{1}{2}$ Loth enthalten 174 Loth fein } + 24 Loth
$1\frac{23}{25}$ „ à 0 „ „ 0 „ „ } — 24 „

$13\frac{23}{25}$ Mark à $12\frac{1}{2}$ Loth fein enthalten 174 Loth fein.

Wäre das durch die erste Auflösung aufgefundene Verhältniß nicht bekannt, oder wollte man es nicht benützen, so würde man seinen Zweck wieder durch eine Gleichung erreichen. Man setze für die Menge des hinzuzugebenden Kupfers x Marke, so hat man:

Vor der Legirung von A 12 Mark à $14\frac{1}{2}$ Loth fein oder 174 Loth fein.
B x „ à 0 „ „ „ 0 „ „

Von A und B zusammen $(12+x)$ Marke enthalten 174 Loth.

Nach der Legirung: $(12+x)$ Marke à $12\frac{1}{2}$ Loth fein enthalten

$150 + \frac{25x}{2}$ Loth fein.

Hieraus wird die Gleichung $\frac{25x}{2} + 150 = 174$, aus welcher $x = 1\frac{23}{25}$ Mark gefunden wird, wie früher.

(9) Jemand hat 100 Eimer Wein im Werthe zu 28 fl. den Eimer. Diesen will er um 22 fl. verkaufen. Wie viel Eimer Wein muß er wegnehmen, und dafür Wasser hinzugeben, um die entsprechende Mischung zu erhalten? Oder, wie viel Wasser muß er beimischen, um den Wein im Werthe von 22 fl. zu erhalten, und wie viel solchen Wein wird er haben? — Antwort: Im ersteren Falle sind $21\frac{3}{7}$ Eimer wegzunehmen, und das Hinweggenommene mit Wasser zu ersetzen. Für die zweite Bedingung sind $27\frac{3}{11}$ Eimer Wasser beizumischen, und sonach hat man $127\frac{3}{11}$ Eimer des gemischten Weines von der verlangten Qualität.

§. 163. Soll die Legirung nicht blos aus zwei, sondern aus mehreren Sorten gemacht werden, so setze man wieder die Sorten geordnet unter einander, und diesen zur Seite den Werth oder Feingehalt der Mittelsorte; sodann verbinde man immer eine höhere und eine niedere Sorte, und schreibe die jedesmalige Differenz zur andern Sorte. Dieses Verfahren wird so lange

fortgesetzt, bis man durch alle Angaben durchgekommen ist. Die auf diese Weise aufgefundenen Differenzen sind die Verhältnißzahlen, nach welchen die Quantität zu theilen ist.

Kommen mehr höhere Sorten vor als niedere oder umgekehrt, so kann man auch eine und dieselbe Sorte mit zwei oder mehreren der andern Art allegiren; nur muß für jede neue Allegirung wieder die entsprechende Differenz bemerkt werden. Die Summe aller Differenzen bei einer und derselben Sorte gibt die wegen dieser Sorte erforderliche Verhältnißzahl zur Theilung der Quantität.

(10) Jemand will aus 14½löthigem, 14löthigem und 11löthigem Silber 60 Mark 13löthiges Silber legiren. Wie viel Marke muß er von jeder Sorte nehmen?

A 14½		2	4	13 : 60 = 4 : A
B 14	13	2	4	A = B = 18⁶⁄₁₃ Mark
C 11		1½ + 1	5	13 : 60 = 5 : C; C = 23¹⁄₁₃ Mark.

13

A 18⁶⁄₁₃ Mark	à 14½	Loth	enthalten	267 „ 9	fein	+ 27⁹⁄₁₃	46²⁄₁₃.
B 18⁶⁄₁₃ „	à 14	„	„	258 „ 6	„	+ 18⁶⁄₁₃	
C 23¹⁄₁₃ „	à 11	„	„	253 „ 11	„		— 46²⁄₁₃.

60 Mark 13löthig enthalten 780 Loth fein.

(11) Ein Wirth will 72 Eimer Wein mischen, wovon Ein Eimer 18 fl. werth seyn soll. Er nimmt A Wein zu 24 fl., B zu 16 fl. und C zu 12 fl. Wie viel Eimer sind von jeder Sorte zu nehmen?

A 24		2 + 6	4	10 : 72 = 4 : A; A = 28⁴⁄₅ Eimer.
B 16	18	6	3	10 : 72 = 3 : B; B = C = 21³⁄₅ Eimer.
C 12		6	3	

A 28⁴⁄₅ Eimer	à 24 fl.	kosten	691⅕ fl.	+ 172⁴⁄₅	
B 21³⁄₅ „	à 16 fl.	„	345³⁄₅ fl.	— 43⅕	— 172⁴⁄₅.
C 21³⁄₅ „	à 12 fl.	„	259⅕ fl.	— 129³⁄₅	

72 Eimer à 18 fl. 1296 fl.

§. 164. In allen früheren Fällen, außer in 10 und 11, waren die Aufgaben bestimmt, d. h. nur die wirklich aufgefundenen Resultate sind den Bedingungen genau entsprechend, und selbst auch die in Nro. 10 und 11 gegebenen Aufgaben sind bestimmt, wenn man sie blos nach der bisher angegebenen Methode auflösen soll. — Sobald aber mehr als 3 Sorten gegeben sind, so sind die Aufgaben, wenn nicht andere Beschränkungen gemacht werden, wie wir dieß in den späteren Fällen thun wollen, unbestimmt, d. h. es gibt mehrerlei Resultate, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, weil man beliebig jede höhere Sorte mit was immer für einer niedern verbinden kann, und umgekehrt.

Um uns von der Richtigkeit dieser Behauptung, daß nämlich bei mehr als 2 zur Legirung gegebenen Sorten mehrere den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Resultate aufgefunden werden können, noch mehr zu überzeugen, wollen wir die Aufgabe auflösen: Es sollen S Marke von irgend einer Mittelsorte, vom Mlöthigen Silber legirt werden. Hierzu sollen von den höhern Sorten H_1, H_2, H_3 u. s. w., und von den niedern Sorten N_1, N_2 u. s. w. Loth fein enthaltend, genommen werden. Wie viele Marke hat man von jeder Sorte zu nehmen? Es sey die Anzahl Marke, welche von der Sorte H_1 ge-

nommen werden, x, die von H_2 y, die von H_3 z u. s. w.; die von N_1 u, die von N_2 w, u. s. w.

Aus dem Umstande, daß der Feingehalt der zu legirenden Quantitäten dem Feingehalte nach der Legirung gleich seyn muß, und bei dem weiteren Umstande, daß die Summe der Theile der zu theilenden Größe gleich ist, folgen die Gleichungen:

$$H_1x + H_2y + H_3z + \ldots\ldots + N_1u + N_2w + \ldots\ldots = SM, \text{ und}$$
$$x + y + z + \ldots\ldots + u + w + \ldots\ldots = S.$$

Da sich nun in zwei Gleichungen mehr als zwei Unbekannte vorfinden, so ist die Aufgabe, aus welcher diese Gleichungen aufgestellt werden, eine unbestimmte.

(12) Es sollen 60 Mark 13löthiges Silber legirt werden. Dazu sind zu verwenden: die Sorte A 15löthig, B 14½löthig, C 13½löthig, D 12löthig, E 11½löthig und F 10löthig. Wie viele Marke sind von jeder Sorte zu nehmen?

Man verbinde A mit D, B mit E und C mit F.

						19
A	15	13	1	2	Von der Sorte A sind zu nehmen 6 Mark	6
B	14½		1½	3	„ „ „ B „ „ „ 9 „	9
C	13½		3	6	„ „ „ C „ „ „ 18 „	18
D	12		2	4	„ „ „ D „ „ „ 12 „	12
E	11½		1½	3	„ „ „ E „ „ „ 9 „	9
F	10		½	1	„ „ „ F „ „ „ 3 „	3
					60 Mark.	

Oder man verbinde A mit F, B mit E und C mit D. Hierdurch erhält man:

						19
A	15	13	3	6	Von A sind zu nehmen 18 Mark	18
B	14½		1½	3	„ B „ „ „ 9 „	9
C	13½		1	2	„ C „ „ „ 6 „	6
D	12		½	1	„ D „ „ „ 3 „	3
E	11½		1½	3	„ E „ „ „ 9 „	9
F	10		2	4	„ F „ „ „ 12 „	12
					60 Mark.	

Oder man verbinde A mit E, B mit D und C mit F.

						19
A	15	13	1½	3	Von A sind zu nehmen: 9 Mark	9
B	14½		1	2	„ B „ „ „ 6 „	6
C	13½		3	6	„ C „ „ „ 18 „	18
D	12		1½	3	„ D „ „ „ 9 „	9
E	11½		2	4	„ E „ „ „ 12 „	12
F	10		½	1	„ F „ „ „ 3 „	3
					60 Mark.	

(13) Ein Wirth will 50 Eimer Wein mischen, so daß Ein Eimer 32 fl. werth ist. Er nimmt Weine von der Sorte A zu 40 fl., von B zu 42 fl., von C zu 36 fl., von D zu 24 fl. und von E zu 20 fl. Wie viele Eimer wird er von jeder Sorte nehmen müssen?

(A mit E, B mit D, C mit E.)

							27
A 40		12	6	Von A sind zu nehmen	11	Eimer	3
B 42		8	4	„ B „ „ „	7	„	11
C 36	32	12	6	„ C „ „ „	11	„	3
D 24		10	5	„ D „ „ „	9	„	7
E 20		8+4	6	„ E „ „ „	11	„	3
				Eimer	50		

Oder man verbinde A mit D, B mit D und C mit E.

A 40		8	4	Von A sind zu nehmen	8	Eimer
B 42		8	4	„ B „ „ „	8	„
C 36	32	12	6	„ C „ „ „	12	„
D 24		8 + 10	9	„ D „ „ „	18	„
E 20		4	2	„ E „ „ „	4	„
					50	Eimer.

Ganz gewiß sind die Resultate dieser Auflösung jenen der früheren vorzuziehen.

(14) Ein Münzmeister will 40 Mark 12löthiges Silber legiren, und zwar aus den Sorten A, B, C, D und E. Die Sorte A ist 14löthig, B 13½löthig, C 11½löthig, D 10½löthig, E 9löthig. Wie viele Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

(A mit E, B mit D, C mit B.)

A 14		28		6	Von der Sorte A sind zu nehmen	12	Mark
B 13½		27		3 + 1	„ „ „ B „ „ „	8	„
C 11½	12	23	24	3	„ „ „ C „ „ „	6	„
D 10½		21		3	„ „ „ D „ „ „	6	„
E 9		18		4	„ „ „ E „ „ „	8	„
						40	Mark.

Oder man verbinde A mit C, A mit D und B mit E.

								21
A 14		28		1 + 3	Von der Sorte A sind zu nehmen	7	Mark	13
B 13½		27		6	„ „ „ B „ „ „	11	„	9
C 11½	12	23	24	4	„ „ „ C „ „ „	7	„	13
D 10½		21		4	„ „ „ D „ „ „	7	„	13
E 9		18		3	„ „ „ E „ „ „	5	„	15

In dieser Aufgabe verdient die erste Auflösungsart wegen ihrer leichteren praktischen Anwendung vor der letzteren den Vorzug.

Daß in den letzterwähnten Aufgaben außer den bemerkten Auflösungsarten, hinsichtlich der Verbindungen, noch mehrere andere Auflösungsarten möglich sind, ist von selbst klar.

§. 165. Eine andere, in den meisten Fällen sehr bequeme Auflösungsmethode besteht darin, daß man neben den Preis jeder Sorte seine Differenz mit dem Preise der Mittelsorte setzt, diese Differenzen dann als Nenner von Brüchen betrachtet, deren Zähler willkürlich genommen werden können, jedoch immer so, daß die Summe der Zähler aus den höhern Sorten der Summe der Zähler aus den niedern Sorten gleich ist. Die auf diese Weise gefun-

denen Brüche sind die Verhältnißzahlen, nach welchen die gegebene Quantität getheilt werden soll.

(11) Ein Wirth will **72** Eimer Wein mischen, wovon Ein Eimer **18** fl. werth seyn soll. Er nimmt einen Wein **A** zu **24** fl., **B** zu **16** fl., **C** zu **12** fl. Wie viele Eimer sind von jeder Sorte zu nehmen?

Die Summe der gewählten Zähler sey **24**.

A 24		6	24/6	4	2	6 : 72 = 2 : A	Von der Sorte A sind zu nehmen 24 Eim.
B 16	18	2	12/2	6	3	1 : 12 = 2 : A	" " " B " " " 36 "
C 12		6	12/6	2	1	1 : 12 = 3 : B	" " " C " " " 12 "
						1 : 12 = 1 : C	72 Eim.

Da die Zähler willkürlich gewählt werden können, so wird man offenbar immer solche Zähler zu wählen haben, daß die Verhältnißzahlen zur Theilung der Quantität ganze Zahlen werden.

Sind ferner die Differenzen irgend einer Sorte mit der Mittelsorte Brüche, so wähle man die Zähler so, daß sie durch diese Brüche dividirt, ganze Zahlen zum Quozienten geben.

(10.) Jemand will aus **14½**löthigem, **14**löthigem und **11**löthigem Silber, **60** Mark **13**löthiges Silber legiren. Wie viele Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

A 14½		1½	6	6 : 3/2	4	2	Von der Sorte A sind zu nehmen 24 Mark
B 14	13	1	2	2 : 1	2	1	" " " B " " " 12 "
C 11		2	8	8 : 2	4	2	" " " C " " " 24 "
							60 Mark.

Aus diesen Auflösungen ergibt sich eines Theiles die Richtigkeit der im Eingange des §. **164** aufgestellten Behauptung, daß die Aufgaben mit drei zu legirenden Sorten nur dann als bestimmte Aufgaben zu betrachten sind, wenn keine andere als die zuerst angeführte Auflösungsmethode angewendet werden darf; daß sie aber, wenn auch diese Auflösungsmethode angewendet wird, ebenfalls schon als unbestimmte Aufgaben erscheinen, da wir nach diesen beiden Verfahrungsweisen auf verschiedene Resultate gelangen, deren alle der Bedingung der Aufgabe entsprechen.

Ferner ergibt sich hieraus, daß die Resultate nach der in diesem Paragraphe gegebenen Methode für die praktische Anwendung die bequemeren sind, wie sich dies auch sonst in den meisten Fällen bewährt.

(15) Es sollen aus **15**, **14**, **12½**, **12** und **10**löthigen Silber **50** Mark **13**löthiges Silber legirt werden. Wie viele Marke sind von jeder Sorte zu nehmen?

A 15		2	6/2	3	25 : 50 = 3 : A	Von A sind zu nehmen 6 Mark
B 14		1	6/1	6	1 : 2 = 3 : A	" B " " " 12 "
					1 : 2 = 6 : B	" C " " " 24 "
C 12½	13	½	6 : ½	12	1 : 2 = 12 : C	" D " " " 6 "
D 12		1	3/1	3	1 : 2 = 3 : D	" E " " " 2 "
E 10		3	3/3	1	1 : 2 = 1 : E	

Summe der Zähler bei den höheren Sorten **6 + 6 = 12**

" " " " " niederen " **6 + 3 + 3 = 12.**

(16) Ein Kaufmann hat **5** verschiedene Sorten Tabakblätter, das ℔ zu **8**, **12**, **15**, **20** und **24** Groschen. Er will **130** ℔ zusammen mischen,

so daß 1 ℔ 16 Groschen werth ist. Wie viele ℔ sind von jeder Sorte zu nehmen?

A 8		8	16 : 8	2	13 : 130	Von der Sorte A sind zu nehmen	20 ℔
B 12		4	8 : 4	2	1 : 10 = 2 : A	〃 〃 〃 B 〃 〃 〃	20 ℔
C 15	16	1	4 : 1	4	u. s. w.	〃 〃 〃 C 〃 〃 〃	40 ℔
D 20		4	12 : 4	3		〃 〃 〃 D 〃 〃 〃	30 ℔
E 24		8	16 : 8	2		〃 〃 〃 E 〃 〃 〃	20 ℔
							130 ℔

(17) Ein Wirth will 297 Eimer Wein mischen, wovon Ein Eimer 22 fl. werth seyn soll. Er hat Weine von der Sorte A zu 32 fl., von B zu $26\frac{1}{2}$ fl., von C zu $23\frac{1}{4}$ fl., von D zu $19\frac{4}{5}$ fl., von E zu $18\frac{2}{3}$ fl. Wie viele Eimer hat er von jeder Sorte zu nehmen?

A 32		10	10	120 : 10	12	99 : 297 = 12 : A	Von A 36 Eimer
B $26\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	36 : $\frac{9}{2}$	8	1 : 3 = 12 : A	〃 B 24 〃
C $23\frac{1}{4}$	22	$1\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	20 : $\frac{5}{4}$	16	u. s. w.	〃 C 48 〃
D $19\frac{4}{5}$		$2\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$	66 : $\frac{11}{5}$	30		〃 D 90 〃
E $18\frac{2}{3}$		$3\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	110 : $\frac{10}{3}$	33		〃 E 99 〃
							297 Eimer.

§. 166. Nimmt man in der allgemeinen Aufgabe des §. 164, welche auf die Gleichungen:

$$H_1 x + H_2 y + H_3 z + \dots\dots + N_1 u + N_2 w + \dots\dots = SM, \text{ und}$$
$$x + y + z + \dots\dots\dots\dots + u + w \dots\dots\dots\dots = S \text{ führte, an,}$$

daß 3 höhere und 3 niedere Sorten vorkommen, so enthalten die entsprechenden Gleichungen:

$$H_1 x + H_2 y + H_3 z + N_1 t + N_2 u + N_3 w = SM \text{ und}$$
$$x + y + z + t + u + w = S,$$ sechs Unbekannte. Setzt man aber noch gewisse Beschränkungen z. B. 1.) daß von allen höheren Sorten und auch von allen niederen Sorten gleiche Quantitäten genommen werden sollen, oder daß $x = y, x = z, t = w, u = w$ ist; so zeigt sich, daß man auf diese Weise so viele Gleichungen erhält, als wie viele Unbekannte bestimmt werden sollen, daß mithin die Aufgabe auf bestimmte Gleichungen führt.

Eben dies wäre der Fall, wenn 2.) die Beschränkung gesetzt würde, daß sich die Quantitäten der höhern Sorten wie $m : p : q$, die der niedern Sorten wie $n : r : s$ verhalten sollen, oder daß $x : y = m : p$; $x : z = m : q$; $t : w = n : s$; $u : w = r : s$ seyn soll; oder auch

wenn man 3.) die Beschränkung setzt, daß die Quantitäten der höheren Sorten in einem bestimmten Verhältnisse stehen, die Quantitäten der niedern Sorten aber gleich seyn sollen. Z. B. $x : y = m : p$; $x : z = m : q$; $t = w$, $n = w$;

oder wenn man 4.) die Beschränkung setzt, daß die Quantitäten der höhern Sorten unter einander gleich seyn, die der niedern aber in einem bestimmten Verhältnisse stehen sollen; z. B. $x = y$; $x = z$; $t : w = n : s$; $u : w = r : s$.

(18) Ein Silberarbeiter will aus 15, 14, 12, 11 und 10löthigem Silber, 35 Mark 13löthiges Silber legiren. Wie viele Mark muß er von jeder Sorte nehmen, wenn die einzelnen Quantitäten von den höheren Sor-

ten unter sich gleich groß seyn sollen, und wenn verlangt wird, daß auch bei den niedern Sorten dieselbe Bedingung eintreffen soll.

A 15	$\frac{29}{2}$		29		4	$7:35 = 4:(A+B)$
B 14						$1:5 = 4:(A+B)$
C 12		13		26		$A+B=20$
D 11	11		22		3	$A=B=10$
E 10						

$1:5 = 3:(C+D+E)$
$C+D+E=15$
$C=D=E=5$

Von der Sorte A sind zu nehmen 10 Mark
" " " B " " " 10 "
" " " C " " " 5 "
" " " D " " " 5 "
" " " E " " " 5 "

Zusammen 35 Mark.

(19) Ein Weinhändler will 273 Eimer Wein so mischen, daß Ein Eimer des gemischten Weines 36 fl. werth ist. Er nimmt dazu von der Sorte A, wovon Ein Eimer 45 fl. werth ist, von B á 39 fl., von C à 38 fl., von D à 35 fl., von E à 33 fl. und von F à 28 fl. Wie viele Eimer muß er von jeder Sorte nehmen, wenn sowohl die Quantitäten von den einzelnen höhern Sorten unter einander gleich seyn sollen, wie auch anderseits die Quantitäten von den niedern Sorten?

A 45						
B 39	$\frac{122}{3}$		122		12	6
C 38		36		108		
D 35			96		14	7
E 33	$\frac{96}{3}$					
F 28						

$$13:273 = 6:(A+B+C)$$
$$1:\ 21 = 6:(A+B+C)$$
$$A+B+C=126$$
$$A=B=C=\ 42$$

$$1:21 = 7:\ (D+E+F)$$
$$D+E+F=147$$
$$D=E=F=\ 49$$

Also sind von A, B und C 42 Eimer, von D, E und F 49 Eimer zu nehmen.

(20) Zu einer Legirung von 30 Mark 12½löthigem Silber wird von der Sorte A 14½löthiges, B 13¾löthiges, C 12¼löthiges, D 11¾löthiges, E 10¾löthiges Silber verwendet. Wie viele Mark muß man von jeder Sorte nehmen, wenn die Quantitäten von den höhern Sorten, und auch die Theile von den niedern Sorten, für sich genommen, gleich seyn sollen?

A 14½		58						
B 13¾		55		$\frac{113}{2}$		339		22
C 12¼	12½	49	50		50		300	
D 11¾		47		$\frac{139}{3}$		278		39
E 10¾		43						

$$61 : 30 = 22:(A+B)$$
$$A+B = 10^{50}/_{61}$$
$$A = B = 5^{25}/_{61}$$

$$61 : 30 = 39 : (C+D+E)$$
$$C+D+E=19^{11}/_{61}$$
$$C=D=E= 6^{24}/_{61}$$

Es sind sonach von A $5^{25}/_{61}$, von B $5^{25}/_{61}$, von C $6^{24}/_{61}$, von D $6^{24}/_{61}$ und von E $6^{24}/_{61}$ Mark zu nehmen.

§. 167. Wenn bei Aufgaben dieser Art verlangt wird, daß die Quantitäten, welche man für die höheren, oder für die verschiedenen niedern Sor-

ten, oder auch für beide Sorten zu bestimmen hat, nicht gleich seyn, sondern in irgend einem geometrischen Verhältnisse unter einander stehen sollen, so kann dieser Bedingung auf nachstehende Weise Genüge geleistet werden: Man multiplizire den Werth oder Feingehalt jeder Sorte mit der für sie gegebenen Verhältnißzahl, suche aus den Produkten derselben Gattung den Durchschnitt, und allegire mit diesen Durchschnittszahlen zur Mittelsorte. Hiernach erhält man zwei Resultate, deren Ein einzelnes die Resultate für die höheren Sorten, das andere das für die niedern Sorten vereinigt enthält. Wird jedes dieser Resultate wieder im Verhältnisse der entsprechenden Verhältnißzahlen getheilt, so erhält man die den einzelnen Sorten entsprechenden Resultate.

(21) Ein Münzmeister soll **216** Mark **13**löthiges Silber legiren. Wie viele Mark muß er von der Sorte **A** $15\frac{1}{2}$löthigen, **B** à $14\frac{1}{2}$ Loth fein, **C** à **14** Loth, **D** à **12**, **E** à $11\frac{1}{2}$ Loth und von **F** à **10** Loth fein nehmen, wenn sich die zu bestimmenden Theile von **A**, **B** und **C** wie **3 : 4 : 5** verhalten, die Theile wegen **D**, **E** und **F** aber gleich groß seyn sollen?

$$\left.\begin{array}{l} A\ 15\frac{1}{2} \times 3 = \frac{93}{2} \\ B\ 14\frac{1}{2} \times 4 = 58 \\ C\ 14 \quad \times 5 = 70 \end{array}\right\} \frac{349}{2} : 12 = \frac{349}{24} \qquad \frac{312}{24} \;\Big\|\; \begin{array}{l} 349 \\ 268 \end{array} \Big| \; 312 \; \Big| \begin{array}{l} 44 \\ 37 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} D\ 12 \\ E\ 11\frac{1}{2} \\ F\ 10 \end{array}\right\} = 11\frac{1}{6} = \frac{67}{6} = \frac{268}{24}$$

$$81 : 216 = 44 : (A + B + C)$$
$$3 : \quad 8 = 44 : (A + B + C)$$
$$A + B + C = \frac{352}{3}$$

Diese Zahl im Verhältnisse wie **3 : 4 : 5** getheilt, gibt für **A** $29\frac{1}{3}$ Mark, für **B** $39\frac{1}{9}$ Mark, für **C** $48\frac{8}{9}$ Mark.

Aus der weiteren Proporzion: $3 : 8 = 37 : (D + E + F)$ findet man $D + E + F = \frac{296}{3}$, und dies bedingungsgemäß durch **3** dividirt, gibt für jede einzelne dieser drei Sorten $32\frac{8}{9}$ Mark zum Resultate.

(22) Ein Weinhändler will **318** Eimer Wein im Werthe von $16\frac{3}{4}$ fl. für Einen Eimer mischen. Er hat **5** Sorten von Weinen **A** à **24** fl., **B** à **18** fl., **C** à $15\frac{1}{2}$, **D** à **14** und **E** à **13** fl. Wie viele Eimer muß er von jeder Sorte nehmen, wenn von **A** und **B** gleich viel genommen werden, die Quantitäten von **C**, **D** und **E** aber sich wie **5 : 4 : 3** verhalten sollen?

$$\left.\begin{array}{l} A\ 24 \\ B\ 18 \end{array}\right\} 42 : 2 = 21 \qquad \Big\|\; \begin{array}{l} 168 \\ 115 \end{array} \Big| \; 134 \; \Big| \begin{array}{l} 19 \\ 34 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} C\ 15\frac{1}{2} \times 5 = 77\frac{1}{2} \\ D\ 14 \quad \times 4 = 56 \\ E\ 13 \quad \times 3 = 39 \end{array}\right\} 172\frac{1}{2} : 12 = 14\frac{3}{8}$$

$$53 : 318 = 19 : (A + B) \;\Big\|\; 1 : 6 = 34 : (C + D + E)$$
$$1 : \quad 6 = 19 : (A + B) \;\Big\|\; C + D + E = 204$$
$$A + B = 114$$
$$A = B = \ 57$$

Wird das Resultat **204** Eimer im Verhältnisse wie **5 : 4 : 3** getheilt, so geben die Resultate die für **C**, **D** und **E** einzeln zu nehmenden Quantitäten an.

Es sind sonach zur verlangten Mischung **57** Eimer von **A**, **57** von **B**, **85** von **C**, **68** von **D** und **51** von **E** zu nehmen.

(23) Ein Münzmeister legirt **44** Mark **20** karatiges Gold, und nimmt dazu von den Sorten **A** à $22\frac{1}{2}$ Karat fein, **B** $21\frac{3}{4}$ fein, **C** $21\frac{1}{4}$ fein, **D** **18**, **E** $17\frac{1}{2}$ und **F** **16** Karat fein. Wie viele Mark muß er von

jeder Sorte nehmen, wenn sich die Quantitäten von **A**, **B** und **C** wie **1 : 2 : 3** und die Quantitäten von **D**, **E** und **F** wie **3 : 2 : 1** verhalten sollen?

A $22\frac{1}{2} \times 1 = 22\frac{1}{2}$	$129\frac{3}{4} : 6$		173		20	$33:44 = 20:(A+B+C)$
B $21\frac{3}{4} \times 2 = 43\frac{1}{2}$	$21\frac{5}{8}$ K.			160		$3:\ 4 = 20:(A+B+C)$
C $21\frac{1}{4} \times 3 = 63\frac{3}{4}$			140		13	$A+B+C = 26\frac{2}{3}$ Mk.
D $18 \times 3 = 54$		20				
E $17\frac{1}{2} \times 2 = 35$	$105 : 6$					
F $16 \times 1 = 16$	$17\frac{1}{2}$ K.					

$$3:4 = 13:(D+E+F)$$
$$D+E+F = 17\tfrac{1}{3}\ \text{Mark.}$$

Wird das Resultat **$26\frac{2}{3}$**, welches die Quantitäten für **A**, **B** und **C** vereinigt enthält, im Verhältnisse wie **1 : 2 : 3** getheilt, so findet man für **A** $4\frac{4}{9}$ Mark, für **B** $8\frac{8}{9}$ und für **C** $13\frac{1}{3}$ Mark. — Wird das Resultat $17\frac{1}{3}$, welches die Quantitäten für **D**, **E** und **F** vereinigt enthält, im Verhältnisse wie **3 : 2 : 1** getheilt, so findet man für **D** $8\frac{2}{3}$, für **E** $5\frac{7}{9}$ und für **F** $2\frac{8}{9}$ Mark.

§. 168. Mehrmals wird verlangt, daß zu einer bestimmten Legirung bestimmte Quantitäten als Theile genommen werden sollen. Für diesen Fall hat man nur zu bemerken, daß es sich der eigentlichen Auflösung der Aufgabe wegen darum handle, sowohl die wahre zu theilende Quantität als auch den wahren Werth oder Feingehalt für die Legirung (die Mittelsorte) erst auszumitteln, weil dies hier nicht die Größen sind, die scheinbar dafür gegeben werden, sondern solche Größen, welche erst durch eine vorläufige Berechnung insbesondere aufgefunden werden müssen.

(24) Zu einer Legirung von **60** Mark **13**löthigem Silber sollen verwendet werden: **A 8** Mark **$14\frac{1}{2}$**löthiges, **B 10** Mark **14**löthiges, **C 12** Mark **12**löthiges Silber. Das noch Mangelnde soll von den Sorten **D $15\frac{1}{2}$**löthig, **E 14**löthig, **F $12\frac{1}{2}$**löthig und **G 11**löthigem Silber in der Art genommen werden, daß die Theile von **D** und **E** gleich groß seyn, die Theile von **F** und **G** aber sich wie **2 : 3** verhalten sollen. — Wie viele Marke sind von den Sorten **D**, **E**, **F** und **G** zu nehmen?

60 Mark 13löthig enthalten 780 Loth fein.

A	**8** Mark	à **$14\frac{1}{2}$** Loth	enthalten:	**116**	Loth fein
B	**10** „	à **14**	„ „ :	**140**	„ „
C	**12** „	à **12**	„ „ :	**144**	„ „
	30 Mark		enthalten	**400**	Loth fein.

Da die durch die Sorten **A**, **B** und **C** zu verwendenden **30** Mark **400** Loth fein Silber enthalten, so müssen die in den von **D**, **E**, **F** und **G** noch zu nehmenden Quantitäten **60 — 30 = 30** Mark (die zu theilende Größe) noch **780 — 400**, d. i. **380** Loth fein Silber enthalten, woraus man findet, daß der Feingehalt einer solchen Mark **380 : 30**, d. i. **$12\frac{2}{3}$** Loth fein (die Mittelsorte) seyn muß. Man hat daher jetzt die Aufgabe aufzulösen: Wie viele Mark hat man von **D**, **E**, **F** und **G** zu nehmen, um **30** Mk. **$12\frac{2}{3}$**löthiges Silber zu erhalten, bei den oben bemerkten Beschränkungen?

D $15\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{2} : 2 = \frac{59}{4}$	$12\frac{2}{3}$	885	760	64	$189 : 30 = 64 : (D + E)$
E 14						$63 : 10 = 64 : (D + E)$
F $12\frac{1}{2} \times 2 = 25$	$\frac{58}{5}$		696		125	$D + E = 10\frac{10}{63}$
G $11 \times 3 = 33$						$D = E = 5\frac{5}{63}$ Mark.

$$63 : 10 = 125 : (F + G)$$
$$F + G = 19\frac{53}{63}$$

Hieraus findet man $F = 7\frac{59}{63}$ Mk., von $G = 11\frac{57}{63}$ Mark.

(25) Ein Weinhändler will **360** Eimer Wein mischen, wovon Ein Eimer **22** fl. werth seyn soll. Zu dieser Mischung nimmt er von der Sorte **A** **50** Eimer à **24** fl., von **B** **25** Eimer à **28** fl., von **C** **45** Eimer à **20** fl. Die **240** andern Eimer mischt er aus den Sorten **D** à **30** fl., **E** à **25** fl., **F** à **24** fl., **G** à **20** fl., **H** à **18** fl. und **J** à **16** fl., und zwar, indem er von den Sorten **D**, **E** und **F** die Theile im Verhältnisse wie **3 : 4 : 5**, von den Sorten **G**, **H** und **J** aber die Theile gleich groß nimmt. Wie viele Eimer sind von jeder Sorte zu nehmen?

360 Eimer à 22 fl. kosten 7920 fl.

A 50 Eimer à 24 fl. kosten	1200 fl.	Es sind also noch 360 — 120 d. i. 240
B 25 Eimer à 28 fl. „	700 fl.	Eimer zu mischen, welche 7920 — 2800
C 45 Eimer à 20 fl. „	900 fl.	o. 5120 fl. kosten müssen. Es ist daher
120 Eimer kosten	2800 fl.	d. Preis d. Mittels. f. 1 Eim. $21\frac{1}{3}$ fl.

D $30 \times 3 = 90$	$310 : 12 = 25\frac{5}{6}$	$25\frac{5}{6}$		155		20
E $25 \times 4 = 100$			$21\frac{1}{3}$		128	
F $24 \times 5 = 120$		18		108		27
G 20						
H 18	$54 : 3 = 18$					
J 16						

$$47 : 240 = 20 : (D + E + F)$$
$$D + E + F = 102\frac{6}{47} \text{ Eimer.}$$

Wird die für **D**, **E** und **F** zusammen aufgefundene Menge Eimer im Verhältnisse wie **3 : 4 : 5** getheilt, so findet man für **D** $25\frac{25}{47}$ Eimer, für **E** $34\frac{2}{47}$ Eimer, für **F** $42\frac{26}{47}$ Eimer.

Aus der Proporzion $47 : 240 = 27 : (G + H + J)$ findet man, daß für die Sorten **G**, **H** und **J** zusammen $137\frac{41}{47}$ Eimer zu nehmen sind, daß folglich von jeder Sorte $45\frac{45}{47}$ Eimer zu verwenden sind.

(26) Ein Münzmeister legirt **240** Mark $13\frac{1}{2}$löthiges Silber. Dazu nimmt er von der Sorte **A** **20** à **15** Loth fein, von **B** **15** à **14**, von **C** **25** à **12** Loth fein. Das Übrige soll aus den Sorten **D** à $14\frac{1}{2}$, **E** à $14\frac{1}{4}$, **F** à $13\frac{1}{2}$, **G** à **12**, **H** à **10** Loth fein in der Art legirt werden, daß sich die Theile von **D**, **E** und **F** wie **3 : 4 : 5** verhalten, die Theile von **G** und **H** aber gleich seyn sollen. Wie viele Mark sind von jeder Sorte zu nehmen?

240 Mark à $13\frac{1}{2}$ Loth enthalten 3240 Loth.

A 20 Mk. à 15 Loth fein enth.	300 Loth	Also müssen die noch übrigen 180
B 15 „ à 14 „ „ „	210 „	Mk. 2430 Loth fein enthalten,
C 25 „ à 12 „ „ „	300 „	woraus folgt, daß die Mittel-
60 Mark enthalten	810 Lt. f.	sorte $13\frac{1}{2}$ Loth fein seyn muß.

D $14\frac{1}{2}\times3=43\frac{1}{2}$		14		28		5
E $14\frac{1}{4}\times4=57$	$168:12=14$		$13\frac{1}{2}$		27	
F $13\frac{1}{2}\times5=67\frac{1}{2}$		11		22		1
G 12, H 10 } $22:2=11$	$6:180=5:(D+E+F)$				$1:30=1:(G+H)$	
	$1:30=5:(D+E+F)$				$G+H=30.$	
	$D+E+F=150$					

Wird das für **D**, **E** und **F** vereinigte Resultat **150** im Verhältnisse wie **3 : 4 : 5** getheilt, so findet man, daß von der Sorte **D** $37\frac{1}{2}$, von **E** **50** Mark und von **F** $62\frac{1}{2}$ Mark zu nehmen sind.

Wird das für **G** und **H** vereinigte Resultat halbirt, so findet man, daß von jeder dieser beiden Sorten **15** Mark genommen werden müssen.

§. 169. In allen Fällen, die wir bei den Metalllegirungen betrachtet haben, war jede einzelne Sorte immer nur eine aus zwei verschiedenen Metallen verbundene. So war das Silber nur als aus feinem Silber und Kupfer, das Gold nur als aus feinem Golde und Kupfer verbunden gegeben. Es ereignet sich jedoch oft der Fall, daß die einzelnen zur Legirung gegebenen Sorten aus mehreren Metallen zusammengesetzt sind, und daß es sich darum handelt, durch die Rechnung auszumitteln, welche Theile von jeder dieser Sorten zu nehmen sind, um entweder **1.** eine Legirung zu erhalten, die von jeder Gattung eine bestimmte Menge enthält, z. B. Irgend ein Metallstück

(27)	**A** enthalte	**5** Loth Gold,	**15** Loth Silber und	**30** Kupfer;	ein anderes
	B „	**20** „ „	**28** „ „ „	**48** „ „ „	
	C „	**12** „ „	**39** „ „ „	**24** L. Kupf.	

Wie viel Lothe sind von jedem Stücke zu nehmen, um **10** Loth Gold, **23** Loth Silber und **26** Loth Kupfer zu erhalten. Es kann aber auch **2.**) sich darum handeln, zu berechnen, welche Quantität von jeder Metallgattung sich in einer Legirung vorfinde, wenn die Quantitäten der zu legirenden Sorten gegeben sind. Z. B.

(28)	Eine Metallstange **A** enthalte **5** Loth,	**15** Loth Silber und	**30** Loth Kupfer,	
	eine andere **B** „ **20** „	**28** „ „ „	**48** „ „	

Von **A** werden **25**, von **B** **12** Loth genommen. Wie viel Loth Gold, wie viel Silber und wie viel Kupfer enthält die Legirung aus diesen beiden Stücken?

Die hierher gehörigen Aufgaben werden viel leichter durch Gleichungen als sonst auf irgend einem andern arithmetischen Wege gelöset.

Beziehungsweise auf die früher erwähnte Aufgabe (**27**) findet man:

	Lth. Gold	Lth. Silb.	Lth. Kupf.
Jedes Loth der ersten Stange enthält	$\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$,	$\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$;	$\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$;
„ „ „ zweiten „ „	$\frac{20}{96}=\frac{5}{24}$,	$\frac{28}{96}=\frac{7}{24}$,	$\frac{48}{96}=\frac{1}{2}$;
„ „ „ dritten „ „	$\frac{12}{75}=\frac{4}{25}$,	$\frac{39}{75}=\frac{13}{25}$,	$\frac{24}{75}=\frac{8}{25}$;

Nimmt man an, von der ersten Stange werden **x**, von der zweiten **y**, und von der dritten **z** Lothe genommen, so enthalten:

x Lothe der ersten Stange	$\frac{x}{10}$ Loth Gold,	$\frac{3x}{10}$ Loth Silber,	$\frac{3x}{5}$ Loth Kupfer,
y „ „ zweiten „	$\frac{5y}{24}$ „ „	$\frac{7y}{24}$ „ „	$\frac{y}{2}$ „ „
z „ „ dritten „	$\frac{4z}{25}$ „ „	$\frac{13z}{25}$ „ „	$\frac{8z}{25}$ „ „
Die Legirung soll enthalten	**10** „ „	**23** „ „	**26** „ „

Hieraus folgen die Gleichungen: (α) $\frac{x}{10}+\frac{5y}{24}+\frac{4z}{25}=10$,

(β) $\frac{3x}{10}+\frac{7y}{24}+\frac{13z}{25}=23$,

(γ) $\frac{3x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{8z}{25}=26$.

α$\times$600 gibt (δ) $60x+125y+96z = 6000$,
β$\times$600 „ (ε) $180x+175y+312z = 13800$,
γ$\times$300 „ (ζ) $180x+150y+96z = 7800$.

ε—ζ gibt (η) $25y+216z = 6000$,
3δ—ε „ $200y-24z = 4200$, woraus durch Division mit 8 die anwendbarere Gleichung (ϑ) $25y-3z=525$ entsteht.
η—ϑ gibt $219z = 5475$, woraus man
$z = 25$ findet.

Dieser Werth in ϑ substituirt gibt nach gehöriger Redukzion $y = 24$, beide diese Werthe in δ substituirt, geben $x = 10$.

Es sind somit von der ersten Stange 10, von der zweiten 24, von der dritten 25 Lothe zu nehmen, damit die daraus gemachte Legirung 10 Loth Gold, 23 Loth Silber, und 26 Loth Kupfer enthalte.

Probe: 10 Loth der ersten Stange enthalten $\frac{1}{10}\times 10$, d. i. 1 Loth Gold
24 „ „ zweiten „ „ $\frac{5}{24}\times 24$, „ 5 „ „
25 „ „ dritten „ „ $\frac{4}{25}\times 25$, „ 4 „ „

Zusammen 10 Loth Gold.

10 Loth der ersten Stange enthalten $\frac{3}{10}\times 10$, d. i. 3 Loth Silber,
24 „ „ zweiten „ „ $\frac{7}{24}\times 24$, „ 7 „ „
25 „ „ dritten „ „ $\frac{13}{25}\times 25$, „ 13 „ „

Zusammen 23 Loth Silber.

10 Loth der ersten Stange enthalten $\frac{3}{5}\times 10$, d. i. 6 Loth Kupfer,
24 „ „ zweiten „ „ $\frac{1}{2}\times 24$, „ 12 „ „
25 „ „ dritten „ „ $\frac{8}{25}\times 25$, „ 8 „ „

Zusammen 26 Loth Kupfer.

Beziehungsweise auf die andere früher erwähnte Aufgabe findet man:
(28) Jedes Lth. der 1. Stange enthält $\frac{1}{10}$ Lth. Gold, $\frac{3}{10}$ Lth. Silb. u. $\frac{3}{5}$ Lth. Kupf.
„ „ „ 2. „ „ $\frac{5}{24}$ „ „ $\frac{7}{24}$ „ „ „ $\frac{1}{2}$ „ „

Es enthalten sonach 25 Loth der ersten Stange $\frac{1}{10}\times 25$, d. i. $2\frac{1}{2}$ Loth Gold,
42 „ „ zweiten „ $\frac{5}{24}\times 42$, „ $8\frac{3}{4}$ „ „

Zusammen $11\frac{1}{4}$ Loth Gold.

Ferner enthalten 25 Loth der ersten Stange $\frac{3}{10}\times 25$, d. i. $7\frac{1}{2}$ Loth Silber,
42 „ „ zweiten „ $\frac{7}{24}\times 42$, „ $12\frac{1}{4}$ „ „

Zusammen $19\frac{3}{4}$ Loth Silber.

Endlich enthalten 25 Loth der ersten Stange $\frac{3}{5}\times 25$, d. i. 15 Loth Kupfer,
42 „ „ zweiten „ $\frac{1}{2}\times 42$, „ 21 „ „

Zusammen 36 Loth Kupfer.

Sonach enthalten 25 Loth der ersten und 42 Loth der zweiten Stange 11¼ Loth Gold, 19¾ Loth Silber und 36 Loth Kupfer, zusammen 67 Loth.

(29) Jemand besitzt drei Metallstangen, jede aus Gold, Silber und Kupfer legirt.

Die erste ist eine Legirung aus	2	Loth	Gold,	4	Loth	Silber	und	8	Loth	Kupfer,
„ zweite „ „ „	3	„	„	9	„	„	„	6	„	„
„ dritte „ „ „	10	„	„	5	„	„	„	15	„	„

Diese Person wünscht ein Gefäß verfertigen zu lassen, welches 4 Loth Gold, 6 Loth Silber und 9 Loth Kupfer enthalten soll. Wie viele Lothe müssen von jeder Stange genommen werden, um die verlangte Legirung zu erhalten?

Antwort: Von der ersten Stange sind 7, von jeder der zwei andern 6 Lothe zu nehmen.

(30) Jemand hat zwei Metallstangen, die Stange

A ist eine Legirung aus	3	Loth	Gold,	9	Loth	Silber	und	6	Loth	Kupfer,
B „ „ „	10	„	„	5	„	„	„	15	„	„

Von A nimmt er 4½, von B 7½ Loth. Wie viel Loth Gold, Silber und Kupfer enthält die Legirung?

Antwort: 3¼ Loth Gold, 3½ Loth Silber und 5¼ Loth Kupfer.

Dreizehnter Abschnitt.

Von den Staatspapieren.

A. Von den Staatspapieren im Allgemeinen.

§. 170. Unter Staatspapieren versteht man öffentliche Schuldbriefe, in welchen sich die Regierung eines Landes verpflichtet, zu seiner Zeit irgend eine Kapitals- oder Rentenschuld zu leisten, ohne daß diese Urkunden als eigentliches Papiergeld für den allgemeinen Verkehr dienen sollen. Man nennt sie auch Staats-Obligazionen, Staats-Effekten oder Fonds, weil gewöhnlich für Staatsschulden das Erträgniß irgend eines Zweiges der Staatseinkünfte angewiesen wird, den man als hinreichend zur Bezahlung des Kapitals oder der Renten erkennen kann, oder der nach Maßgabe der Bedingung im Schuldbriefe auch hinreichend ist, um beide Verpflichtungen zu erfüllen.

§. 171. Die Staatspapiere sind sowohl in einem und demselben, als auch in verschiedenen Staaten von verschiedener Gattung. Man kann sie, aus einem verschiedenen Gesichtspunkte betrachtet, auch verschieden eintheilen, als:

1. In Hinsicht ihrer Form
   a) in Obligazionen oder gewöhnliche Staatsschuldverschreibungen auf den Namen des Inhabers;
   b) in Obligazionen oder Staatsschuldverschreibungen **au porteur** (zahlbar an den jeweiligen rechtmäßigen Besitzer).
   c) in Auszüge aus den großen Staatsbüchern. Frankreich, England, Spanien, Neapel und Rußland haben nämlich die Einrichtung, daß die Ansprüche ihrer Gläubiger in ein großes Buch geschrie-

ben werden, von welcher Gutschrift dem Gläubiger eine Abschrift gegeben wird.

2. In Hinsicht auf den Bezug der Renten:
   a) in unverzinsbare;
   b) in solche, für welche ein regelmäßiger Zins bezahlt wird;
   c) in Akzien, deren Erträgniß proporzionirt ist dem Erträgnisse des Gesammtvermögens;
   d) in Lose, deren Erträgnisse in, durch eigene Ziehungen zu bestimmenden, Prämien bestehen. Sie sind von zweierlei Art:
      α) solche, für welche keine Zinsen, sondern blos Prämien;
      β) solche, für welche Zinsen und auch Prämien gegeben werden.
3. In Hinsicht auf ihre Erlöschung:
   a) in solche, bei welchen die Erlöschung schon in der Natur der Kredits-Operazion selbst liegt, z. B. Zeitrenten, bei denen nach Verlauf einer bestimmten Anzahl von Jahren blos in Folge der richtigen Rentenzahlung die Schuld gänzlich erlischt; Leibrenten, bei welchen dieses Statt findet mit dem succesiven Absterben jener Personen, auf deren Leben der Rentengenuß beschränkt war;
   b) in solche, wo dieses nicht der Fall ist, sondern wo erst in der Folge eine eigene Rückzahlung des Kapitals durch Einlösung und Vertilgung jener Papiere eintritt, auf welchen die Anforderungen der Staatsgläubiger an den Staatsschatz beruhen.
4. In Hinsicht des Einkaufspreises:
   a) in solche, deren Einkaufspreis für das Stück;
   b) in solche, deren Einkaufspreis nach Prozenten bestimmt wird.

§. 172. Staatspapiere können immer als Waare betrachtet werden. Die Eigenthümer derselben können und wollen nicht immer die Zeit abwarten, bis ihre Kapitalien vom Staate aufgekündet werden, oder bis sie sich von selbst tilgen. Dagegen gibt es immer wieder Personen, die vorräthiges Geld haben, und dieses entweder für beständig oder auf unbestimmte Zeit dahin verwenden wollen, um durch die davon entfallenden Zinsen, den betreffenden Gewinn sich zuzuwenden. Auch gibt es Personen, die, indem sie die Zeit abwarten, bis sie solche billig einkaufen, und sodann, im Preise bedeutend erhöht, wieder verkaufen, außer dem Zinsengewinne, auch auf diese Weise sich noch einen nicht unbedeutenden Vortheil verschaffen. Aus dieser Ursache werden immer bedeutende Geschäfte mit den Staatspapieren gemacht.

§. 173. Unter dem Kurse der Staatspapiere versteht man die Preise, zu welchen Staatspapiere gekauft und verkauft werden. Die Höhe des Kurses richtet sich nach den Verhältnissen des Staates, und nach den Vortheilen, die bei dem Besitze eines derlei Staatspapieres wirklich vorhanden oder zu hoffen sind.

B. Von den Österreichischen Staatspapieren insbesondere.

§. 174. Die Österreichischen Staatspapiere zerfallen in zwei Klassen:

I. In die Staatspapiere der älteren verzinslichen Staatsschuld, vor dem Jahre 1815;

II. in die Staatspapiere der neuern Staatsschuld, nach dem Jahre 1815.

I. Von den Staatspapieren der älteren verzinslichen Staatsschuld.

§. 175. Diese älteren Staatsschulden enthalten folgende Kathegorien der vorhandenen Staatspapiere:

1. Die Kapitale, welche bei der k. k. Universal-Staatsschulden-Kassa und bei den mit derselben verbundenen Kameral-Kassen haften, und zwar
   a) die unter der Benennung von Hofkammer-Obligazionen bestehenden Schuldverschreibungen;
   b) die Lieferungs-Obligazionen von Galizien;
   c) die Kriegs-Darlehens-Obligazionen von Galizien;
   d) die Lieferungs-Obligazionen, welche gemeinschaftlich von den Nieder-Österreichischen Ständen und dem Wiener Magistrate ausgefertigt worden sind;
   e) die Schuldverschreibungen der Nieder-Österreichischen Regierung vom Jahre 1809;
   f) die Ungarischen Kontribuzions- und Kameralschulden;
   g) die Siebenbürgischen Kameralschulden.
2. Die unter dem Namen Bank-Kapitale vorkommenden Schuldverschreibungen mit Einschluß derjenigen, welche noch von der im Jahre 1797 eröffneten Banko-Lotterie aus haften.
3. Die Ärarialschuldverschreibungen der Stände von Böhmen, Mähren, Schlesien, Österreich ob und unter der Enns, Steyermark, Kärnthen, Krain und Görz; dann die Ärarial-Obligazionen des Wiener Oberkammeramtes.
4. Die im Auslande aufgenommenen, und mit Hofkammer-Obligazionen, oder mit eigenen Allerhöchsten Schuldverschreibungen bedeckten Kapitale.
5. Die älteren Lombardischen Schulden, in so fern sie mit Hofkammer-Obligazionen versichert sind.
6. Die Schlesischen Interessen-Rekognizionen.

§. 176. Die Verzinsung dieser ältern Staatsschuld wurde durch das Allerhöchste Patent vom 20. Februar 1811 auf die Hälfte herabgesetzt, und geschieht in Wiener Währung. — Durch ein weiteres Allerhöchstes Patent vom 21. März 1818 wird angeordnet, diese ältere Staatsschuld durch Verlosung wieder in den ursprünglich versicherten Zinsenertrag in Konvenzions-Münze zurückzubringen.

Dieser Allerhöchsten Anordnung zur Folge wurde die gesammte ältere verzinsliche Staatsschuld, von ungefähr 500 Millionen Gulden Nominalwerth, in 488 Serien so eingetheilt, daß jede Serie ungefähr Eine Million Gulden 5perzentiges Kapital von dieser Staatsschuld enthält. Zugleich wurde bei dieser Eintheilung zum Grundgesetze angenommen, daß kein einzelnes Kapital mehr als den 1/4 Theil einer Serie ausfüllen darf.

§. 177. Zu diesem Zwecke wurde mit Allerhöchstem Patente vom 22. Jänner 1817 ein eigener Tilgungsfond gegründet, der ausschließend blos allein zur Tilgung der ältern und neuern verzinslichen Staatsschuld, nie aber zur Tilgung einer andern Schuld, insbesondere nie zur Zurückzahlung der Staats-Lotto-Anlehen, welche in andern Wegen gedeckt werden sollen, verwendet werden darf. In jedem Jahre wird am Anfange des Monats Jänner, März, Juni, August und November Eine Serie gezogen. — Jeder durch den

Tilgungsfond nach Erfüllung seiner Verpflichtungen sich noch vorfindende Mehrbetrag, der bei der reichlichen Ausstattung und der wohleingerichteten Verwaltung oftmals sich vorfinden muß, wird ebenfalls zur Tilgung verwendet, und so oft die Summe solcher Überschüsse den Betrag von Einer Million erreicht, wird eine außerordentliche Verlosung, Ergänzungsverlosung genannt, vorgenommen. (Am 1. Juni 1842 erfolgte die 150zigste Verlosung; die letzte (27te) Ergänzungsverlosung hat am 2. Mai 1842 Statt gefunden.)

Das dem Tilgungsfonde bei seiner Gründung übergebene Kapital betrug 50,135627 fl. 21¼ Kr., wovon die jährlichen Interessen 435701 fl. 6 Kr. Konvenzions-Münze betragen haben.

Aus den gesammten Operazionen des Tilgungsfondes, wie sie seit dessen Errichtung am 1. März 1817 bis letzten Oktober 1841 nachgewiesen sind, stellen sich folgende Hauptresultate heraus:

Der Vermögensstand, welcher mit Ende April 1841 eine Summe von	fl. 181,545168„59⅘	Kr.
erreichte, und im zweiten Semester 1841 einen Zuwachs von	fl. 5,731386„49⅘	„
erlangt hat, ist auf	fl. 187,276555„49	„
gestiegen. Da aber dem Tilgungsfonde bei seiner Gründung ein Kapital von	fl. 50,135627„21⅖	„
als Stammvermögen übergeben worden war, so hat derselbe aus eigenen Mitteln sein Vermögen vergrößert um	fl. 137,140928„27⅗	„

Die Totalsumme aller Schuldverschreibungen, welche der Tilgungsfond aus dem Umlaufe gesetzt hat, beträgt 436,263214 fl. 46⅖ Kr.

Anmerkung. Den vollständigen Bericht über die 49ste Periode, nämlich für die zweite Hälfte des Verwaltungsjahres 1841, findet man in der Wiener Zeitung Nr. 81 vom 22. März 1842.

§. 178. Die Obligazionen, welche eine gezogene Serie enthält, treten vom Ersten des Monats, in welchem die Ziehung geschehen ist, wieder in den ursprünglichen in Konvenzions-Münze zahlbaren Zinsenertrag ein, und werden gegen neue auf den ursprünglichen Zinsfuß lautende Staatsschuldverschreibungen umgewechselt. Diese neu ausgefertigten Staatsschuldverschreibungen heißen verloste Obligazionen. Die bis zum Tage der Ziehung noch haftenden Zinsen werden bei der Umwechslung bar berichtiget. (Über diese verlosten Obligazionen sind durch eine Circular Verordnung vom 29. Oktob. 1829 neuere Bestimmungen eingetreten, von welchen später im §. 188 Erwähnung geschehen wird.)

Gezogene ältere Obligazionen von weniger als 50 fl. Nennwerth werden nicht umgewechselt, sondern es wird dafür nur eine gedruckte Anweisung gegeben. Wenn mehrere solche Anweisungen zusammen den Betrag von wenigstens 50 fl. erreichen, kann die Verwechslung gegen eine verloste Obligazion Statt finden.

Auf diese Anweisungen laufen zwar auch vom Ziehungstage an die ursprünglichen Interessen, allein ihre Ausbezahlung erfolgt erst dann, wenn die Verwechslung gegen eine verloste Obligazion Statt gefunden hat. Indessen können derlei Anweisungen an den Tilgungsfond, oder an Jemand andern veräußert werden, und haben beiläufig den ihrem Nennwerthe proporzionirten Kurs, so wie die größern verlosten ähnlichen Obligazionen.

Anmerkung. Diesen Erläuterungen zur Folge ist es ersichtlich, daß die Besitzer solcher Obligazionen von der älteren Staatsschuld sehr große Vortheile erreichen können. Durch die Verlosung können sie vielleicht sehr bald in einen fünffachen Interessengenuß gelangen, folglich auch ihr Kapital in demselben Verhältnisse vermehren. Bleiben aber auch ihre Kapitale durch längere Zeit unverloset, so muß sich doch ihr Werth allmählig erhöhen, indem sowohl wegen der jährlichen Verlosungen, als wegen des Ankaufes der nicht verlosten vom Tilgungsfonde, der Kurs der noch unverlosten bedeutend steigen muß.

II. Von den Staatspapieren der neuern verzinslichen Staatsschuld.

§. 179. Die neuere Österreichische Staatsschuld enthält folgende Effekten, als:

1. die Staatsschuldverschreibungen zu **5**, **4**, **3**, **2½** und **1** Prozent;
2. die verlosten Obligazionen,
3. die Renturkunden des Lombardisch-Venezianischen Monte;
4. die Schuldverschreibungen der Darlehen mit Verlosung von den Jahren **1820**, **1821**, **1834** und **1839**.

Die Verzinsung der neueren Österreichischen Staatsschuld findet in Konvenzions-Münze Statt.

Die unter **3.** aufgeführten Renturkunden haben ihren eigenen ganz besonderen Tilgungsfond.

§. 180. Bei den älteren Staatsschulden müssen die Interessenbeträge gegen geschriebene gestempelte Quittungen behoben werden; nur die Banko-, und einige andere mit denselben Freiheiten begünstigte, Obligazionen sind stempelfrei. Bei der neueren Österreichischen Staatsschuld geschieht die Interessenbehebung durch ungestempelte gedruckte Interessen-Anweisungszettel (Coupons) in halbjährigen verfallenen Terminen.

Anfänglich wurden den Schuldverschreibungen die Zins-Coupons auf mehrere Jahre beigelegt, und nach Ablauf dieser Zeit gegen Vorweisung der Original-Schuldverschreibung wieder für eine neue Reihe von Jahren die Coupons ausgegeben. Um aber die Besitzer solcher Schuldverschreibungen dieser Verpflichtung zu entheben, werden die neuen Coupons-Blätter am Ende mit einem sogenannten Talon, d. i. mit einer Anweisung auf die in der Folge abermals abzureichenden Coupons-Blätter versehen, und es werden letztere ohne Vorweisung der Original-Schuldverschreibung blos gegen Vorweisung des Talons erfolget.

Die Interessenbehebung geschieht gegen diese Coupons, auf deren Rückseite der Name des jeweiligen Besitzers der Obligazion zu schreiben ist.

§. 181. In der Regel werden die Interessen von den Staatsschuldverschreibungen der neuern verzinslichen Staatsschuld in Wien, bei der k. k. Universal-Staatsschulden-Kassa bezahlt. Jedoch können sie auch nach vorläufig gemachter Anzeige bei den Kredits-Kassen in den Provinzen bezogen werden.

§. 182. Staatsschuldverschreibungen zu **5** Prozent.

Die 5perzentigen Staatsschuldverschreibungen sind durch das freiwillige Anlehen entstanden, welches die k. k. Nieder-Österreichische Landesregierung im November **1816** nach den Bestimmungen des Allerhöchsten Patentes vom **29.** Oktober **1816** eröffnete.

In Folge dieses Patentes, welches jeder Schuldverschreibung beigedruckt steht, waren die Einlagen für Hundert Gulden der neuen Staatsschuldverschreibung folgender Maßen festgesetzt:

1. eine ältere ursprünglich 6perzentige Obligazion von **100** fl., und ein barer Betrag von **80** fl. Wiener Währung; oder
2. eine ältere ursprünglich 5perzentige Obligazion von **100** fl., und ein barer Betrag von **100** fl. Wiener Währung; oder
3. eine ältere ursprunglich 4½perzentige Obligazion von **100** fl., und ein barer Betrag von **110** fl. Wiener Währung; oder
4. eine ältere ursprünglich 4perzentige Obligazion von **100** fl., und ein barer Betrag von **120** fl. Wiener Währung; oder
5. eine ältere ursprünglich 3½perzentige Obligazion von **100** fl., und ein barer Betrag von **130** fl. Wiener Währung; oder
6. eine ältere ursprünglich 3perzentige Obligazion von **100** fl., und ein barer Betrag von **140** fl. Wiener Währung.

Diese Einlagen sind von Seite des Finanzministeriums am **11.** April **1818** eingestellt, und zur Ergänzung des auf **120** Millionen Gulden bestimmten freiwilligen Anlehens nur mehr solche Anträge berücksichtiget worden, worin ein bestimmter Übernamspreis der neuen Staatsschuldverschreibung ausgedrückt wurde.

Auf dieselbe Art sind dann auch die weiters erfolgten Anlehen gegen solche Staatsschuldverschreibungen abgeschlossen worden.

Diese Staatsschuldverschreibungen lauten auf den Überbringer, und sind über Kapitalsbeträge von **10000**, **5000**, **1000**, **500** und **100** fl. ausgestellt. Die Interessenbehebung geschieht gegen Coupons.

§. 183. Diese Gattung von Staatsschuldverschreibungen werden auf der Börse nach dem auf dem Kursblatte nach Prozenten notirten Kurse eingekauft und verkauft. Bei der Berechnung hat man zu sehen

1. auf den Kurs;
2. auf die von der letzten Interessenerhebungszeit bis zum Übernamstage entfallenden Interessen, welche dem Verkäufer von dem Käufer zu vergüten sind. Sollte aber der nächst zahlbare Coupon schon weggeschnitten seyn, so müßte der Verkäufer dem Käufer die Interessen zwischen dem Übernamstage und den Tag, von welchem an der nächstfolgende Coupon lautet, vergüten.

(1) Jemand kauft am **15.** Juli **1839** drei Stück 5perzentige Obligazionen, **A** über **5000** fl., **B** über **1000** fl. und **C** über **500** fl. zu den Kurs von $107\frac{25}{32}\%$. Die Coupons von **A** lauten vom **1.** Mai und **1.** November, von **B** vom **1.** März und **1.** September, von **C** vom **1.** April und **1.** Oktober. Wie viel ist dafür an Kapital und Interessen zu bezahlen, wenn die Coupons vollständig sind?

Wegen A.		Wegen B.	
$107\frac{25}{32} \times 50 =$	fl. 5389„4	$107\frac{25}{32} \times 10 =$	fl. 1077„49
Interessen vom 1. Mai bis 15. Juli (75 Tage).........	fl. 52„5	Interessen vom 1. März bis 15. Juli (135 Tage)....	fl. 18„45
A....	fl. 5441„9	B....	fl. 1096„34

Wegen C.

$107\frac{25}{32} \times 5 =$ fl. 538„55

Interessen vom 1. April bis 15. Juli (105 Tage).... fl. 7„17½

C.... fl. 546„12½.

Gewöhnlich wird von dem Verkäufer über das abgeschlossene Geschäft eine Verkaufs-Note ausgestellt, von nachstehender Form:

Note

über verkaufte 6500 fl. 5perzentige Staatsschuldverschreibungen, als:

N°· 9999..........5000 fl. mit Interessen vom 1. Mai		
75 Tage à 5%............	fl.	52„ 5
N°· 8888..........1000 fl. mit Interessen vom 1. März		
135 Tage à 5%............	fl.	18„45
N°· 7777...........500 fl. mit Interessen vom 1. April		
105 Tage à 5%............	fl.	7„17½
6500 fl...............à $107\frac{25}{32}$%............	fl.	7005„48
Am 15. Juli 1839. Zusammen...	fl.	7083„55½.

Würde in dem genannten Falle bei der Obligazion A der Coupon vom 1. November 1839 nicht vorhanden seyn, und wäre daher der erste vom 1. Mai 1840; wäre ferner der erste Coupon bei B vom 1. März 1840, und der erste Coupon bei C vom 1. April 1840, d. i. wären die nächsten zu behebenden Coupons schon weggeschnitten, so wäre der Verkäufer verpflichtet, dem Käufer für die Zeit vom Übernamstage bis zum Behebtage des weggeschnittenen Coupons die Interessen zu vergüten. Die Berechnung müßte sonach folgende seyn.

Wegen A....5000 fl. à $107\frac{25}{32}$......	fl.	5389„ 4
Hiervon die Interessen vom 15. Juli bis 1. November 105 Tage	fl.	72„55
A....	fl.	5316„ 9
Wegen B....1000 fl. à $107\frac{25}{32}$......	fl.	1077„49
Hiervon die Interessen vom 15. Juli bis 1. September 45 Tage	fl.	6„15
B....	fl.	1071„34
Wegen C....500 fl. à $107\frac{25}{32}$......	fl.	538„55
Hiervon die Interessen vom 15. Juli bis 1. Oktober 75 Tage	fl.	5„12½
C....	fl.	533„42½

Somit würde die Note auf folgende Weise ausgestellt werden müssen:

Note

über verkaufte 6500 fl. 5perzentige Staatsschuldverschreibungen.

6500 fl. Kapital à $107\frac{25}{32}$%		fl.	7005„48
Hiervon ab wegen A über 5000 fl. N°· 9999			
Interessen für 105 Tage.....fl.	72„55		
„ „ B über 1000 fl. N°· 8888			
Interessen für 45 Tage......fl.	6„15		
„ „ C über 500 fl. N°· 7777			
Interessen für 75 Tage......fl.	5„12½	fl.	84„22½
Rest....		fl.	6921„25½

Untersucht man die Differenz von 7083 fl. 55½ Kr. und 6921 fl. 25½ Kr., so beträgt diese 162 fl. 30 Kr., welche der Summe aus den drei

abgeschnittenen Coupons wegen **A** mit **125** fl., wegen **B** mit **25** fl., und wegen **C** mit **12** fl. **30** Kr. gleich kommt, woraus sich die Richtigkeit des angewendeten Verfahrens nachweiset.

§. 184. Staatsschuldverschreibungen zu 4 Prozent.

Die Staatsschuldverschreibungen zu **4%** gründen sich:

1. auf die mit Regierungs-Circulare vom **13.** November **1829** bekannt gemachte Allerhöchste Entschließung vom **16.** Oktober **1829**, womit die Finanz-Verwaltung ermächtiget wurde, ein Anlehen gegen Ausgabe von Staatsschuldverschreibungen zu **4%** abzuschließen;
2. auf die durch Regierungs-Circulare vom **31.** März **1830** zur allgemeinen Kenntniß gebrachte Allerhöchste Anordnung einer theilweisen Aufkündung der mit einer höhern Verzinsung als mit **4** von Hundert verbundenen Staatsschuld.

Den Besitzern solcher aufgekündeter Kapitale ist es gestattet, ihre Schuldverschreibungen in vierperzentige Schuldbriefe in der Art umzustalten, daß sie für **100** fl. in fünfperzentigen Staatsschuldverschreibungen **104** fl. in vierperzentigen Schuldbriefen erhalten können. Es wird ihnen nämlich eine neue vierperzentige Schuldverschreibung von dem Nennwerthe der fünfperzentigen gegeben, und für jedes Hundert noch eine Anweisung auf vier Gulden.

Die erstere Gattung der vierperzentigen Staatsschuldverschreibungen sind vom **1.** Dezember **1829**, und mit Zinsen-Coupons sammt Talon versehen. Die Coupons lauten sonach vom **1.** Juni und **1.** Dezember. Sie sind über Kapitalsbeträge von **1000**, **500** und **100** fl. ausgestellt.

Die andere Gattung, welche durch freiwillige Umstaltung der aufgekündeten Kapitale entstehen, sind den erstern gleich. Sie lauten auf den Überbringer, und sind über die eben so großen Kapitalsbeträge von **1000**, **500** und **100** fl. ausgestellt, mit Coupons und Talon versehen. Der Ausstellungstag ist der **1.** April **1830**, und die Coupons lauten auf den **1.** April und **1.** Oktober.

(2) Jemand kauft am **15.** Juli **1839** **A** **6** Stück vierperzentige Obligazionen der erstern Art, jedes mit **1000** fl. Nennwerth, à **101¼%**, und **B** **8** Stück vierperzentige der zweiten Art, jedes im Nennwerthe von **500** fl. zu denselben Kurs. Was hat er dafür zu bezahlen, wenn die zunächst zahlbaren Coupons genau vorhanden sind?

Wegen A....101¼×60 =	fl. 6075„—
Interessen vom 1. Juni, d. i. für 45 Tage....fl.	30„—
A....fl.	6105„—
Wegen B....101¼×40 =	fl. 4050„—
Interessen vom 1. April, d. i. für 105 Tage....fl.	46„40
B....fl.	4096„40

Note

über verkaufte **10000** fl. **4**perzentige Obligazionen, als:

6 Stück à 1000 fl. macht fl. 6000.	Hierzu die Int. v. 1. Juni (45 T.)	fl.	30„—
8 „ à 500 fl. „ fl. 4000	„ „ „ v. 1. Apr. (105 T.)	fl.	46„40
fl. 10000 à 101¼%		fl.	10125„—
Am 15. Juli 1839.	Zusammen....	fl.	10201„40

(3) Jemand verkauft am 15. Juli 1839:

A eine vierperzentige Anweisung von . . . . 80 fl.
mit den Interessen vom 1. November 1830;

B eine vierperzentige Anweisung von . . . . 75 fl.
mit den Interessen vom 1. Juni 1831;

C eine vierperzentige Anweisung von . . . . 45 fl.
mit den Interessen vom 1. Dezember 1833.

Was erhält er dafür, wenn der Kurs 101⅛ steht?

Note

über verkaufte 200 fl. vierperzentige Anweisungen, als:

80 fl. mit Interessen vom 1. November 1830		
8 Jahr 8½ Monat à 4%	fl.	27„52
75 fl. mit Interessen vom 1. Juni 1831		
8 Jahr 1½ Monat à 4%	fl.	24„22½
45 fl. mit Interessen vom 1. Dezember 1833		
5 Jahr 7½ Monat à 4%	fl.	10„ 7½
200 fl. à 101⅛%	fl.	202„15
Zusammen . . .	fl.	264„37

§. 185. Staatsschuldverschreibungen zu drei Prozent.

Die Österreichischen Staatsschuldverschreibungen zu 3% sind mittelst Circulare der k. k. N. Ö. Landesregierung vom 23. Oktober 1835 angekündigt worden. Sie sind über Beträge mit 1000, 500 und 100 fl. ausgefertigt, werden halbjährig verzinset, und haben Coupons mit einem Talon. Die Coupons sind am 1. Juli und 1. Dezember zahlbar.

Bei dieser Gattung von Staatsschuldverschreibungen hat man darauf zu sehen, daß auf dem zuerst zu behebenden Coupon kein bestimmter Tag der Hinausgabe geschrieben steht, indem in einem solchen Falle der Betrag dieses Coupons nur von dem bestimmt geschriebenen Tage an berechnet und bezahlt wird. — Stände z. B. auf einem am 1. Dezember mit 12 fl. zahlbaren Coupon, womit das Couponsblatt anfängt, „vom 1. September" geschrieben, so wäre dieser Coupon nur mit 6 fl. zu bezahlen. Alle übrigen Coupons aber werden vollständig bezahlt.

Die Kurse haben sich bisher gegen die, welche für die zu höhern Prozenten verinteressirten Staatsschuldverschreibungen bestehen, verhältnißmäßig etwas höher gehalten. Sie waren nämlich länger schon über 75%, bevor die 4perzentigen al pari standen.

§. 186. Von den Staatsschuldverschreibungen zu zwei und Einhalb Prozent.

Die Staatsschuldverschreibungen zu 2½% gründen sich auf das Allerhöchste Patent vom 29. März 1815 über die Eröffnung eines Anlehens von 50 Millionen Gulden Wiener Währung.

Die Schuldverschreibungen sind über Beträge von 5000, 1000, 500 und 100 fl. ausgestellt, sie lauten auf den Überbringer, werden in halbjährigen Terminen verzinset, und haben Coupons mit Talon.

Von diesen Staatsschuldverschreibungen, wovon nur 44 Millionen Gul-

den ausgegeben wurden, ist bereits der größere Theil durch den Tilgungsfond eingelöset und öffentlich verbrannt werden.

§. 187. Von den Staatsschuldverschreibungen zu Ein Prozent.

Die Einperzentigen Staatsschuldverschreibungen sind in Folge des Allerhöchsten Patentes vom 1. Juni 1816 entstanden, dem zu Folge bestimmte Beträge in Einlösungs- und Antizipazionsscheinen gegen Banknoten und derlei Obligazionen dergestalt eingelöset wurden, daß der 2/7 Theil der Einlöseſcheine gegen Banknoten verwechselt, für die übrigen 5/7 Theile aber solche Einperzentige Obligazionen ausgestellt wurden. So erhielt man für 140 fl. W. W. 40 fl. Banknoten, und eine Obligazion von 100 fl. zu Ein Prozent.

Diese Schuldverschreibungen sind über Kapitale von 5000, 1000, 500 und 100 fl. ausgestellt. Die Coupons sind in halbjährigen Terminen zahlbar und mit einem Talon versehen; sie lauten auf den 1. Jänner und 1. Juli.

Der Gesammtbetrag der herausgegebenen Papiere dieser Gattung beläuft sich auf 35 Millionen Gulden, wovon mittelst des Tilgungsfondes schon über 25 Millionen eingelöset und verbrannt worden sind.

Auch diese Staatsschuldverschreibungen so wie die 2½perzentigen, stehen gegen die 4 und 5perzentigen verhältnißmäßig bedeutend höher im Kurse, und scheinen sich darüber noch fernerhin zu erhalten.

Die Berechnungen beim Einkaufe und Verkaufe solcher Effekten sind den bei den fünf- und vierperzentigen angegebenen ganz ähnlich.

§. 188. Neuere Bestimmungen über die verlosten Obligazionen.

Die verlosten Obligazionen leiten ihren Ursprung aus dem Allerhöchsten Patente vom 21. März 1818 her, in Folge dessen die ältere verzinsliche Staatsschuld, wovon die Interessen im Jahre 1811 auf die Hälfte und auf W. W. herabgesetzt worden sind, allmälig durch Verlosungen auf den ursprünglichen in Konvenzions-Münze zahlbaren Zinsfuß zurückgeführt wird.

Durch eine Circular-Verordnung vom 29. Oktober 1829 hat sich die Finanz-Verwaltung vorbehalten, bei den in die Verlosung fallenden Obligazionen der älteren Staatsschuld von Fall zu Fall: entweder

1. bei der erwähnten Umwechslungsart gegen, zum ursprünglichen Zinsfuße in Konvenzions-Münze verzinsliche, verloste Obligazionen, stehen zu bleiben; oder
2. die bare Auszahlung des Kapitals im Nennwerthe desselben und in Konvenzions-Münze an die Gläubiger zu veranlassen.

§. 189. Von den Rent-Urkunden des Lombardisch-Venezianischen Monte.

Diese Staatsschuldverschreibungen gründen sich auf die k. k. Patente vom 27. August 1820, und vom 22. Mai 1822, womit zur Ausmittlung und Liquidirung der Staatsschuld des Lombardisch-Venezianischen Königreichs die nöthigen Anordnungen getroffen, und die Beschlüsse sowohl über die Errichtung des unter der Benennung: Monte des Lombardisch-Venezianischen Königreichs in Mailand bestehenden, und einer abgesonderten Behörde (Präfektur des Monte) untergeordneten Kredits-Institutes, als auch in Rücksicht auf die Gründung eines besonderen, der all-

mäligen Einlösung und Tilgung dieser Schuld, gewidmeten Fondes, bekannt gemacht wurden.

Für jede Art der auf dem Monte des Lombardisch-Venezianischen Königreichs übergehenden Staatsschuld, werden Schuldurkunden mit dem beigefügten Namen des Gläubigers ausgestellt, welche eine bestimmte Jahresrente im Verhältnisse von **5** zu **100** der anerkannten Schuldforderung versichern.

Nach dem angenommenen Verhältnisse von **5** : **100** liegt jeder **5**perzentigen Rente ein **20**faches Kapital zum Grunde. So ist eine Rente von **120** fl. als ein Kapital im Nennwerthe von **2400** fl. anzusehen.

Der Kurs wird nach Prozenten des Kapitals, welches der Rente zum Grunde liegt, angegeben. Wenn es daher heißt, der Kurs der **5%** Renten ist **103**, so will dieß sagen, daß die Renturkunde auf **5** Gulden Rente mit **103** fl. angekauft werden kann; es wird sonach eine Rente von **120** fl. um **2472** fl. angekauft werden können. — Man ersieht hieraus, daß der Einkaufspreis einer Rentenurkunde berechnet werden kann, wenn man den Nennwerth der Rente mit dem Kurse multiplizirt, und das Produkt durch die Prozente der Rente dividirt (**5** : **103** = **120** : ?). — Bei Berechnungen des Ankaufes der **5**perzentigen Renten multiplizire man den Rentenertrag mit dem doppelten Kurse und dividire das Produkt mit **10**.

(4) Es soll der Einkaufspreis einer **5**perzentigen Rentenurkunde von **500** fl. nach dem Kurse zu **103⅛%** berechnet werden.

$$\frac{500 \times 206\frac{1}{4}}{10} = 10312\frac{1}{2} \text{ fl.}$$

Die Zahlung der Jahres-Renten geschieht halbjährig entweder bar bei der Kassa des Monte in Mailand, oder auch bei den Provinzial-Finanzkassen, welche jedoch hiervon vorläufig zu verständigen sind.

Bei den Kursen der Renturkunden versteht sich wie bei jenen der Französischen Fonde der laufende Betrag von dem nächstverflossenen Zahlungstermine inbegriffen, und man hat keine besondere Vergütung zu berechnen, wie dieß wegen der Interessen-Vergütung bei den Obligazionen der Fall ist.

Dieser Betrag heißt in Frankreich: **Jouissance**, in Italien **Godimento**. Wenn z. B. am **1**. Februar **1842** der Kurs der **5**perzentigen Renten mit **Godimento 1**. September **1841** zu **103¾** notirt wäre, so erhält ein Verkäufer für **5** fl. Rente keineswegs ein Kapital von **103¾** fl., sondern nur von **101** fl. **40** Kr., indem das **Godimento** vom **1**. September **1840** bis **1**. Februar **1842** schon **2** fl. **5** Kr. beträgt, d. h. die von **100** fl. Kapital zu **5%** in **5** Monaten entfallenden Interessen.

Die Bezahlung der Renten geschieht mittelst gestempelter Quittungen auf den Namen des ursprünglichen Inhabers lautend.

Bei der mit Circulare vom **31**. März **1830** angeordneten theilweisen Aufkündigung der mit einer höhern Verzinsung als mit **4** Prozent in K. Mze. verzinslichen Staatsschuld, sind auch vierperzentige Renturkunden entstanden und ausgegeben worden, welche aber auf den Überbringer lauten.

Den Werth einer **4**perzentigen Renturkunde findet man, wenn man den Rentenbetrag mit dem Kurse multiplizirt, und das Produkt mit **4** dividirt. So ist der Werth einer **4**perzentigen Rente von **120** fl., wenn der Kurs zu **97** notirt ist, **2910** fl. (denn es ist **4** : **97** = **120** : ?).

(5) Welchen Kapitalsbetrag erhält Jemand am 1. Juli für seine 4perzentige Renturkunde, welche mit Godimento vom 1. März zu 98⅓ notirt ist?

Die Interessen zu 4% vom 1. März bis 1. Juli betragen (in 4 Monaten) 1 fl. 20 Kr. Also erhält man für 4% Rente ein Kapital von 97 fl.

§. 190. Von dem Darlehen mit Verlosung vom Jahre 1820.

Dieses Darlehen, welches auch das Darlehen mit den kleinen Rothschild'schen Losen genannt wird, wurde am 4. April 1820 mit den Herren David Parish und M. A. Rothschild und Söhne über den Betrag von 20,800000 fl. Konv. Münze abgeschlossen. Es wurden 208000 gleiche Schuldverschreibungen jede zu 100 fl. ausgegeben. Diese Schuldverschreibungen waren vom 1. Mai 1820, auf Überbringer lautend, ausgestellt, und wurden nach einem bestimmten Plane durch jährliche Verlosungen zurückbezahlt.

Vermöge des Verlosungsplanes war die Anzahl von 208000 Losen in 800 Serien getheilt, deren jede 260 Stück enthielt. Aus dieser Ursache hatte jedes Los zwei Nummern, links das Serien-Nummer und rechts das Los-Nummer. — Die Verlosungen wurden am Anfange des Monats März eines jeden Jahres vorgenommen, und waren mit vielen hohen Gewinnen verbunden. — Für gezogene Lose, denen kein besonderer Gewinn zufiel, wurde das Kapital mit 100 fl. sammt den vom Jahre 1820 darauf haftenden 5perzentigen einfachen Zinsen ausbezahlt, so daß ein im Jahre 1839 gezogenes und nicht gewinnendes Los mit 195 fl. eingelöset wurde. Nur die in den drei ersten Jahren herausgekommenen und nicht gewinnenden Lose hatten sich der Begünstigung zu erfreuen, daß sie nicht die ihrer Zeit entsprechenden, sondern vierjährige Interessen erhielten, indem sie alle mit 120 fl. ausbezahlt wurden. Ein im Jahre 1840 gezogenes und nicht gewinnendes Los ist mit 200 fl. eingelöset worden. — Die Ausbezahlung der gezogenen Lose sammt ihren Gewinnen erfolgten drei Monate nach der Ziehung, entweder bei der Universal-Staatsschulden-Kassa in Wien, oder bei dem Wechselhause M. A. Rothschild in Frankfurt am Main

In dem Jahre 1840 war die letzte Verlosung dieses Anlehens, welche am 2. März Statt fand, und in welcher noch 45 Serien oder 11700 Lose mit dem Gesammtbetrage von 2,705090 fl. in der Art ausbezahlt wurden, daß das ganze Anlehen vollständig getilgt ist.

Übersicht über die einzelnen Rückzahlungen, die bei diesem Anlehen Statt gefunden haben.

Ziehungs-Jahr	Anzahl der Serien	Anzahl der Lose	Höchster Gewinn	Betrag für Ein nicht gewinnendes Los	Gesammt-Rückzahlung in diesem Jahre
1821	35	9100	120000	120	fl. 1510350
1822					„ 1510350
1823	37	9620	100000		„ 1526000
1824					„ 1526000
1825	38	9880	80000	125	„ 1552350
1826				130	„ 1595500
1827	39	10140	70000	135	„ 1642750
1828	40	10400	60000	140	„ 1723600
1829				145	„ 1749855
1830			50000	150	„ 1776560
1831				155	„ 1825765
1832			60000	160	„ 1897470
1833			70000	165	„ 1989450
1834				170	„ 2018620
1835	41	10660	80000	175	„ 2144290
1836	42	10920		180	„ 2241560
1837	44	11440	100000	185	„ 2441025
1838				190	„ 2497400
1839	45	11700	120000	195	„ 2648445
1840				200	„ 2705090
	800 Serien mit 208000 Losen wurden zurückbezahlt mit				fl. 38,502430

Die Verkaufspreise waren in den Kursblättern pr. Stück notirt.

(6) Jemand kauft 6 Stück Lose vom Jahre 1820 nach dem Kurse von 284½ (am 21. März 1839). Was betragen diese? Antwort: 1707 fl.

(7) Wie hoch wird ein Rothschild'sches Los der genannten Art am 1. Juli 1839 zu stehen kommen, wenn man auf die Hoffnung des Gewinnes nicht Rücksicht nimmt, und sein Kapital mit 5% verzinset haben will?

Da diese Lose, wenn sie im nächstkommenden Jahre gezogen werden, ohne einen Gewinn zu erlangen, mit 200 fl. zurückzuzahlen sind, und diese Rückzahlung am 1. Juni erfolget, so hat man die Aufgabe zu lösen: Was sind 200 nach 11 Monaten zahlbare Gulden bei 5% Interessen-Vergütung alsogleich werth?

12 Monat : 5 fl. = 11 Monat : ? fl.	$104\frac{7}{12} : 100 = 200 : ?$
4 fl. 35 Kr.	Antwort: 191 fl. $14\frac{26}{251}$ Kr.

Anmerkung. Der in den Kursblättern aufgeführte bedeutend erhöhte Mehrbetrag war Prämie für die Hoffnung des Gewinnes.

§. 191. Von dem Darlehen mit Verlosung vom Jahre 1821.

Dieses Darlehen beruht auf dem von der Österreichischen Regierung am 28. Juli 1820 mit den Herren David Parish und M. A. Rothschild

und Söhne abgeschlossenen Vertrage über die Aufbringung einer Summe von 37,500000 fl.

In Folge dieses Vertrages bestand dieses Darlehen aus 150000 Stück gleicher Schuldverschreibungen, jede zu 250 fl. Konv. Münze.

Sämmtliche Schuldverschreibungen wurden in 14 Verlosungen, die in Zeiträumen von je 18 Monaten auf einander folgten, verloset, wobei bedeutende Prämien, und zwar bis 150000 fl. per Stück vorkamen. Die letzte Verlosung hat am Anfange Jänner 1841 Statt gefunden. Überdieß trug jede solche Staatsschuldverschreibung bis zum Tage der Verlosung 4% Interessen, die ganzjährig verfallen bezahlt wurden.

Gewöhnlich wurden diese Schuldverschreibungen vierperzentige Parzial-Obligazionen genannt, lauteten auf Überbringer, und waren mit Coupons über 10 fl. nach dem 1. Jänner jeden Jahres zahlbar versehen. Die bedeutenderen Gewinne wurden 3 Monate, die minder bedeutenden 12 und 24 Monate nach der Ziehung bar hinausbezahlt, gegen Rückerstattung der Original-Staatsschuldverschreibungen und aller noch nicht fälligen Coupons. — Die Ausbezahlung geschah bei der Universal-Staatsschulden-Kassa in Wien, oder auf Verlangen bei dem Wechselhause M. A. Rothschild in Frankfurt am Main.

Der auf den Kursblättern notirte Kurs versteht sich von 100 fl., woraus folgt: daß der Einkaufspreis einer solchen Obligazion den im Kursblatte notirten Kurs 2½mal enthält. Wird z. B. der Kurs 150 notirt, so ist der Preis Einer Obligazion 150×2½ oder 375 fl. Überdieß hatte der Käufer dem Verkäufer auch die 4perzentigen Interessen vom 1. Jänner bis zum Übernamstage zu verzinsen.

Übersicht von den einzelnen Rückzahlungen, die bei diesem Anlehen Statt fanden.

Ziehungstag	Anzahl der Lose	Höchster Gewinn	Gesammtbetrag der Rückzahlung
1. Anfangs Jän. 1822.......	2800	150000	fl. 1283200
2. „ Jän. 1823.......	3000	125000	„ 1285200
3. „ Juli 1824.......	3200	100000	„ 1288425
4. „ Jän. 1826.......	3400	90000	„ 1322925
5. „ Juli 1827.......	3600	80000	„ 1356725
6. „ Jän. 1829.......	3800	70000	„ 1394050
7. „ Juli 1830.......	4000	60000	„ 1437875
8. „ Jän. 1832.......	10000	60000	„ 3367700
9. „ Juli. 1833.......	12200	70000	„ 4236510
10. „ Jän. 1835.......	14400	80000	„ 5024985
11. „ Juli 1836.......	17600	90000	„ 6340195
12. „ Jän. 1838.......	21800	100000	„ 7879090
13. „ Juli 1839.......	25000	125000	„ 9355750
14. „ Jän. 1841.......	25200	150000	„ 9548885
	150000 Lose erhielten zurück		fl. 55,121515

(8) Jemand kauft am 5. September 5 Stück 4perzentige Parzial-Obligazionen im Kurse zu 152⅛%, was ist dafür zu bezahlen?

Für 5 Stück à 250 fl., oder 1250 fl. à 152⅛ %, Einkaufspreis	fl. 1901 „ 33¾
Hierzu die Inter. zu 4 % vom 1. Jän. bis 5. Sept. (244 Tage)	„ 33 „ 53⅓
Zusammen...fl.	1935 „ 27 $\frac{1}{12}$

§. 192. Von dem Darlehen mit Verlosung vom Jahre 1834.

Dieses Österreichische Staatspapier gründet sich auf ein Anlehen von 25 Millionen Gulden Konv. Münze vom 21. Mai 1834. Dieses Anlehen wurde von Seite der Finanz-Verwaltung in Folge Allerhöchster Ermächtigung vom 21. April 1834 mit den Wechselhäusern Arnstein und Eskeles, Geymüller und Komp., M. A. Rothschild und Söhne, und S. G. Sina abgeschlossen, und dessen Rückzahlung wird nach einem eigenen Verlosungsplane innerhalb 25 Jahren erfolgen.

Der ganze Betrag von 25 Millionen Gulden zerfällt in 50000 Schuldverschreibungen à 500 fl., wovon jede auf fünf gleiche Abtheilungen à 100 fl. getheilt ist. Diese Schuldverschreibungen können entweder ganz oder zu Fünftheilen veräußert werden.

Zwanzig ganze Schuldverschreibungen bilden Eine Serie. Es bestehen sonach 2500 Serien, und die Schuldverschreibungen führen zwei Nummern, wovon das Eine die Serie, das andere das Nummer der Schuldverschreibung bezeichnet.

Die ganzen Schuldverschreibungen sind im Formate eines Foliobogens ausgefertiget, wovon das erste Blatt eine Antheilsanerkennung von 500 fl. mit dem beigedruckten Inhalte der Hauptschuldverschreibung und des Verlosungsplanes enthält. Das andere Blatt besteht aus den eigentlichen, in fünf Abtheilungen ausgestellten Schuldverschreibungen à 100 fl., welche alle dasselbe Nummer der Serie und der Schuldverschreibung haben. Am linken Rande ist die Abtheilung bemerkt, am rechten Rande die Ausschnitts-Chiffre.

Vom Jahre 1836 angefangen bis einschlüßig 1860 wird jährlich am 1. Februar die Verlosung der in dem Plane bestimmten Anzahl von Serien, und am 1. Mai die Ziehung der Nummern der in die verlosten Serien eingetheilten Staatsschuldverschreibungen mit den darauf fallenden Gewinnen vorgenommen, wornach am 1. August die Auszahlung der planmäßigen Gewinne bei der Universal-Staats- und Bankoschulden-Kassa erfolgt.

Die gezogenen Gewinne gehören für die ganze Schuldverschreibung von 500 fl. Finden sich die Abtheilungen einer solchen Schuldverschreibung in verschiedenen Händen, so haben die verschiedenen Eigenthümer nur auf so viele Fünftheile des Gewinns einen Anspruch, als wie viele Abtheilungen sie wirklich besitzen.

Die Kurse im Wiener Kursblatte verstehen sich auf eine ganze Schuldverschreibung mit allen fünf Abtheilungen. Der fünfte Theil des bemerkten Kurses wäre daher der eigentliche Kurs für eine einzelne Abtheilung; allein die Kurse für die einzelnen Abtheilungen stehen gewöhnlich etwas höher. — In den auswärtigen Kursblättern versteht sich der notirte Kurs für Eine Abtheilung oder für Ein Los zu 100 fl.

Übersicht über die einzelnen Rückzahlungen, die bei diesem Staatsanlehen jährlich Statt finden.

Im Jahre	Anzahl der Serien	Anzahl der Lose	Gewinn kleinster	Gewinn größter	Jährliche Rückzahlung
1836	65	1300	580	320000	1,410480
1837	65	1300	580	320000	1,410480
1838	70	1400	580	300000	1,381660
1839	70	1400	580	300000	1,381660
1840	75	1500	600	250000	1,349900
1841	75	1500	620	250000	1,375920
1842	80	1600	640	225000	1,429940
1843	80	1600	660	225000	1,457360
1844	85	1700	680	210000	1,543080
1845	85	1700	700	210000	1,573400
1846	90	1800	720	200000	1,660570
1847	95	1900	740	200000	1,769190
1848	100	2000	760	180000	1,852270
1849	100	2000	780	200000	1,917930
1850	105	2100	800	200000	2,036750
1851	110	2200	820	210000	2,176670
1852	110	2200	840	210000	2,216640
1853	115	2300	860	225000	2,361510
1854	120	2400	880	225000	2,493405
1855	125	2500	900	250000	2,672450
1856	125	2500	920	250000	2,721370
1857	130	2600	940	300000	2,989890
1858	135	2700	960	300000	3,139385
1859	140	2800	980	320000	3,393940
1860	150	3000	1000	320000	3,655320

Zusammen...50000 Lose mit...............fl. 51,371170

§. 193. Von dem Darlehen mit Verlosung vom Jahre 1839.

In Folge Allerhöchster Entschließung und Ermächtigung Seiner k. k. apostolischen Majestät vom 1. April 1839 hat die k. k. allgemeine Hofkammer am 16. April 1839 mit den Wechselhäusern Arnstein, Eskeles, Geymüller und Komp., M. A. Rothschild und Söhne, und Simon G. Sina ein Anlehen von 30 Millionen Gulden Konv. Münze abgeschlossen, gegen dem, daß sich die k. k. Österreichische Regierung verbindlich macht,

die Rückzahlung desselben innerhalb vierzig Jahren vom **1.** Dezember **1840** bis **1.** Juni **1879** nach einem eigenen Verlosungsplane bar zu leisten.

Über die dargeliehene Summe wurden **120000** Schuldverschreibungen über den Betrag von zwei Hundert fünfzig Gulden Konv. Münze, wovon jede aus fünf Abtheilungen zu **50** fl. besteht, ausgefertiget, und den Darleihern zur Verfügung übergeben.

Diese **120000** Schuldverschreibungen sind in **6000** Serien abgetheilt, von welchen ede **20** Schuldverschreibungen enthält.

Die Verlosungen werden in der Art vorgenommen, daß vom **1.** Juni **1840** bis **1.** Dezember **1845** zwölf Ziehungen, jede nach **6** Monaten; vom **1.** Dezember **1846** bis **1.** Dezember **1851**, sechs Ziehungen, jede nach **12** Monaten, und vom **1.** Juni **1853** bis zum **1.** Dezember **1878** achtzehn Ziehungen, jede nach **18** Monaten, erfolgen.

Am **1.** Juni und **1.** Dezember eines jeden in dem Verlosungsplane bezeichneten Jahres werden die Ziehungen der Serien, und drei Monate darauf die Ziehungen der Nummern der in den verlosten Serien enthaltenen Schuldverschreibungen mit den darauf folgenden planmäßigen Gewinnen Statt finden, wornach in weiteren drei Monaten die Auszahlung der Gewinne erfolget.

Die Zurückzahlungen werden von der k. k. Universal-Staatsschulden-Kassa in Wien, oder von den Kredits-Kassen zu Prag, Brünn, Lemberg, Ofen, Hermanstadt, Linz, Salzburg, Grätz, Laibach, Klagenfurt, Görz, Innsbruck, Mailand, Venedig und Zara an den Überbringer der verlosten Schuldverschreibung bar in Konv. Münze geleistet werden, und zwar mit dem ganzen darauf gefallenen Gewinne, wenn alle, Eine Schuldverschreibung ausmachende Abtheilungen, beigebracht werden, und mit dem fünften Theile für einzelne Abtheilungen derselben.

Der Kurs wird beim Kauf und Verkaufe nach dem Nennwerthe bestimmt, wenn er mit **270** notirt ist, so heißt dieß **250** fl. Schuldverschreibung werden **270** fl. gleich gehalten, also auch **50** fl. von jenen gleich **54** fl. von diesen. Interessen-Vergütung findet nicht Statt.

Der geringste Betrag, von dem ein Los seiner Zeit von der Staatsverwaltung wieder eingelöset wird, ist sein doppelter Nennwerth, also bei vollständiger Schuldverschreibungen **500** fl.; bei den einzelnen Abtheilungen **100** fl.

Übersicht über die einzelnen Rückzahlungen, die bei diesem Staatsanlehen Statt finden.

Ziehungen		Anzahl der		Geldbetrag	
die wie vielte	Tag derselben	Serien	Schuldverschreibungen	als höchste Prämie	für jede Ziehung
1.	1. Juni 1840	35	700		fl. 721700
2.	1. Dez.				" 721700
3.	1. Juni 1841	35	700	250000	" 721700
4.	1. Dez.				" 721700
5.	1. Juni 1842	35	700		" 721700
6.	1. Dez.				" 721700
7.	1. Juni 1843	35	700		" 701700
8.	1. Dez.				" 701700
9.	1. Juni 1844	35	700	230000	" 701700
10.	1. Dez.				" 701700
11.	1. Juni 1845	35	700		" 701700
12.	1. Dez.				" 701700
13.	1. Dez. 1846	82	1640	210000	" 1,200000
14.	" 1847	86	1720	210000	" 1,228500
15.	" 1848				" 1,228500
16.	" 1849	90	1800		" 1,258000
17.	" 1850				" 1,258000
18.	" 1851	94	1880		" 1,298500
19.	1. Juni 1853				" 1,298500
20.	1. Dez. 1854	98	1960	200000	" 1,338500
21.	1. Juni 1856				" 1,338500
22.	1. Dez. 1857	102	2040		" 1,388500
23.	1. Juni 1859				" 1,388500
24.	1. Dez. 1860	106	2120		" 1,433500
25.	1. Juni 1862				" 1,433500
26.	1. Dez. 1863	110	2200	210000	" 1,495000
27.	1. Juni 1865				" 1,495000
28.	1. Dez. 1866	114	2280		" 1,558000
29.	1. Juni 1868				" 1,558000
30.	1. Dez. 1869	228	4560	220000	" 2,733600
31.	1. Juni 1871				" 2,733600
32.	1. Dez. 1872	474	9480		" 5,197700
33.	1. Juni 1874				" 5,197700
34.	1. Dez. 1875	830	16600	280000	" 8,858500
35.	1. Juni 1877				" 8,858500
36.	1. Dez. 1878	834	16680	300000	" 8,933500
	Zusammen....	6000	120000		fl. 74,250500

(9) Zu wie viel Prozente verinteressirt sich bei einfachen Zinsen jede Schuldverschreibung bis zu ihrer Verlosung, wenn sie mit dem niedersten Treffer gezogen wird?

Da die Interessen 250 fl. dem Kapitale 250 fl. gleich sind, so folgt aus der Formel:

$$P = \frac{100\,J}{KZ},\ P = \frac{100}{Z},$$

oder man findet die in Frage stehende Anzahl Prozente, wenn man 100 durch die Zeit (vom 1. Juni 1839 bis zum Zahlungstage der verlosten Schuldverschreibung) dividirt. Die hier folgende Tabelle gibt für jede Verlosung die Zeit, für welche die Interessen zu berechnen kommen, und die daraus folgende Anzahl der Prozente an.

Verlosung	Interessen-Dauer	%	Verlosung	Interessen-Dauer	%
1.	1½ Jahr	66⅔	19.	14½ Jahr	6 26/29
2.	2 "	50	20.	16 "	6¼
3.	2½ "	40	21.	17½ "	5 5/7
4.	3 "	33⅓	22.	19 "	5 5/19
5.	3½ "	28 4/7	23.	20½ "	4 36/41
6.	4 "	25	24.	22 "	4 6/11
7.	4½ "	22 2/9	25.	23½ "	4 12/47
8.	5 "	20	26.	25 "	4
9.	5½ "	18 2/11	27.	26½ "	3 41/53
10.	6 "	16⅔	28.	28 "	3 4/7
11.	6½ "	15 5/13	29.	29½ "	3 23/59
12.	7 "	14 2/7	30.	31 "	3 7/31
13.	8 "	12½	31.	32½ "	3 1/13
14.	9 "	11 1/9	32.	34 "	2 16/17
15.	10 "	10	33.	35½ "	2 58/71
16.	11 "	9 1/11	34.	37 "	2 26/37
17.	12 "	8⅓	35.	38½ "	2 46/77
18.	13 "	7 9/13	36.	40 "	2½

Anmerkung. Mehrere hierher gehörige Aufgaben werden in der Folge nach der Lehre von den Berechnungen der Zinseszinsen aufgelöset werden.

§. 194. Von den Österreichischen Bank-Akzien.

Durch das Allerhöchste Patent vom 1. Junius 1816 war die Errichtung einer priv. k. k. Österreichischen Nazionalbank befohlen. Durch ein zweites Allerhöchstes Patent vom 15. Juli 1817 wurden die Haupt-Normen für diese Bank festgesetzt.

Es wurde angeordnet, daß 100000 Akzien ausgegeben werden sollten, jede gegen eine Einlage von Ein Tausend Gulden Wiener Währung, und Ein Hundert Gulden Silbermünze.

Für das im Wege der Akzien-Einlage eingegangene und vertilgte Papiergeld stellte die Staatsverwaltung 2½perzentige, in Konv. Münze verzinsliche Obligazionen auf die Nazionalbank aus, und bestimmte zur Tilgung der ausgestellten Obligazionen eine jährliche Rente in Konv. Münze, gegen welche der doppelte Kapitalsbetrag in Obligazionen von den Forderungen der Bank abzuschreiben ist.

Den Akzionären gebührt für jede Akzie, welche sie besitzen, ein gleicher Antheil an dem Fonde der Bank, und an den davon entfallenden Erträgnissen. Während der Dauer der Bankgesellschaft ist nur das letzte zur Vertheilung geeignet.

Als gewöhnliche Dividende sind jährlich von dem erzielten Überschusse 30 fl. für Eine Akzie zu vertheilen, und über die, nach Bedeckung der gewöhnlichen Dividende, noch bleibende freie Summe, kann der Bankausschuß beschließen, welcher Betrag davon unter die Akzionäre vertheilt werden soll, und wie viel davon in den Reservefond zu hinterlegen ist.

Am Schlusse des Jahres 1819 waren schon die Einlagen für 50621 Akzien gemacht. Bei diesem raschen Anwachsen des Fondes fand es die Bank ersprießlich, der hohen Staatsverwaltung den Wunsch auszusprechen, daß, um die Bezüge der Akzionäre nicht zu sehr zu schmälern, die Vermehrung der Akzien bis zu einer gleichmäßigen Erweiterung der fruchtbringenden Geschäfte unterbrochen werde. Die hohe Staatsverwaltung entsprach diesem Wunsche mit beschränkenden Erklärungen.

Durch weitere Verhandlungen der Bankdirekzion mit der hohen Staatsverwaltung sind dann die noch nicht ausgegebenen 49379 Akzien zur freien Disposizion der Bank selbst gestellt worden, wodurch die Bank die Mittel erlangte, ihren Fond dann und in dem Verhältnisse zu erweitern, als es der Betrieb ihrer Unternehmung und die Thunlichkeit, daraus einen Vortheil für die Akzionäre zu ziehen, erheischt.

§. 195. Die Erträgnisse von den Akzien, welche Dividende heißen, sind zweierlei, ordentliche und außerordentliche. Die ordentliche Dividende für Eine Akzie ist jährlich 30 fl. Konvenzions-Münze, wovon 15 fl. am 1. Jänner und 15 fl. am 1. Juli eines jeden Jahres fällig sind. Die außerordentliche Dividende wird aus dem Gewinne der Bankgeschäfte gebildet, von der Bankdirekzion dann öffentlich bekannt gemacht, und mit der ordentlichen Dividende zugleich bezahlt.

Die Dividenden waren anfänglich nur gegen gestempelte Quittungen zu erheben. Seit April 1821 sind die meisten Akzien mit einem Couponsblatte zur Behebung der halbjährigen Dividende bis zu Ende des Jahres 1840 versehen.

Von der sich jährlich ergebenden außerordentlichen Dividende wird auch immer ein Theil in den Reservefond der Bank hinterlegt.

§. 196. Der Kurs der Akzien ist für Ein Stück notirt, und richtet sich gewöhnlich nach den vermutheten jährlichen Dividenden, im Vergleiche der jährlichen Erträgnisse anderer verzinslicher Staatspapiere. Der Käufer einer Akzie hat dem Verkäufer nebst dem bestimmten Kurse auch den laufenden Betrag der ordentlichen Dividende zu vergüten.

Die ordentliche Dividende macht täglich 5 Kreuzer für Eine Akzie aus; denn sie ist gleich $\frac{30 \times 60}{360} = 5$.

(10) Was hat man für 5 Stück Bankakzien zu dem Kurse von 1525 fl. am 13. September zu bezahlen?

Fünf Stück Bankakzien zu dem Kurse 1525 fl.	7625 fl.	—
Ordentliche Dividende für 73 Tage à 5 Kr. täglich per Stück	30 „	25
Zusammen	7655 „	25

(11) Wenn die 5perzentigen Obligazionen den Kurs von 108 haben, welcher Kurs würde für Eine Bankakzie entfallen, wenn die Dividende mit $66\frac{1}{2}$ vermuthet wird?

$5 : 66\frac{1}{2} = 108 : ?$ Antwort: $1436\frac{2}{5}$ fl.

(12) Eine wie große Dividende wird vermuthet, wenn der Kurs der 5perzentigen Obligazionen 108, der Kurs der Bankakzien 1525 notirt ist?

$108 : 1525 = 5 :$ Div. Antwort: 70 fl. $36\frac{1}{9}$ Kr.

Vierzehnter Abschnitt.

Von der Zinseszinsen-Rechnung.

§. 197. Wenn Jemand ein bestimmtes Kapital (z. B. 1000 fl.) zu bestimmten Prozenten (5%) unter der Bedingung anlegt, daß die nach einem vorhinein bestimmten Zeitraume (nach Einem Jahre) hiervon entfallenden Interessen (50 fl.) wieder zum Kapitale geschlagen werden; wenn ferner die im nächsten Zeitraume so angewachsene Summe (1050 fl.) verinteressirt und dieses Verfahren nach jedem späteren Zeitraume auf dieselbe Art wiederholt wird, so sagt man: das Kapital ist zu Zinseszinsen angelegt. — Das Rechnungsverfahren, wodurch die Summe aufgefunden wird, zu welcher ein auf diese Art angelegtes Kapital nach einer gegebenen Anzahl von Zeitperioden anwächst, und mittelst welchem auch die übrigen noch hierher gehörigen Rechnungsfragen gelöset werden können, heißt die Zinseszinsenrechnung, das Hinzugeben der jeweiligen verfallenen Interessen zum Kapitale, um ein neues Kapital zu erhalten, heißt Kapitalisazion.

§. 198. Die bei solchen Aufgaben vorkommenden Größen sind 1. die ursprüngliche Kapitalssumme K, 2. die Prozente P., 3. die Zeit der Kapitalisazion, 4. die ganze Zeit N, für welche die angewachsene Summe berechnet werden soll, endlich 5. die angewachsene Summe S, selbst. Die Zinseszinsenrechnung muß sonach lehren, jede der Größen K, P, N, S aus den gegebenen andern durch gehörige Rechnungsverbindung richtig abzuleiten.

§. 199. Um das für diesen Zweck erforderliche Verfahren kennen zu lernen, wollen wir die Aufgabe auflösen: Ein Kapital K ist zu P Prozente durch N Zeitperioden angelegt. Zu einer wie großen Summe S wird es in dieser Zeit anwachsen, wenn die Kapitalisazion am Schlusse eines jeden Jahres geschieht?

Auflösung: Am Ende des ersten Jahres wird man das Kapital K selbst, sammt den davon entfallenden Interessen für dieses Jahr $\left(\frac{KP}{100}\right)$ haben; demnach wird das neue Kapital nach der ersten Kapitalisazion seyn:

$$S_1 = K + \frac{KP}{100} = K\left(1 + \frac{P}{100}\right) = K\,(1 + p)$$

wenn man der Kürze wegen den Ausdruck $\frac{P}{100} = p$ setzt, was auch späterhin immer so geschehen wird.

Am Ende des zweiten Jahres wird man das Kapital S_1, sammt den davon entfallenden Zinsen $\frac{K(1+p)P}{100}$ haben müssen, und es ist dieses Kapital nach der zweiten Kapitalisazion:

$$S_2 = K(1+p) + \frac{K(1+p)P}{100} = K(1+p)\left(1+\frac{P}{100}\right)$$
$$= K(1+p)(1+p) = K(1+p)^2.$$

Am Ende des dritten Jahres wird man das Kapital S_2 sammt den davon entfallenden Zinsen $\frac{K(1+p)^2 P}{100}$ haben müssen, es ist daher:

$$S_3 = K(1+p)^2 + \frac{K(1+p)^2 P}{100} = K(1+p)^2(1+p) = K(1+p)^3.$$

Durch fortgesetzte Untersuchungen wird man auf dieselbe Weise auffinden:

$S_4 = K(1+p)^4$; $S_5 = K(1+p)^5$; u. s. w., mithin allgemein:

$$S_N = K(1+p)^N.$$

§. 200. Es ist keineswegs nothwendig, daß N Jahre bezeichnet, sondern blos Zeitperioden von gleicher, jedoch beliebiger Dauer, also auch halbe oder Vierteljahre, Monate u. dgl.; nur ist hierbei zu bemerken, daß für den Fall, als unter N nicht Jahre verstanden werden, auch P nicht die Prozente pro anno bedeuten kann, sondern daß es blos jenen Theil dieser Prozente bezeichnet, welcher hiervon der Dauer der Zeitperioden entsprechend ist. Demnach ist bei einer 5%tigen Verzinsung und halbjähriger Kapitalisazion $P = 2{\cdot}5$, bei vierteljähriger Kapitalisazion $P = 1{\cdot}25$, bei monatlicher Kapitalisazion $P = \frac{5}{12} = 0{\cdot}41\dot{6}$; folglich auch im ersten Falle $p = 0{\cdot}025$, im zweiten $p = 0{\cdot}0125$, im letzten $p = 0{\cdot}0041\dot{6}$ u. s. w.

§. 201. Sammlung mehrerer hierher gehöriger Aufgaben.

(1) Ein Kapital von 3600 fl. wird zu 5% mit Zinseszinsen angelegt, zu welchen Betrag wird es nach 12 Jahren anwachsen; a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger, c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Wegen a) $K = 3600$, $P = 5$, $N = 12$, $p = 0{\cdot}05$, $(1+p) = 1{\cdot}05$

$\log(1+p)^{12} = 12 \log(1+p) = 0{\cdot}0211893 \times 12$
$= 0{\cdot}2542716$
$\log K = 3{\cdot}5563025$
$\log S_{12} = 3{\cdot}8105741$
$S_{12} = 6465{\cdot}08$ fl.

Es wachsen sonach 3600 fl. bei ganzjähriger Kapitalisazion nach 12 Jahren zu den Betrag von 6465 fl. 5 Kr. an.

Wegen b) $K = 3600$, $N = 24$, $(1+p) = 1{\cdot}025$

$\log.(1+p)^{24} = 24 \log.(1+p) = 0{\cdot}0107239 \times 24$
$= 0{\cdot}2573736$
$\log. 3600 = 3{\cdot}5563025$
$\log. S_{24} = 3{\cdot}8136761$
$S_{24} = 6511{\cdot}42$

Es wird sonach bei halbjähriger Kapitalisazion aus 3600 fl. der Betrag 6511 fl. 25 Kr.

Wegen c) $K = 3600$, $N = 48$, $(1+p) = 1\cdot0125$.

$\log.(1+p)^{48} = 48 \log.(1+p) = 0\cdot0053950 \times 48$

$= 0\cdot2589600$

$\log. K = 3\cdot5563025$

$\log. S_{48} = 3\cdot8152625$

$S_{48} = 6535\cdot25$

Sonach wachsen 3600 fl. bei vierteljähriger Kapitalisazion zu den Betrag von 6535 fl. 15 Kr. an.

Werden blos die einfachen Zinsen zu 5 % berechnet, so betragen diese 2160 fl., folglich sammt dem anfänglichen Kapitale 3600 fl., die Summe 5760 fl.

(2) Ein Kapital von 2400 fl. wird zu 5 % mit Zinseszinsen angelegt. Zu welchen Betrag wird es nach 10 Jahren anwachsen, wenn die Kapitalisazion a) ganzjährig, b) halbjährig, und c) vierteljährig gerechnet wird?

Antwort. Bei ganzjähriger Kapitalisazion zu 3909 fl. 21 Kr., bei halbjähriger zu 3932 fl. 41 Kr., bei vierteljähriger zu 3944 fl. 41 Kr. — Nach der einfachen Verzinsung würde man nur 3600 fl. erhalten.

§. 202. Läßt sich die gegebene Zeit nicht genau in Zeitperioden von der verlangten Dauer eintheilen, sondern bleibt hierbei noch ein Rest, so suche man S für die in der gegebenen Zeit enthaltenen ganzen Perioden, und wegen des Restes der Zeit bestimme man aus dem auf diese Weise aufgefundenen Werthe von S_N mittelst der gemeinen Interessenrechnung die Interessen, welche zu S_N addirt, das Verlangte geben müssen.

(3) Zu einer wie großen Summe wächst ein zu 6 % auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von 3600 fl. in 11 Jahren und 9 Monaten an, a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger, c) bei vierteljähriger Kapitalisazion:

Wegen a) ist $K = 3600$, $N = 11$, $(1+p) = 1\cdot06$

$\log.(1+p) = 0\cdot0253059$

$11 \log.(1+p) = 0\cdot2783649$

$\log. 3600 = 3\cdot5563025$

$\log. S_{11} = 3\cdot8346674$

$S_{11} = 6833\cdot88$

Werden von diesen 6833·88 fl. die Interessen für 9 Monate zu 6 % nach der gemeinen Interessenrechnung berechnet, so findet man 307·52 fl. Es ist sonach die angewachsene Summe bei ganzjähriger Kapitalisazion 7141 fl. 24 Kr.

Wegen b) ist $K = 3600$, $N = 23$, $(1+p) = 1\cdot03$

$\log.(1+p) = 0\cdot0128372$

$23 \log.(1+p) = 0\cdot2952556$

$\log. K = 3\cdot5563025$

$\log. S_{23} = 3\cdot8515581$

$S_{23} = 7104\cdot9$

Werden hiervon die Interessen zu 6 % auf 3 Monate berechnet, so erhält man 106·57 fl., oder es ist die ganze auf diese Weise angewachsene Summe = 7211·47 fl., oder 7211 fl. 28 Kr.

Wegen c) ist $K = 3600$, $N = 47$, $(1+p) = 1\cdot015$.

$\log.(1+p) = 0\cdot0064660$

$47 \log.(1+p) = 0\cdot3039020$

$\log. K. = 3\cdot5563025$

$\log. S_{47} = 3\cdot8602045$

$S_{47} = 7247\cdot77$

Hieraus ist ersichtlich, daß der Betrag von 3600 fl. nach den gegebenen Bedingungen zur Summe von 7247 fl. 46 Kr. anwächst.

Durch blos einfache Interessen geschieht die Kapitalsvermehrung nur bis 6138 fl.

(4) Zu einer wie großen Summe wächst ein zu 5 % auf Zinseszinsen angelegtes Kapital von 1000 fl. in 12 Jahren und 9 Monaten an?

Antwort: a) bei ganzjähriger Kapitalisazion zu 1863 fl. 12 Kr.
b) „ halbjähriger „ „ 1877 fl. 7 Kr.
c) „ vierteljähriger „ „ 1884 fl. 17 Kr.
Nach der einfachen Verzinsung „ 1737 fl. 30 Kr.

§. 203. Aus der allgemeinen Formel $S_N = K\,(1+p)^N$ ist man im Stande, die noch zur Zinseszinsenrechnung gehörigen Formeln zur Beantwortung der übrigen vorkommenden Rechnungsfragen aufzustellen. Man findet nämlich aus derselben

$$\log.\ S = \log.\ K + N \log.\ (1+p)\text{, und hieraus}$$

$$\log.\ K = \log.\ S - N \log.\ (1+p)\text{; ferner } N = \frac{\log.\ S - \log.\ K}{\log.\ (1+p)}\text{; endlich}$$

$$\log.\ (1+p) = \frac{\log.\ S - \log.\ K}{N}.$$

(5) Ein wie großes Kapital muß man zu 4½ % anlegen, damit es nach 15 Jahren zu den Betrag von 10000 fl. anwächst? a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger, c) bei vierteljähriger Kapitalisazion.

Wegen (a) ist $S = 10000$, $N = 15$, $(1+p) = 1{\cdot}045$, $\log.\ (1+p) = 0{\cdot}0191163$
$N \log.\ (1+p) = 0{\cdot}2867445$; $\log.\ S = 4$; $\log K = 3{\cdot}7132555$,

Demnach ist $K = 5167{\cdot}2$, oder 5167 fl. 12 Kr.

Wegen (b) ist $S = 10000$, $N = 30$, $(1+p) = 1{\cdot}0225$, $\log\ (1+p) = 0{\cdot}0096633$
$N \log.\ (1+p) = 0{\cdot}2898990$, $\log.\ S = 4$; $\log.\ K = 3{\cdot}7101010$,

Demnach ist $K = 5129{\cdot}8$, oder 5129 fl. 48 Kr

Wegen (c) ist $S = 10000$, $N = 60$, $(1+p) = 1{\cdot}01125$, $\log.\ (1+p) = 0{\cdot}0048586$
$N \log.\ (1+p) = 0{\cdot}2915160$, $\log.\ S = 4$, $\log.\ K = 3{\cdot}7084840$.

Demnach ist $K = 5110{\cdot}74$, oder 5110 fl. 44 Kr.

Zur Erreichung eben dieses Zweckes wäre bei einer blos einfachen Verzinsung ein Kapital von 5970 fl 9 Kr. erforderlich.

(6) Ein wie großes Kapital muß man zu 5½ % anlegen, daß dieses nach 6 Jahren zu den Betrag von 2500 fl. anwächst, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Bei ganzjähriger Kapitalisazion .... 1813 fl. 7 Kr.
„ halbjähriger „ .... 1805 fl. 20 Kr.
„ vierteljähriger „ .... 1801 fl. 21 Kr.

Würden blos einfache Interessen gerechnet, so müßte man zur Erreichung desselben Zweckes 1879 fl. 42 Kr. anlegen.

(7) Wie viele Jahre muß ein Kapital von 5400 fl. zu 6 % auf Zinseszinsen anliegen, um bei halbjähriger Kapitalisazion zu den Betrag von 10977 fl. 4 Kr. anzuwachsen?

Die Auflösung dieser Aufgabe wird bewirkt nach der Formel

$$N = \frac{\log.\ S - \log K}{\log.\ (1+p)}.$$ Für diesen Fall ist $S = 10977{\cdot}06$, $K = 5400$,
$(1+p) = 1{\cdot}03$, $\log.\ S = 4{\cdot}0404866$, $\log.\ K = 3{\cdot}7323938$,
$\log.\ S - \log\ K = 0{\cdot}3080928$, $\log.\ (1+p) = 0{\cdot}0128372$; folglich

$$N = \frac{0{\cdot}3080928}{0{\cdot}0128372} = 24.$$

Da N = 24 halbe Jahre gefunden wird, so folgt, daß dieses Kapital binnen 12 Jahren zur verlangten Summe anwächst. Sollte das gegebene Kapital blos durch die einfachen Zinsen zu den genannten Betrag anwachsen, so müßte es 17 Jahre, 2 Monate und 16 bis 17 Tage anliegen.

Anmerkung. Ein für N nebst den ganzen Zeitperioden etwa noch aufgefundener Dezimalbruch kann, wenn die Rechnung ganz genau seyn soll, nicht sogleich in Monate und Tage aufgelöset werden, sondern es bezeichnen blos die für N aufgefundenen Ganzen die vollständigen Perioden. Man muß für diesen Fall S dem gefundenen N entsprechend, besonders berechnen, und dieses Resultat von dem gegebenen S subtrahiren. Die aufgefundenen Differenzen sind die gemeinen Interessen von dem neu berechneten S zu P Prozente in der Zeit, die über die Nte Periode hinausgeht, die aber aus den nun vorhandenen Angaben nach der einfachen Interessenrechnung leicht bestimmbar ist.

(8) Wie viele Jahre muß ein Kapital von 4800 fl. zu 5 % Zinseszinsen anliegen, um zu den Betrag von 12000 fl. anzuwachsen, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion:

Wegen (a) ist $S = 12000$, $K = 4800$, $(1+p) = 1\cdot05$, $\log.(1+p) = 0\cdot0211893$, $\log.\ S = 4\cdot0791812$, $\log.\ K = 3\cdot6812412$; also ist

$$N = \frac{0\cdot3979400}{0\cdot0211893} = 18 \text{ ꝛc.}$$

Nun ist die Aufgabe zu lösen: Zu welcher Summe wächst der Betrag von 4800 bei 5 % Zinseszinsen in 18 Jahren an?

$N \log(1+p) = 0\cdot0211893 \times 18 = 0\cdot3814074$, $\log.\ K = 3\cdot6812412$, also ist $\log.\ S_{18} = 4\cdot0626486$, woraus man $S_{18} = 11551\cdot76$ fl. auffindet. — Die Differenz zwischen diesem Betrage und 12000 fl. ist 448·24 fl., woraus sich die weitere Aufgabe ergibt: Wie lange muß das Kapital von 11551·76 fl. zu 5 % anliegen, um 448·24 fl. Interessen zu geben? — Die gemeine Interessenrechnung gibt 9 Monate 9 bis 10 Tage. — Also würde das Kapital 4800 fl. durch 18 Jahre 9 M. 9 Tage anliegen müssen, um nach den Bedingungen (a) zur Summe 12000 fl. anzuwachsen.

Wegen (b) ist $S = 12000$, $K = 4800$, $(1+p) = 1\cdot025$, folglich $N = \frac{3\cdot3979400}{0\cdot0107239} = 37$ halbe Jahre ꝛc. Hieraus ergibt sich die Aufgabe: Zu welcher Summe wächst ein Kapital von 4800 fl. bei 5 % Zinseszinsen und halbjähriger Kapitalisazion in 18½ Jahr an? Antwort: zu 11968·1 fl.

Endlich ist noch die Aufgabe aufzulösen: Wie lange muß das Kapital 11968 fl. 6 Kr. den gegebenen Bedingungen gemäß anliegen, um 31 fl. 54 Kr. Interessen zu geben? Antwort: 19 bis 20 Tage. — Also müßte das Kapital von 4800 fl. bei halbjähriger Kapitalisazion durch 18 Jahr, 6 M. und 19 bis 20 Tage anliegen, um zu den Betrag von 12000 fl. anzuwachsen.

Wegen (c) ist $S = 12000$, $K = 4800$, $(1+p) = 1\cdot0125$; folglich

$$N = \frac{0\cdot3979400}{0\cdot0053950} = 73$$ Vierteljahre ꝛc. Aus 4800 fl. werden nach 73 Vierteljahren 11887 fl. 8 Kr., welche, um die noch mangelnden 112 fl. 52 Kr. Interessen zu geben, noch 2 Monate und 8 bis 9 Tage anliegen müssen. Es muß daher das Kapital von 4800 fl. nach dieser Bedingung, um zu 12000 fl. anzuwachsen, 18 J. 5 M. 8 bis 9 Tage anliegen.

Werden blos die einfachen Zinsen berechnet, so wird man auffinden, daß das Kapital **30** Jahre anliegen müßte, um zur verlangten Summe anzuwachsen.

(9) Wie viele Jahre muß ein Kapital von **2400** fl. zu **5** % zu Zinseszinsen anliegen, daß es um die Hälfte größer wird, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Antwort: Bei ganzjähriger Kapitalisazion **8** Jahre **3** Monate **20** Tage,
„ halbjähriger „ **8** „ **2** „ **15** „
„ vierteljähriger „ **8** „ **1** „ **28** „

(10) Zu wie viel Prozente verinteressirt sich ein Kapital von **4000** fl., welches bei ganzjähriger Kapitalisazion nach **10** Jahren zu dem Betrag von **7163** fl. **24** Kr. anwächst?

Die Auflösung dieser Aufgabe wird durch die Formel

$$\log.(1+p) = \frac{\log.S - \log.K}{N}$$ möglich. Hier ist

$$S = 7163{\cdot}4,\ K = 4000,\ N = 10,$$

also $$\log.(1+p) = \frac{3{\cdot}8551192 - 3{\cdot}6020600}{10} = 0{\cdot}0253059;$$ daher

$(1+p)\ 1{\cdot}06,\ p = 0{\cdot}06,\ P = 100\,p = 6.$

Es war also dieses Kapital zu **6** % Zinseszinsen angelegt.

(11) Jemand hat **4500** fl. angelegt, und dafür sammt Zinsen und Zinseszinsen nach **6** Jahren **6400** fl. zurückerhalten. Zu wie viel Prozente hat sich dieses Kapital (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion verzinset?

Bei ganzjähriger Kapitalisazion zu **6·0461** Prozent,
„ halbjähriger „ „ **5·9572** „
„ vierteljähriger „ „ **5·9136** „

§. **204**. Bestimmung des Verfahrens, um die Zeit aufzufinden, nach welcher sich ein Kapital vervielfältiget. Um dieses Verfahren aufzufinden, wollen wir folgende Aufgabe auflösen.

(12) Wie viele Jahre muß ein Kapital **K** zu **P** % anliegen, um mmal so groß zu werden (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Für diesen Fall ist in der allgemeinen Form $S = K(1+p)^N$ die Größe $S = mK$, oder es ist $mK = K(1+p)^N$, woraus man auffindet, $m = (1+p)^N$, folglich wird $N = \frac{\log.m}{\log.(1+p)}$. Diese Form enthält die ganzen Zeitperioden genau, aber meistens noch einen Dezimalbruch. Dieser Dezimalbruch kann aber nach der zunächst erwähnten Anmerkung keineswegs, wenn er resolvirt wird, benützt werden, um die noch weitern kleineren Zeitperioden, die Monate, anzugeben. Um aber die noch nachfolgenden kleineren Zeitperioden zu erhalten, ist m zu vermindern um jenen Betrag, zu welchen das Kapital während der aufgefundenen ganzen Perioden anwächst, d. i. um $(1+p)^N$, welcher Ausdruck $m-(1+p)^N$ sonach die Interessen anzeigt, die aus der nach **N** Perioden angewachsenen Summe $(1+p)^N$ in dem noch zu bestimmenden Zeitraume, der keine vollständige Zeitperiode mehr umfaßt, und sonach kleiner als Eine solche seyn

muß, entfallen. — Aus diesen Interessen findet man die denselben entsprechende Zeit nach der gemeinen Interessenrechnung. — Da aber die Zeit gleich ist den 100fachen Interessen, $100[m-(1+p)^N]$, dividirt durch das Kapital $(1+p)^N$, und die Prozente $P=100\,p$, so findet man $Z=\frac{100[m-(1+p)^N]}{100\,p\,(1+p)^N}$ $=\frac{m-(1+p)^N}{p\,(1+p)^N}$. — Diese Form bezieht sich auf Jahre, welche wegen Eines Monats noch mit $\frac{1}{12}$ dividirt, d. i. mit 12 multiplizirt werden muß. Diesem nach findet man die Zeit in Monaten $=\frac{[m-(1+p)^N]12}{p\,(1+p)^N}$ — Da diese Form sich schon auf einfache Zinsen bezieht, so ist der daraus in Dezimalen fortgesetzte Quozient sogleich für die noch zu bestimmenden Tage zu benützen, und braucht nur in diese resolvirt zu werden. — Sollte jedoch N für eine halbjährige Kapitalisazion gelten, so ist offenbar statt 12 die Zahl 6 zu setzen.

(13) Wie lange muß ein Kapital zu 5 % mit Zinseszinsen liegen bleiben, um um die Hälfte größer zu werden, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger Kapitalisazion.

Für diesen Fall ist wegen (a) $m=1{\cdot}5$; $(1+p)=1{\cdot}05$; $N=\frac{0{\cdot}1760913}{0{\cdot}0211893}$ $=8{\cdot}$ ꝛc.; ferner ist die noch zu bestimmende Zeit in Monaten, wegen $(1+p)^N=1{\cdot}477456$ gleich $\frac{[1{\cdot}5-1{\cdot}477456]12}{0{\cdot}05\times1{\cdot}477456}=\frac{0{\cdot}022544\times12}{0{\cdot}0738728}=$ $\frac{0{\cdot}270528}{0{\cdot}0738728}=3{\cdot}662$ Monate $=3$ Monate 20 Tage; dieses Resultat ist mit den in der Aufgabe (9) vorkommenden übereinstimmend.

Wegen (b) ist wieder $m=1{\cdot}5$; aber $1+p=1{\cdot}025$; $N=\frac{0{\cdot}1760913}{0{\cdot}0107239}$ $=16{\cdot}$ ꝛc. Hieraus wird $(1+p)^N=1{\cdot}484506$: folglich ist die Anzahl der noch zu bestimmenden Monate $=\frac{(1{\cdot}5-1{\cdot}484506)6}{0{\cdot}025\times1{\cdot}484506}=\frac{0{\cdot}015494\times6}{0{\cdot}03711265}$ $=\frac{0{\cdot}09964}{0{\cdot}03711265}=2{\cdot}505$ Monate $=2$ Mon. 15 Tage. Wie bei (9).

(14) Wie lange muß ein Kapital sammt 5% Zinseszinsen anliegen, um (a) 2mal, (b) 4mal, (c) 5mal, (d) 6mal, (e) 8mal, (f) 10mal größer zuwerden, bei ganzjähriger Kapitalisazion?

(a) log. 2 $=0{\cdot}3010300$

$0{\cdot}3010300 : 0{\cdot}02119$
891 $\quad N=14{\cdot}$ ꝛc.
43

$(1+p)^N=1{\cdot}979932$
$m=2$

$m-(1+p)^N=0{\cdot}020068$
$\times12=0{\cdot}240816$
$p\,(1+p)^N=0{\cdot}0989966$

Z = 0·240816 : 0·09,8,9,9,6,6,
4282 — M. 2·432
322
25 — T. 12·96
5

Antwort: 14 Jahr, 2 Mon. 13 Tage.

(b) log. m = 0·6020600
log. (1+p) = 0·02119
N = 0·60206 : 0·021,1,9, — 28· ꝛc.
1782
87

$(1+p)^N = 3·920130$
m = 4
$m-(1+p)^N = 0·079870$
$\times 12 = 0·958440$
$p\,(1+p)^N = 0·1960065$

Z = 0·9584,4,0 : 0·19,6,0,0,6,5
1744 — M. 4.89
176
T. 26·7

Antwort: 28 Jahr, 4 Mon. 27 Tage.

(c) log. m = 0·6989700
N = 0·69897 : 0·0211,9 — 32 ꝛc.
632
209

$(1+p)^N = 4·764942$
m = 5
$m-(1+p)^N = 0·235058$
$\times 12 = 2·820696$
$p\,(1+p)^N = 0·23824710$

Z = 2·820696 : 0·23,8,2,4,7,1
4381 — M. 11·83
1999
93 — T. 24·9
21

Antwort: 32 Jahr, 11 Mon., 25 Tage.

(d) log m = 0·7781513
N = 0·7781513 : 0·0211,9 — 36· ꝛc.
1424
152

$(1+p)^N = 5·791817$
m = 6
$m-(1+p)^N = 0·208183$
$\times 12 = 2·498196$
$p\,(1+p)^N = 0·28959085$

Z = 2·498196 : 0·28,9,5,9,0,8,5
18147 — M. 8·626
771
192 — T. 18·78
18

Antwort: 36 Jahr, 8 Mon., 19 Tage.

(e) log. m = 0·9030900
N = 0·90309 : 0·02119 — 42 ꝛc.
554
130

$(1+p)^N = 7·761588$
m = 8
$m-(1+p)^N = 0·23841$[illegible]
$\times 12 = 2·86094$
$p\,(1+p)^N = 0·388074$

Z = 2·860944 : 0·3,8,8,0,7,9,4
1444 — M. 7·372
277
5 — T. 11·19

Antwort: 42 Jahr, 7 Mon., 11 Tage.

(f) log. m = 1	$(1+p)^N = 9{\cdot}905972$
N = 1· : 0·02119	$m = 10$
1524 ———	$m-(1+p)^N = 0{\cdot}094028$
41 47· ꝛc.	$\times 12 = 1{\cdot}128336$
	$p(1+p)^N = 0{\cdot}4952986$

Z = 1·128336 : 0·4,9,5,2,9,8,6
1377 : ———
386 M. 2·278
39 T. 8·34

Antwort: 47 Jahr, 2 Mon., 7 Tag.

§. 205. Außerdem, daß ein Kapital auf Zinseszinsen angelegt ist, ereignet sich mehrmals der Fall, daß zu der angelegten Kapitalssumme nach einer bestimmten Zeitperiode noch ein bestimmter Betrag nachgezahlt wird, der für die folgende Zeit wieder auf Zinseszinsen angelegt ist. Die für solche Fälle erforderlichen Berechnungsweisen ergeben sich aus der Auflösung nachstehender Aufgabe:

(15) Zu welcher Summe (Σ) wächst ein Kapital (K) an, welches zu (P) Prozente auf Zinseszinsen durch (N) Jahre oder Zeitperioden angelegt ist, wenn zugleich bei jeder Kapitalisazion noch ein bestimmter Betrag (B) der aus der frühern Bewirthschaftung entstandenen Summe unter denselben Bedingungen beigefügt wird?

Bei der ersten Kapitalisazion muß sich vorfinden das Einlagskapital (K) sammt den davon entfallenden Interessen $\frac{KP}{100}$, und der noch nachgezahlte Betrag B, oder es ist

$$\Sigma_1 = K + \frac{KP}{100} + B = K(1+p) + B. \text{ (Siehe §. 199.)}$$

Bei der zweiten Kapitalisazion muß sich vorfinden erstlich Σ_1, dann die davon entfallenden Zinsen, und noch B; es ist daher:

$$\Sigma_2 = K(1+p) + \frac{K(1+p)P}{100} + B + \frac{BP}{100} + B$$
$$= K(1+p)\left(1+\frac{P}{100}\right) + B\left(1+\frac{P}{100}\right) + B.$$
$$= K(1+p)^2 + B(1+p) + B.$$

Bei der dritten Kapitalisazion wird die angewachsene Summe seyn müssen:

$$\Sigma_3 = \Sigma_2 + \frac{\Sigma_2 P}{100} + B$$
$$= K(1+p)^2 + \frac{K(1+p)^2 P}{100} + B(1+p) + \frac{B(1+p)P}{100} + B + \frac{BP}{100} + B$$
$$= K(1+p)^3 + B(1+p)^2 + B(1+p) + B.$$

Das Gesetz der Aufeinanderfolge für die einzelnen Bestandtheile von Σ nach jeder späteren Periode aus den Bestandtheilen der nächst vorhergehenden kann nicht mehr zweifelhaft seyn, und man wird bemerken, daß:

$\Sigma_4 = K(1+p)^4 + B(1+p)^3 + B(1+p)^2 + B(1+p) + B$, und allgemein, daß

$\Sigma_N = K(1+p)^N + B(1+p)^{N-1} + B(1+p)^{N-2} + \ldots\ldots$
$+ B(1+p)^3 + B(1+p)^2 + B(1+p) + B$ seyn muß; oder auch, daß

$\Sigma_N = K(1+p)^N + B[(1+p)^{N-1} + (1+p)^{N-2} + (1+p)^{N-3} + \ldots$
$+ (1+p)^3 + (1+p)^2 + (1+p) + 1]$, oder daß

$\Sigma_N = K(1+p)^N + B[1 + (1+p) + (1+p)^2 + (1+p)^3 + \ldots\ldots$
$+ (1+p)^{N-3} + (1+p)^{N-2} + (1+p)^{N-1}]$ ist.

Der zwischen den Klammern stehende Faktor ist hier offenbar eine geometrische Progression von N Gliedern, deren erstes Glied 1, und deren Exponent $(1+p)$ ist. Es ist daher dieser Faktor nach den Gesetzen über das Bestimmen des Summengliedes einer geometrischen Progression gleich $\frac{(1+p)(1+p)^N - 1}{(1+p) - 1} = \frac{(1+p)^N - 1}{p}$. Hieraus folgt:

$$\Sigma_N = K(1+p)^N + B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$$

Diese Hauptformel ist, wie sich in der Folge nachweisen wird, ungemein reichhaltig, um daraus Verfahrungsweisen für verschiedene andere Zwecke abzuleiten.

(16) Jemand hat ein Kapital von 1000 fl. zu 5 % auf Zinseszinsen angelegt, und gibt noch jährlich 100 fl. in Raten nach, die der Kapitalisazionsart entsprechen. Zu welchem Betrag wächst dieses nach 24 Jahren an, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Wegen (a) ist $K = 1000$, $B = 100$, $P = 5$, $N = 24$, $(1+p) = 1{\cdot}05$, $\log(1+p) = 0{\cdot}0211893$, $N \log(1+p) = 0{\cdot}5085432$, woraus $(1+p)^N = 3{\cdot}2251$, und $\frac{(1+p)^N - 1}{p} = 44{\cdot}502$ gefunden wird. Es ist sonach $\Sigma = 3225{\cdot}1 + 4450{\cdot}2 = 7675{\cdot}3$ oder 7675 fl. 18 Kr.

Wegen (b) ist $K = 1000$, $B = 50$, $P = 2{\cdot}5$, $N = 48$, $(1+p) = 1{\cdot}025$, $\log(1+p) = 0{\cdot}0107239$, $N \log(1+p) = 0{\cdot}5147472$, woraus $(1+p)^N = 3{\cdot}2715$, und $\frac{(1+p)^N - 1}{p} = 90{\cdot}86$ gefunden wird. Es ist sonach $\Sigma = 3271{\cdot}5 + 4543 = 7814{\cdot}5$ oder 7814 fl. 30 Kr.

Wegen (c) ist $K = 1000$, $B = 25$, $P = 1{\cdot}25$, $N = 96$, $(1+p) = 1{\cdot}0125$, $\log(1+p) = 0{\cdot}0053950$, $N \log(1+p) = 0{\cdot}5179200$, woraus $(1+p)^N = 3{\cdot}2954$, und $\frac{(1+p)^N - 1}{p} = 183{\cdot}632$ gefunden wird. Folglich ist $\Sigma = 3295{\cdot}4 + 4590{\cdot}8 = 7886{\cdot}2$ oder 7886 fl. 12 Kr.

Es wächst also der gegebene Betrag sammt der Nachzahlung bei ganzjähriger Kapitalisazion zur Summe von 7675 fl. 18 Kr., bei halbjähriger zu 7814 fl. 30 Kr., bei vierteljähriger zu 7886 fl. 12 Kr. an.

Würden blos die einfachen Zinsen berechnet, so würde die Summe blos 5980 fl. betragen.

(17) Jemand hat ein Kapital von 600 fl. zu 5 % Zinseszinsen angelegt, und zahlt jährlich noch 30 fl. nach. Bis zu welchen Gesammtbetrag wächst dieß bis zum Schlusse des 20sten Jahres an, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Antwort: Bei ganzjähriger Kapitalisazion zu **2583** fl. **57** Kr.,
„ halbjähriger „ „ **2622** fl. **5** Kr.,
„ vierteljähriger „ „ **2641** fl. **46** Kr.

§. **206**. Die im vorigen §. aufgestellte Hauptformel

$$\Sigma = K(1+p)^N + B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$$

gibt wieder ein Mittel an die Hand, jede von den Größen **K**, **B** oder **N** durch Rechnung zu bestimmen, wenn außer **Σ** und **P** noch die zwei andern von diesen Größen bekannt sind. Man findet nämlich:

$$K = \frac{\Sigma p - B[(1+p)^N - 1]}{p(1+p)^N}$$

$$B = \frac{\Sigma p - Kp(1+p)^N}{(1+p)^N - 1}$$

$$\Sigma p = Kp(1+p)^N + B(1+p)^N - B$$

$$(1+p)^N (Kp+B) = \Sigma p + B$$

$$(1+p)^N = \frac{\Sigma p + B}{Kp + B}$$

$$N \log(1+p) = \log(\Sigma p + B) - \log(Kp + B)$$

folglich

$$N = \frac{\log(\Sigma p + B) - \log(Kp + B)}{\log(1+p)}$$

(18) Jemand zahlt durch **20** Jahre jährlich **120** fl., welche ihm mit **4** Prozent Zinseszinsen verinteressirt werden. Ein wie großes Kapital muß er anfänglich einlegen, um nach dieser Zeit **6000** fl. zurückzuerhalten, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Zur Auflösung dieser Aufgabe dient die Formel $K = \frac{\Sigma p - B[(1+p)^N - 1]}{p(1+p)^N}$.

Wegen (a) ist $\Sigma = 6000$, $B = 120$, $N = 20$, $P = 4$, $(1+p) = 1{\cdot}04$, $p = 0{\cdot}04$.

$$\log(1+p) = 0{\cdot}0170333$$
$$N \log(1+p) = 0{\cdot}3406660$$
$$(1+p)^N = 2{\cdot}19112$$
$$p(1+p)^N = 0{\cdot}0876448.$$

$$\Sigma p = 240$$
$$B[(1+p)^N - 1] = 142{\cdot}9344$$
$$\Sigma p - B[(1+p)^N - 1] = 97{\cdot}0656$$
$$K = \frac{97{\cdot}0656}{0{\cdot}0876448} = 1107 \text{ fl. } 29 \text{ Kr.}$$

Wegen (b) ist $\Sigma = 6000$, $B = 60$, $P = 2$, $N = 40$, $(1+p) = 1{\cdot}02$, $p = 0{\cdot}02$.

$$\log(1+p) = 0{\cdot}0086002$$
$$N \log(1+p) = 0{\cdot}3440080$$
$$(1+p)^N = 2{\cdot}208045$$
$$p(1+p)^N = 0{\cdot}0441609$$

$$\Sigma p = 120$$
$$B[(1+p)^N - 1] = 72{\cdot}4827$$
$$\Sigma p - B[(1+p)^N - 1] = 47{\cdot}5173$$
$$K = \frac{47{\cdot}5173}{0{\cdot}0441609} = 1076 \text{ fl.}$$

Wegen (c) ist $\Sigma = 6000$, $B = 30$, $P = 1$, $N = 80$, $(1+p) = 1{\cdot}01$; $p = 0{\cdot}01$.

$$\log(1+p) = 0{\cdot}0043214$$
$$N \log(1+p) = 0{\cdot}3457120$$
$$(1+p)^N = 2{\cdot}2167260$$
$$p(1+p)^N = 0{\cdot}02216726.$$

$$\Sigma p = 60$$
$$B[(1+p)^N - 1] = 36{\cdot}50178$$
$$\Sigma p - B[(1+p)^N - 1] = 23{\cdot}49822$$
$$K = \frac{23{\cdot}49822}{0{\cdot}02216726} = 1060 \text{ fl.}$$

Würden blos die einfachen Zinsen berechnet, so würde man für das anfänglich anzulegende Kapital den Betrag von **1493** fl. **20** Kr. erhalten.

(**19**). Jemand zahlt durch **15** Jahre jährlich **40** fl. Ein wie großes Kapital muß er anfänglich zu **5** % Zinseszinsen anlegen, um nach Verlauf dieser Zeit **3600** fl. zurückzuerhalten, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Antwort: Bei ganzjähriger Kapitalisazion **1316** fl. **29** Kr.
" halbjähriger " **1297** fl. **40** Kr.
" vierteljähriger " **1288** fl. **7** Kr.

(**20**) Jemand legt **1200** fl. zu **5** % Zinseszinsen an, und will nach **10** Jahren **3000** fl. zurück erhalten. Wie viel muß er zur Erreichung dieses Zweckes noch jährlich zuzahlen, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Zur Auflösung dieser Aufgabe dient die Formel $B = \dfrac{\Sigma p - Kp\,(1+p)^N}{(1+p)^N - 1}$.

Wegen (a) ist $\Sigma = 3000$, $K = 1200$, $P = 5$, $(1+p) = 1{\cdot}05$, $p = 0{\cdot}05$, $N = 10$.

$\log\,(1+p) = 0{\cdot}0211893$	$\Sigma p = 150$, $Kp = 60$
$N\log\,(1+p) = 0{\cdot}2118930$	$Kp\,(1+p)^N = 60 \times 1{\cdot}628895 = 97{\cdot}73370$
$(1+p)^N = 1{\cdot}628895$	$\Sigma p - Kp\,(1+p)^N = 52{\cdot}2663$, also ist
	$B = \dfrac{52{\cdot}2663}{0{\cdot}628895} = 83{\cdot}108 = 83$ fl. 7 Kr.

Wegen (b) ist: $\Sigma = 3000$, $K = 1200$, $N = 20$, $P = 2{\cdot}5$, $(1+p) = 1{\cdot}025$, $p = 0{\cdot}025$.

$\log\,(1+p) = 0{\cdot}0107239$	$\Sigma p = 75$, $Kp = 30$
$N\log\,(1+p) = 0{\cdot}2144780$	$Kp\,(1+p)^N = 49{\cdot}1586$
$(1+p)^N = 1{\cdot}63862$	$\Sigma p - Kp\,(1+p)^N = 25{\cdot}8414$
	also $B = 40{\cdot}464 = 40$ fl. 28 Kr.

Wegen (c) ist $\Sigma = 3000$, $K = 1200$, $N = 40$, $P = 1{\cdot}25$, $(1+p) = 1{\cdot}0125$, $p = 0{\cdot}0125$.

$\log\,(1+p) = 0{\cdot}0053950$	$\Sigma p = 37{\cdot}5$, $Kp = 15$
$N\log\,(1+p) = 0{\cdot}2158000$	$Kp\,(1+p)^N = 24{\cdot}65415$
$(1+p)^N = 1{\cdot}64361$	$\Sigma p - Kp\,(1+p)^N = 12{\cdot}84585$

also $B = \dfrac{12{\cdot}84585}{0{\cdot}64361} = 19{\cdot}955 = 19$ fl. 57 Kr.

(**21**) Was beträgt die periodische Nachzahlung, wenn jemand **2000** fl. zu **4** % Zinseszinsen anlegt, und nach **20** Jahren **16000** fl. haben will, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, und (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Antwort: Bei ganzjähriger Kapitalisazion **390** fl. **9** Kr.
" halbjähriger " **191** fl. **47** Kr.
" vierteljähriger " **95** fl. **4** Kr.

(**22**) Jemand legt **1200** fl. zu **5** % Zinseszinsen an, und zahlt, um **3000** fl. zurückzuerhalten (a) bei ganzjähriger Kapitalisazion jährlich **83·108** fl., (b) bei halbjähriger, nach jedem Semester **40·464** fl. (c) bei vierteljähriger, nach jedem Vierteljahre **19·955** fl. nach. Nach wie vielen Jahren wird diese Person ihren Zweck erreicht haben?

Zur Auflösung dieser Aufgabe dient die Formel

$$N=\frac{\log(\Sigma p+B)-\log(Kp+B)}{\log(1+p)}$$

Für jeden Fall ist $\Sigma=3000$; $K=1200$; ferner ist wegen (a) $P=5$, $(1+p)=1{\cdot}05$, $p=0{\cdot}05$, $B=83{\cdot}108$; wegen (b) $P=2{\cdot}5$, $(1+p)=1{\cdot}025$, $p=0{\cdot}025$, $B=40{\cdot}464$; wegen (c) $P=1{\cdot}25$, $(1+p)=1{\cdot}0125$, $p=0{\cdot}0125$, $B=19{\cdot}955$

(a) $\log(1+p)=0{\cdot}0211893$	(b) $\log(1+p)=0{\cdot}0107239$
$\Sigma p+B=150+83{\cdot}108=233{\cdot}108$	$\Sigma p+B=75+40{\cdot}464=115{\cdot}464$
$Kp+B=60+83{\cdot}108=143{\cdot}108$	$Kp+B=30+40{\cdot}464=70{\cdot}464$
$\log(\Sigma p+B)=2{\cdot}3675572$	$\log(\Sigma p+B)=2{\cdot}0624467$
$\log(Kp+B)=2{\cdot}1556639$	$\log(Kp+B)=1{\cdot}8479698$
Differenz $=0{\cdot}2118933$	Differenz $=0{\cdot}2144769$
$0{\cdot}2118933:0{\cdot}0211893=10$ J.;	$0{\cdot}2144769:0{\cdot}0107239=20$ Semest.;

(c)......$\log(1+p)=0{\cdot}0053950$

$\Sigma p+B=37{\cdot}5+19{\cdot}955=57{\cdot}455$

$Kp+B=15+19{\cdot}955=34{\cdot}955$

$\log(\Sigma p+B)=1{\cdot}7593278$

$\log(Kp+B)=1{\cdot}5435093$

Differenz $=0{\cdot}2158185$

$0{\cdot}2158185:0{\cdot}0053950=40$ Vierteljahre.

Folglich ist unter jeder von den drei Bedingungen die Zeit gleich 10 Jahren.

(23) Jemand legt **1200** fl. zu **5 %** Zinseszinsen an, und zahlt jährlich **100** fl. nach. Durch wie viele Jahre müssen diese Nachzahlungen fortgeleistet werden, um die eingelegte Summe bis auf den Betrag von **8400** fl. zu bringen, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Wegen (a) ist $\Sigma=4800$, $K=1200$, $B=100$, $P=5$, $(1+p)=1{\cdot}05$, $p=0{\cdot}05$.

$\Sigma p=420$	$Kp=60$	$\log \Sigma p+B=2{\cdot}7160033$
$\Sigma p+B=520$	$Kp+B=160$	$\log Kp+B=2{\cdot}2041200$
		Differenz $0{\cdot}5118833$

$\log(1+p)=0{\cdot}0211893$

$$N=\frac{0{\cdot}5118833}{0{\cdot}0211893}=24{\cdot}15763 \text{ Jahre.}$$

Anmerkung. Der bei den aufgefundenen Jahren erhaltene Dezimalbruch gibt 1 Monat und 26 bis 27 Tage. Diese Monate und Tage sind aber nicht genau richtig. Wird das Resultat auch in dieser Beziehung als richtig verlangt, so suche man vorläufig, welche Summe den gegebenen Bedingungen entsprechend, während der aufgefundenen 24 Jahre erhalten wird, (8320·32), und berechne ferner auf dem Wege der gemeinen Interessenrechnung, wie lange diese Summe noch anliegen muß, um den noch mangelnden Betrag (79·68) als Interessen zu geben. Für den vorliegenden Fall findet man 2 Monate und 8 bis 9 Tage. Es versteht sich von selbst, daß hierdurch die vollständige Summe blos durch die Interessen allein erhalten wird, ohne irgend eine sonstige anderwärtige Nachzahlung.

Wegen (b) ist $\Sigma = 8400$, $K = 1200$, $B = 50$, $P = 2\cdot5$, $(1+p) = 1\cdot025$ $p = 0\cdot025$.

$\Sigma p = 210$	$Kp = 30$	$\log(\Sigma p + B) = 2\cdot4149733$
$\Sigma p + B = 260.$	$Kp + B = 80.$	$\log(Kp + B) = 1\cdot9030900$
		Differenz $= 0\cdot5118833$

$$\log.(1+p) = 0\cdot0107239$$

$$N = \frac{0\cdot5118833}{0\cdot0107239} = 47\cdot73295 \text{ halbe Jahre.}$$

Dieser Dezimalbruch würde geben 4 Monate, 11 bis 12 Tage. Somit würde man der Begingung gemäß die gewünschte Summe in 23 Jahren, 10 Monaten und 11 bis 12 Tagen erhalten. — Genauer gerechnet in 23 Jahren, 11 Monaten, 13 bis 14 Tagen.

Wegen (c) ist $\Sigma = 8400$, $K = 1200$, $B = 25$, $P = 1\cdot25$, $(1+p) = 1\cdot0125$, $p = 0\cdot0125$.

$\Sigma p = 105$	$Kp = 15$	$\log(\Sigma p + B) = 2\cdot1139434$
$\Sigma p + B = 130$	$Kp + B = 40$	$\log(Kp + B) = 1\cdot6020600$
		Differenz $= 0\cdot5118834$

$$\log(1+p) = 0\cdot0053950.$$

$$N = \frac{0\cdot5118834}{0\cdot0053950} = 94\cdot881 \text{ Vierteljahre, 2 Monate, 19 bis}$$

20 Tage; genauer gerechnet, 23 Jahre, 9 Monate, 8 bis 9 Tage. Da aber nach dem 9. Monate schon wieder eine neue Quartalzahlung erfolgen soll, so berechne man den Interessenbetrag von der angewachsenen Summe nach 94 Vierteljahren, oder von 8286·7936 fl. auf 3 Monate, welcher 103·5849 fl. ausmacht, welcher zum vorigen Betrage addirt, 8390·3785 fl. gibt; es sind sonach nach dem 95 Vierteljahre statt 25 fl. nur 9·6215, oder 9 fl. 37 Kr. zu bezahlen.

(24) Jemand legt 600 fl. zu 5 % Zinseszinsen an, und zahlt jährlich 30 fl. nach. Wie lange muß er diese Nachzahlungen fortleisten, um den Betrag von 2584 fl. zu erreichen, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Antwort: Bei ganzjähriger Kapitalisazion 20 Jahre,
„ halbjähriger „ 39·5184 halbe Jahre
„ vierteljähriger „ 78·5527 Vierteljahre.

§. 207. Oftmals ist es erforderlich, nicht blos das Resultat eines angewachsenen Kapitals zu bestimmen, sondern auch anzugeben, wie dieses successive, d. h. von einer bestimmten Zeitperiode zur andern anwächst. Diese Aufgabe ließe sich zwar auch nach der vorigen Verfahrungsweise lösen, jedoch gibt es hierfür einen viel einfacheren Weg.

Werden die Interessen von Jahr zu Jahr zum Kapitale geschlagen, so findet man das Resultat für jedes spätere Jahr, wenn man das frühere Resultat mit den Prozenten multiplizirt, und das Produkt um zwei Stellen rechts unter den Multiplikand setzt; denn es sind die Interessen für Ein Jahr $= \frac{KP}{100}$. Die Summe aus dem Multiplikande und dem so gestellten Produkte, ist das neue Resultat, womit man zur weiteren Bestimmung des Anwachsens

auf dieselbe Weise verfährt. Bei einer fünfperzentigen Verzinsung wird dieser Zweck auch dadurch erreicht, wenn man die jeweilige Kapitalssumme durch zwei dividirt, und den Quozienten um Eine Stelle rechts unter das Dividend setzt, weil für diesen Fall die Einjährigen Interessen gleich $\frac{K}{20}$ sind.

Bei einer 2½ % Verzinsung dividire man das frühere Resultat mit 4, und setze den Quozienten um Eine Stelle rechts, weil die Interessen zu 2½ % gleich $\frac{K}{40}$ sind.

Es versteht sich von selbst, daß es nicht nöthig ist, die Resultate vollständig zu bestimmen, sondern, daß es immer hinreicht, dieselben bis auf einige Dezimalstellen zu entwickeln, wobei jedoch die letzte Dezimalstelle noch mit der erforderlichen Korrektur versehen werden muß.

(25) Zu welchem Betrage wächst Ein Gulden a) bei vierperzentigen und b) bei zweiperzentigen Verzinsung nach N Jahren an?

(a).........1·00	(b)...........1·00	nach 5 J.........1·104081
0·04	2	22082
nach 1 J......1·04	nach 1 J......1·02	nach 6 J.........1·126163
416	204	22523
nach 2 J......1·0816	nach 2 J......1·0404	nach 7 J.........1·148686
43264	20808	22974
nach 3 J......1·124864	nach 3 J......1·061208	nach 8 J.........1·171660
44995	21224	23433
nach 4 J........1·169859	nach 4 J......1·082432	nach 9 J.........1·195093
46794	21649	23902
nach 5 J......1·216653	nach 5 J......1·104081	nach 10 J.........1·218995
u. s. w.		u. s. w.

(26) Zu welchen Betrag wächst Ein Gulden a) bei fünfperzentigen, b) bei 2½ perzentigen Verzinsung nach N Jahren an?

(a)..............1·00	(b)...........1·000	nach 5 J........1·131408
5	25	28285
nach 1 J........1·05	nach 1 J......1·025	nach 6 J........1·159693
525	25625	28992
nach 2 J........1·1025	nach 2 J.......1·050625	nach 7 J........1·188685
55125	26266	29717
nach 3 J........1·157625	nach 3 J.......1·076891	nach 8 J........1·218402
57881	26922	30460
nach 4 J........1·215506	nach 4 J.......1·103813	nach 9 J........1·248862
60775	27595	31222
nach 5 J........1·276281	nach 5 J.......1·131408	nach 10 J........1·280084
u. s. w.		u. s. w.

(27) Wie macht sich dieß a) bei einer sechsprozentigen, b) bei einer dreiprozentigen Verzinsung.

(a).............. 1·00	(b).............. 1·00	nach 5 J.......... 1·159274
6	3	34778
nach 1 J........ 1·06	nach 1 J........ 1·03	nach 6 J.......... 1·194052
636	309	35822
nach 2 J........ 1·1236	nach 2 J........ 1·0609	nach 7 J.......... 1·229874
67416	31827	36896
nach 3 J........ 1·191016	nach 3 J........ 1·092727	nach 8 J........ 1·266770
71461	32782	38003
nach 4 J........ 1·262477	nach 4 J........ 1·125509	nach 9 J.......... 1·304773
75748	33765	39143
nach 5 J........ 1·338225	nach 5 J........ 1·159274	nach 10 J.......... 1·343916
u. s. w.		u. s. w.

Anmerkung. Die angehängten Tabellen Nr. I, bis XVIII geben in der ersten Spalte die Resultate der weiter fortgesetzten Berechnungen bis zur hunderten Periode unter der Aufschrift: Werth Eines Guldens nach N Perioden, oder $(1+p)^N$ an.

§. 208. Die im §. 199 aufgestellte Formel
$\log K = \log S - N \log (1+p)$ lehrt die Aufgabe auflösen, für jede angewachsene Summe S, das Stammkapital K zu bestimmen, aus welchem diese Summe bei P Prozenten und irgend einer beliebigen Kapitalisazionsart nach N Zeitperioden anwächst.

(28). Es sollen das Stammkapital aufgesucht werden, welches bei 5 % Zinseszinsen (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger Kapitalisazion nach 25 Jahren zu Einen Gulden anwächst.

Wegen (a). $S = 1,\ N = 25,\ (1+p) = 1{\cdot}05$

$$\log S = 0,\ \log (1+p) = 0{\cdot}0211893$$
$$\log K = 0 - 25 \times 0{\cdot}0211893$$
$$\log K = -0{\cdot}5297325 = 0{\cdot}4702675 - 1$$
$$+1 \qquad\qquad -1$$
$$K = 0{\cdot}295303.$$

Wegen (b) $S = 1,\ N = 50,\ (1+p) = 1{\cdot}025$

$$\log S = 0,\ \log (1+p) = 0{\cdot}0107239$$
$$\log K = 0 - 50 \times 0{\cdot}0107239$$
$$\log K = 0 - 0{\cdot}5361950 = 0{\cdot}463805 - 1$$
$$+1 \qquad\qquad -1$$
$$K = 0{\cdot}290942.$$

Sehr oft aber ist es erforderlich zu wissen, was eine durch Zinseszinsen angewachsene Summe vor jeder Zeitperiode für einen Werth hatte.

Die Betrachtung, daß bei P Prozent Interessen der Betrag von 100 + P vor Einem Jahre nur 100 war, lehret uns mittelst der Regel de Tri auffinden, was jeder andere Betrag K vor Einem Jahre werth war. Es ist nämlich $(100+P) : 100 = K : ?$, woraus sich ergibt, daß der Werth von K vor Einem Jahre gleich $\frac{100\ K}{100+P}$ gewesen seyn mußte.

Offenbar ist es nicht nöthig, daß **P** die Prozente pro anno bezeichnet, sondern es kann auch die für jede andere Zeitperiode gehörigen Interessen von **100** fl. ausdrücken, je nachdem nämlich eine verschiedene Kapitalisazionsart gewählt wird.

Soll nun der Werth eines Kapitals **K** vor Einem Jahre bei **4** % mit ganzjähriger Kapitalisazion gefunden werden, so dividire man **100 K** durch **104**, bei halbjähriger Kapitalisazion durch **102**, und man erhält das Verlangte für Eine Zeitperiode. Will man das Stammkapital vor zwei Zeitperioden wissen, so darf man nur das frühere Resultat mit **100** multipliziren, und beziehungsweise durch dieselben Divisoren dividiren, aus welchen Resultaten sich wieder die Stammkapitale vor drei Zeitperioden u. s. w. auf dieselbe Weise ableiten lassen.

Bei einer **5** perzentigen Verzinsung sind die Divisoren für Eine Zeitperiode, je nachdem die Kapitalisazion ganzjährig oder halbjährig zu rechnen ist, die Zahlen **105** oder **102·5**, bei einer sechsperzentigen Verzinsung **106** oder **103**, u. s. w.

(**29**) Welchen Werth hat Ein Gulden vor **N** Perioden, (**a**) bei **4** perzentiger, (**b**) bei **2** perzentiger Verzinsung.

(a)	1)	100	: 104	=	0·961538461539
	2)	96·1538461539	: 104	=	0·924556213018
	3)	92·4556213018	: 104	=	0·888996358671
	4)	88·8996358671	: 104	=	0·854804191030
	5)	85·4804191030	: 104	=	0·821927106760
			u. s. w.		
(b)	1)	100	: 102	=	0·980392156863
	2)	98·0392156863	: 102	=	0·961168781238
	3)	96·1168781238	: 102	=	0·942322334547
	4)	94·2322334547	: 102	=	0·923845426027
	5)	92·3845426027	: 102	=	0·905730809830
			u. s. w.		

(**30**) Welchen Werth hat Ein Gulden vor **N** Perioden (**a**) bei **5** perzentiger, **b**) bei **2½** perzentiger Verzinsung.

(a)	1)	100	: 105	=	0·952380952381
	2)	95·2380952381	: 105	=	0·907029478458
	3)	90·7029478458	: 105	=	0·863837598532
	4)	86·3837598532	: 105	=	0·822702474794
	5)	82·2702474794	: 105	=	0·783526166471
			u. s. w.		
(b)	1)	100	: 102·5	=	0·975609756098
	2)	97·5609756098	: 102·5	=	0·951814396193
	3)	95·1814396193	: 102·5	=	0·928599410920
	4)	92·8599410920	: 102·5	=	0·905950644800
	5)	90·5950644800	: 102·5	=	0·883854287610
			u. s. w.		

(**31.**) Welchen Werth hat Ein Gulden vor **N** Perioden (**a**) bei **6** perzentiger, (**b**) bei **3** perzentiger Verzinsung.

(a) 1) 100 106 = 0·943396226415
2) 94·3396226415 : 106 = 0·889996440015
3) 88·9996440015 : 106 = 0·839619283033
4) 83·9619283033 : 106 = 0·792093663239
5) 79·2093663239 : 106 = 0·747258172867
u. s. w.

(b) 1) 100 : 103 = 0·970873786408
2) 97·0873786408 : 103 = 0·942595909134
3) 94·2595909134 : 103 = 0·915141659354
4) 91·5141659354 : 103 = 0·888487047917
5) 88·8487047917 : 103 = 0·862608784386
u. s. w.

§. 209. Nach §. 199 ist die Formel für das Anwachsen eines Kapitals K nach einer Zeitperiode $S = K\,(1+p) = K\,(1+\frac{P}{100}) = \frac{K(100+P)}{100}$, folglich für das Kapital von Einem Gulden gleich $\frac{100+P}{100}$.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für den Werth eines Guldens vor einer eben solchen Zeitperiode, als für welchen Fall in beiden Ausdrücken P dasselbe bedeutet, d. i. mit dem Ausdrucke $\frac{100}{100+P}$, so sieht man, daß die beziehungsweisen Bruchformen die beiden Bruchglieder verwechselt haben, oder was dasselbe ist, daß man, bei einer bestimmten Kapitalisazionsart, den Werth Eines Guldens vor einer Zeitperiode auch dadurch auffindet, wenn man Eins durch den Werth Eines Guldens nach dieser Zeitperiode dividirt, und umgekehrt. — Je nachdem nun eine oder die andere Reihe berechnet aufgeführt ist, findet man die andere noch fehlende, wenn man die Einheit durch die früheren beziehungsweisen Resultate dividirt.

(32) Was ist Ein Gulden (a) bei 5 perzentiger, (b) bei 2½ perzentigen Verzinsung, (a) vor 25, (b) vor 50 Jahren werth, wenn Ein Gulden nach 25 Jahren bei (a) 3·386355, bei (b) 3·437109 Gulden werth ist?

(a) 1·000000 : 3·386355 = 0·295303
3227290
179570
10252
93

(b) 1·0000000 : 3·437109 = 0·290942
3125782
32384
1450
75
6

Aus der Betrachtung, daß $\frac{100+P}{100} \times \frac{100}{100+P} = 1$ ist, folgt, daß die aufgefundenen beziehungsweisen Resultate für die Werthe Eines Guldens vor, und nach derselben Zeitperiode mit einander multiplizirt, zum Produkte Eins geben müssen, was zur Prüfung der aufgefundenen Resultate taugt. Geringe Abweichungen dieser Produkte von der Einheit dürfen nicht berücksichtiget werden, was sich daraus ergibt, weil die Resultate durchgehens nur näherungsweise bestimmt sind. z. B.

Man hat gefunden, daß Ein Gulden bei 5 % Verzinsung und ganzjähriger Kapitalisazion vor 5 Jahren 0·783527, nach 5 Jahren 1·276282 fl. werth ist. Bestimmt man hieraus das Produkt, so erhält man

0·783527
2 826721
783527
156706
54847
4701
157
62
1
1·000001, offenbar Eins.

Man hat gefunden, daß Ein Gulden bei 3 % Verzinsung und halbjähriger Kapitalisazion vor 50 Jahren 0·228107, nach 50 Jahr. 4·383906 fl. werth ist. Sucht man hieraus das Produkt, so erhält man

4·383906
7 018220
876781
87678
35071
439
30
0·999999, wofür Eins zu nehmen ist.

Anmerkung. Die angehängten Tabellen Nr. I bis XVIII geben in der 2. Spalte die Resultate der fortgesetzten Berechnungen bis zur 100. Periode unter der Aufschrift: Werth Eines Guldens vor N Perioden, oder $\frac{1}{(1+p)^N}$ an.

Summirt man die in der ersten Spalte für $(1+p)^N$ vorkommenden Werthe, so erhält man, wenn die Summe mit S bezeichnet wird:

$$S=(1+p)+(1+p)^2+(1+p)^3+(1+p)^4+\ldots\ldots+(1+p)^{N-1}+(1+p)^N$$

Dieser Ausdruck ist das Summenglied einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied $(1+p)$, deren Exponent ebenfalls $(1+p)$, deren letztes Glied $(1+p)^N$ ist, und welche N Glieder hat. Weil aber das Summenglied S einer geometrischen Reihe $\frac{qz-a}{q-1}$ ist, so folgt:

$$S=\frac{(1+p)\,(1+p)^N-(1+p)}{1+p-1}=\frac{(1+p)\,[1+p)^N-1]}{p}$$

Anmerkung. Die Tabellen I bis XVIII enthalten in ihrer dritten Spalte, die dieser Formel entsprechenden Werthe, bis zum Ablauf der hunderten Periode.

Summirt man die in der zweiten Spalte für $\frac{1}{(1+p)^N}$ vorkommenden Werthe, so erhält man, wenn man diese Summe mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet,

$$\mathfrak{S}=\frac{1}{(1+p)}+\frac{1}{(1+p)^2}+\frac{1}{(1+p)^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{(1+p)^{N-1}}+\frac{1}{(1+p)^N}.$$

$$\mathfrak{S}=\left(\frac{1}{1+p)}\right)\left(1+\frac{1}{1+p}+\frac{1}{(1+p)^2}+\frac{1}{(1+p)^3}+\ldots\ldots+\frac{1}{(1+p)^{N-2}}+\frac{1}{(1+p)^{N-1}}\right)$$

Da der zwischen den Klammern stehende Faktor das summatorische Glied einer geometrischen Reihe ist, deren erstes Glied 1, deren Exponent $\frac{1}{1+p}$

und welche N Glieder hat, in einer geometrischen Reihe aber das summatorische Glied gleich $\frac{q^z-1}{q-1}$ ist, so ist dieses summatorische Glied in dem vorliegenden Falle gleich

$$\frac{\left(\frac{1}{1+p}\right)\left(\frac{1}{(1+p)^{N-1}}\right)-1}{\left(\frac{1}{1+p}\right)-1} = \frac{\left(\frac{1}{(1+p)^{N-1}}-(1+p)\right)}{1-1-p} = \frac{(1+p)-\frac{1}{(1+p)^{N-1}}}{p} = \frac{(1+p)^N-1}{p(1+p)^{N-1}}$$

Demnach ist $\mathfrak{S} = \left(\frac{1}{1+p}\right)\left(\frac{(1+p)^N-1}{p(1+p)^{N-1}}\right) = \frac{(1+p)^N-1}{p(1+p)^N}$.

Diese Formel wird in der Folge sehr oft bei Berechnung der Renten und Pensionen eine sehr vortheilhafte Anwendung haben.

Anmerkung. Die Tabellen I bis XVIII enthalten in ihrer vierten Spalte die Werthe von $\mathfrak{S} = \frac{(1+p)^N-1}{p(1+p)^N}$, und hat noch die Aufschrift: **Werth einer Rente für N Perioden.**

Die Einrichtung der Tabellen **I** bis **XVIII** ist in der Art getroffen, daß, wenn in denselben gleich die Resultate nur für ganze Jahre enthalten zu seyn scheinen, sie doch auch für halbjährige, vierteljährige und selbst auch noch für in kürzerer Zeit erfolgende Kapitalisazionen benützt werden können.

(**33**) Zu welchen Betrag wachsen **12000** fl. bei **5** % Verzinsung (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (d) bei vierteljähriger Kapitalisazion nach **25** Jahren an?

Wegen (a) ist $N = 25$, und findet sich in der Tabelle **XVI**. Für diesen Fall ist $(1+p)^N = 3{\cdot}386355$; es ist somit das Resultat $= 3{\cdot}386355 \times 12000$ = fl. **40636·26**.

Wegen (b) ist $N = 50$, und findet sich in der Tabelle **X**. Für diesen Fall ist $(1+p)^N = 3{\cdot}437109$; es ist somit das Resultat $= 3{\cdot}437109 \times 12000$ = fl. **41245·308**.

Wegen (c) ist $N = 100$ und findet sich in der Tabelle **V**. Für diesen Fall ist $(1+p)^N = 3{\cdot}463404$; es ist daher das Resultat gleich $3{\cdot}463404 \times 12000$ = fl. **41560·848**.

(**34**) Was ist ein Kapital von **12000** fl. vor **24** Jahren werth bei **4** Prozent Zinseszinsen, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Wegen (a) ist $N = 24$, nnd findet sich in der Tabelle **XIV**. Für diesen Fall ist $\frac{1}{(1+p)^N} = 0{\cdot}390122$; es ist daher das Resultat gleich $0{\cdot}390122 \times 12000$ = fl. **4681·464**.

Wegen (b) ist $N=48$, und findet sich in der Tabelle **VIII**. Für diesen Fall ist $\frac{1}{(1+p)^N} = 0\cdot386538$: es ist daher das Resultat gleich $0\cdot386538 \times 12000 =$ fl. **4638·456**.

Wegen (c) ist $N=96$, und findet sich in der Tabelle **IV**. Für diesen Fall ist $\frac{1}{(1+p)^N} = 0\cdot384723$; es ist daher das Resultat gleich $0\cdot384723 \times 12000 =$ fl. **4616·676**.

(35) Jemand legt durch **25** Jahre jährlich periodenmäßig **100** fl. in eine Sparkasse, welche ihm die Einlage mit **4** % Zinseszinsen bewirthschaftet. Zu welchen Betrag werden diese Einlagen nach **25** Jahren angewachsen seyn, (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion?

Wegen (a) ist $K=100$, $N=25$. N findet sich in der Tabelle **XIV** und der betreffende Faktor $\left(\frac{1+p}{p}\right)\left((1+p)^N-1\right) = 43\cdot311745$; es ist daher das Resultat gleich fl. **4331·1745**.

Wegen (b) ist $K = 50$, $N = 50$; N findet sich in der Tabelle **VIII**, und der betreffende Faktor ist gleich **86·270989**; es ist daher das Resultat gleich fl. **4313·54945**.

Wegen (c) ist $K = 25$, $N = 100$; N findet sich in der Tabelle **IV**; der betreffende Faktor ist gleich **172·186197**; es ist daher das Resultat gleich fl. **4304·654925**.

(36) Jemand will periodenmäßig durch **18** Jahre jährlich eine Rente $R=300$ fl. beziehen. Welchen Betrag hat er zu einer Kasse zu erlegen, welche ihm den jeweiligen Rest mit **3** % verzinset (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Behebung?

Wegen (a) ist $N=18$, $R=300$; N findet sich in der Tabelle **XII**; und es ist wegen der betreffenden Formel $\frac{(1+p)^N-1}{p(1+p)^N}$ der entsprechende Faktor **13·753514**; also ist das Resultat gleich $13\cdot753514 \times 300 =$ fl. **4126·0542**.

Wegen (b) ist $N = 36$, $R = 150$; N findet sich in der Tabelle **VI**, und es ist der entsprechende Faktor **27·660684**; folglich ist das Resultat fl. **4149·1026**.

Wegen (c) ist $N=72$, $R=75$; N findet sich in der Tabelle **III**, und es ist der entsprechende Faktor **55·470023**, folglich das Resultat gleich fl. **4160·2517**.

(37) Jemand legt $K=600$ fl. an, und legt periodisch jährlich noch $B=100$ zum vorigen bewirthschafteten Betrage hinzu. Zu welchem Betrage werden diese Einlagen bei **5** % Zinseszinsen nach **20** Jahren (a) bei ganzjähriger, (b) bei halbjähriger, (c) bei vierteljähriger Kapitalisazion anwachsen?

Wegen (a) ist $K = 600$, $B = 100$; bei K ist $N=20$, bei B ist $N=19$. Die betreffenden Faktoren finden sich in der Tabelle **XVI**, und sind wegen K die Zahl **2·653298**, wegen B die Zahl **32·065953**. Man erhält daher:

wegen K.........2·653298 × 600 = fl. 1591·9788
wegen B.......32·065953 × 100 = 3206·5953
erster Beitrag = 100

Antwort: wegen (a) fl. 4898·5741

Anmerkung. Der erste Beitrag muß noch besonders addirt werden, weil die Formel erst mit B (1+p) beginnt, folglich das diesen Ausdruck erzeugende B noch vorhanden seyn muß.

Wegen (b) ist K = 600, B = 50; bei K ist N = 40, bei B ist N = 39. Die betreffenden Faktoren finden sich in der Tabelle X, und sind wegen K die Zahl 2·685064, und wegen B die Zahl 66·402554. Man erhält daher

wegen K.........2·685064 × 600 = fl. 1611·0384
wegen B........66·402554 × 50 = 3320·1277
erster Beitrag = 50

Antwort wegen (b) fl. 4981·1661.

Wegen (c) ist K 600, B = 25; bei K ist N = 80, bei B ist N = 79. Die betreffenden Faktoren finden sich in der Tabelle V, und sind wegen K die Zahl 2·701485 und wegen B die Zahl 135·118794. Man erhält daher

wegen K..........2·701485 × 600 = fl. 1620·891
wegen B.....135·118794 × 25 = 3377·969
erster Beitrag = 25

Antwort wegen (c) fl. 5023·860

Löset man diese Aufgabe nach der Formel $\Sigma = K\,(1+p)^N + B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$ im §. 205 auf, so ist wegen (a) K = 600, B = 100 N = 20; daher nach Tabelle XVI $(1+p)^N = 2{\cdot}653298$

$$\frac{(1+p)^N - 1}{p} = 1{\cdot}653298 : 0{\cdot}05 = 33{\cdot}06596.$$ Man erhält daher

wegen K........2·653298 × 600 = fl. 1591·9788
wegen B.........33·06596 × 100 = 3306·596

Antwort wegen (a) fl. 4898·5748

Wegen (b) ist A = 600, B = 50, N = 40; nach der Tabelle X ist $(1+p)^N = 2{\cdot}685064$

$$\frac{(1+p)^N - 1}{p} = 1{\cdot}685064 : 0{\cdot}025 = 67{\cdot}40256.$$ Man erhält daher

wegen K........2·685064 × 600 = fl. 1611·038
wegen B........67·40256 × 50 3370128

Antwort wegen (b) fl. 4981·166

Wegen (c) ist A = 600, B = 25, N = 80; nach der Tabelle V ist $(1+p)^N = 2{\cdot}701485$

$$\frac{(1+p)^N - 1}{p} = 1{\cdot}701485 : 0{\cdot}0125 = 136{\cdot}1188.$$ Man erhält daher:

wegen K... $2·701485 \times 600 =$ fl. 1620·891
wegen B...136·1188 $\times 25 =$ „ 3402·97

Antwort wegen c.) fl. 5023·861

Aus dem genauen Übereintreffen der Resultate in allen Fällen läßt sich auf die Richtigkeit beider Ausarbeitungen, und wenn es einer Nachweisung bedürfen würde, auch auf die Richtigkeit der aufgestellten Formeln schließen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Berechnungen, welche wegen Rückzahlung aufgenommener Kapitale Statt finden können.

§. 210. Außer den im siebenten und neunten Abschnitte angegebenen Verfahrungsweisen, welche wohl auch hierher bezogen werden können, sind nach Mannigfaltigkeit der abgeschlossenen Verträge über die Rückzahlung aufgenommener Kapitale noch verschiedenartige Berechnungen möglich, wovon wir insbesondere nur auf die vier vorzüglichsten hinweisen wollen, als im §. **211**, wenn nach bestimmten Zeitperioden eine bestimmt verabredete Summe geleistet wird, im §. **212**, wenn die Rückzahlung nach Prozenten des Nennwerthes vom Kapitale mit verfallenen Zinsen, im §. **213**, wenn sie nach Prozenten vom Nennwerthe des Kapitals mit anticipando Zinsen, und im §. **214**, wenn sie mit Verlosungen erfolgt.

§. 211. Die im §. **205** aufgestellte Formel

$$\Sigma_N = K(1+p)^N + B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$$ löset zunächst die Aufgabe auf: Wie groß wird die Totalsumme Σ nach N Zeitperioden werden, zu welcher ein Kapital K anwächst, wenn nach Ablauf einer jeden Zeitperiode noch ein bestimmter Betrag **B** zugelegt wird, und wenn durchgehens **P** Prozente gerechnet werden?

Eben diese Formel ist aber auch anpassend, die zur Tilgung einer Schuld erforderlichen Berechnungen auszuführen, wenn nach Ablauf einer bestimmten Zeitperiode ein festgesetzter Betrag vom Schuldner geleistet wird. — Um die diesen Fall betreffenden Aufgaben aufzulösen, darf man nur **B** negativ setzen. Offenbar wird **B**, wenn ein wirkliches Tilgen der Schuld erfolgen soll, größer, als der Interessen-Betrag für die erste Zeitperiode seyn müssen.

Soll das ganze aufgenommene Kapital getilgt seyn, so ist offenbar für diesen Fall Σ gleich **0**. Man erhält sonach aus obiger Hauptform

$$0 = K(1+p)^N - B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right),$$ oder besser $$K(1+p)^N = B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right).$$

Löset man diese Gleichung für jede in derselben vorkommenden Größe auf, so erhält man: $K = B\,\frac{[(1+p)^N - 1]}{p\,(1+p)^N} = B\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}$ im Sinne des §. **209**.)

$$B = \frac{Kp\,(1+p)^N}{(1+p)^N - 1} = \frac{K}{\mathfrak{S}}.$$

$$N = \frac{\log B - \log\,[B - Kp]}{\log\,(1+p)}.$$

Sind sonach die Prozente, welche zur Verzinsung der Schuld und jedes Restes derselben zu entrichten kommen, und die für solche Fälle immer angegeben seyn müssen, wirklich gegeben, so geben diese drei Formeln das für jeden möglichen Fall erforderliche Verfahren an.

(1) Jemand hat eine Schuld dadurch getilgt, daß er durch 20 Jahre nach jedem Jahre 1200 fl. bezahlte, und den Rest immerfort mit 5% verinteressirte, wie groß war diese Schuld?

Zur Auflösung dieser Aufgabe dient die Formel $K = \frac{B\,[(1+p)^N - 1]}{p\,(1+p)^N}$, in welcher $B = 1200$, $p = 0{\cdot}05$, $(1+p) = 1{\cdot}05$, und $N = 20$ ist. Man erhält daher $\log\,(1+p) = 0{\cdot}0211893$, $N \log\,(1+p) = 0{\cdot}4237860$, $(1+p)^N = 2{\cdot}653298$, also $K = \frac{1983{\cdot}9576}{0{\cdot}1326649} = 14954{\cdot}664.$

Es war daher diese Schuld 14954 fl. 40 Kr. Kürzer löset sich die Aufgabe mit der Formel $K = B\mathfrak{S}$. $K = 12 \times 12{\cdot}462220$

$K = 14954{\cdot}664$

(2) Eine Schuld wurde bei 6perzentiger Verzinsung jedes Restes dadurch getilgt, daß der Schuldner durch 12 Jahre in jedem halben Jahre 2000 fl. bezahlte. Wie groß war diese Schuld? Antwort: 33871 fl. 40 Kr.

(3) Jemand ist 40000 fl. schuldig, und will diese in 15 Jahren so tilgen, daß der jeweilige Rest der Schuld immer noch mit 5% verinteressirt seyn soll. Was hat er nach jedem halben Jahre zu bezahlen?

Zur Auflösung dieser Aufgabe die Formel: $B = \frac{Kp(1+p)^N}{(1+p)^N - 1}$, in welcher $K = 40000$, $1 + p = 1{\cdot}025$, $N = 30$, $(1+p)^N = 2{\cdot}097568$ ist. Es ist daher $B = \frac{2{\cdot}097563 \times 1000}{1{\cdot}097563} = \frac{2097{\cdot}563}{1{\cdot}097563} = 1911{\cdot}11 = 1911$ fl. 7 Kr.

Kürzer löset sich diese Aufgabe mit der Formel: $B = \frac{K}{\mathfrak{S}} = \frac{40000}{20{\cdot}930106}$

$B = 1911{\cdot}12$

(4) Jemand will 60000 fl. in 25 Jahren in der Art tilgen, daß er jährlich eine bestimmte Summe abträgt, und den jeweiligen Rest mit 4 von Hundert verzinset. Was hat diese Person jährlich zu bezahlen? Antwort: 3840 fl. 43 Kr.

(5) Eine Schuld von 80000 fl. wurde dadurch getilgt, daß nach jedem halben Jahre 3822 fl. 13 Kr. zurückbezahlt, der jeweilige Rest aber mit 5% verinteressirt worden war. Wie viele Jahre waren erforderlich, um diese Schuld zu tilgen?

Zur Auflösung dieser Aufgabe dient die Formel $N = \frac{\log B - \log(B - Kp)}{\log(1+p)}$, in welcher $K = 80000$, $B = 3822{\cdot}22$, $p = 0{\cdot}025$ ist. Es ist aber $\log B = 3{\cdot}5823157$, $\log(B - Kp) = \log 1822{\cdot}22 = 3{\cdot}2606008$, folglich $\log B - \log(B - Kp) = 0{\cdot}3217149$, folglich ist $N = \frac{0{\cdot}3217149}{0{\cdot}0107239} = 29{\cdot}999$, was offenbar gleich 30 ist, woraus folgt, daß diese Schuld nach 30 halben oder 15 ganzen Jahren abgetragen wurde.

(6) Eine Schuld von 60000 fl. wird getilgt, wenn der Schuldner nach jedem Jahre 3840 fl. 43 Kr. bezahlt, und den jeweiligen Rest mit 4% verzinset. Wie viele Jahre sind erforderlich, um diese Schuld zu tilgen? Antwort: 25·00006, oder offenbar 25 Jahre.

§. 212. Oftmals werden aufgenommene Kapitale dadurch getilgt, daß der Schuldner die Interessen mit höheren Prozenten, und zwar immer vom ganzen Nennwerthe der Schuld, entrichtet. Es werden z. B. 5% Interessen bedungen, der Schuldner zahlt aber 10% Interessen. Offenbar wird durch den Mehrbetrag der geleisteten Interessen über die bedungenen ein Theil der Schuld abgetragen, und zwar wird, weil die Interessen immer vom ganzen Nennwerthe entrichtet werden, nach Ablauf jeder Zeitperiode ein größerer Theil der Schuld abgetragen, bis diese dann endlich ganz getilgt ist.

Die hierher gehörigen Aufgaben werden nach den im nächstvorhergehenden §. aufgestellten Formeln gelöset, wobei aber B gleich ist dem für eine Zeitperiode entfallenden Interessen-Betrage zu den erhöhten Prozenten. Drücken wir diese höhern Prozente mit π aus, so ist offenbar $B = \frac{K\pi}{100}$. Setzen wir dieses in der Gleichung $K(1+p)^N = B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$ Statt B, so erhalten wir: $K(1+p)^N = \frac{K\pi}{100}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$, oder auch $(1+p)^N = \frac{\pi[(1+p)^N - 1]}{100\,p}$, oder $(1+p)^N = \frac{\pi\,[(1+p)^N - 1]}{P}$.

Hieraus folgt ferner: $\pi = \frac{P(1+p)^N}{(1-p)^N - 1}$, oder auch $\pi = \frac{100}{\mathfrak{S}}$, und wenn man die Gleichung für N auflöset: $N = \frac{\log \pi - \log(\pi - P)}{\log(1+p)}$.

(7) Zu wie viel Prozente muß man jährlich die Interessen vom ganzen Nennwerthe einer Schuld bezahlen, damit diese in 14 Jahren getilgt wird, wenn jeder Rest der Schuld noch mit 5% verinteressirt werden soll?

Für diesen Fall ist $P = 5$, $N = 14$, $(1+p)^N = 1{\cdot}979932$; sonach ist

$$\pi = \frac{1{\cdot}979932 \times 5}{0{\cdot}979932} = \frac{9{\cdot}899660}{0{\cdot}979932} = 10{\cdot}1024\,\%.$$

(8) Zu wie viel Prozente muß man die Interessen vom ganzen Nennwerthe einer Schuld bezahlen, damit diese nach 4½ Jahre getilgt wird, wenn jeder Rest der Schuld noch mit 5 % verinteressirt werden, und die Zinsenentrichtung halbjährig geschehen soll?

Für diesen Fall ist $P = 2{\cdot}5$, $N = 9$, $(1+p)^N = 1{\cdot}248863$. Hieraus findet man: $\pi = 12{\cdot}545688$; es betragen sonach die Prozente pro anno: **25·091376 %.**

(9) Wie viele Jahre muß man für ein zu 5 % aufgenommenes Kapital die Interessen zu 10·1024 % bezahlen, damit die ganze Schuld getilgt wird?

Hier ist $\pi = 10{\cdot}1024$; $P = 5$; $(\pi - P) = 5{\cdot}1024$; $(1+p) = 1{\cdot}05$, $\log \pi = 1{\cdot}0044246$, $\log(\pi - P) = 0{\cdot}7077745$, $\log(1+p) = 0{\cdot}0211893$; folglich $N = \frac{1{\cdot}0044247 - 0{\cdot}7077745}{0{\cdot}0211893} = \frac{0{\cdot}2966502}{0{\cdot}0211893} = 14$ Jahre.

(10) Wie viele halbe Jahre muß man für ein zu 5 % aufgenommenes Kapital, die Interessen zu 25·091376 % bezahlen, damit die ganze Schuld getilgt wird?

Hier ist $\pi = 12{\cdot}545688$; $P = 2{\cdot}5$; $(\pi - P) = 10{\cdot}045688$; $(1+p) = 1{\cdot}025$; $\log \pi = 1{\cdot}0984947$; $\log(\pi - P) = 1{\cdot}0019796$; $\log(1+p) = 0{\cdot}0107239$; folglich ist $N = \frac{1{\cdot}0984947 - 1{\cdot}0019796}{0{\cdot}0107239} = \frac{0{\cdot}0965151}{0{\cdot}0107239} = 9$ halbe, oder 4½ Jahr.

(11) Jemand hat ein Kapital von 10000 fl. gegen 5 % Zinsen aufgenommen, zahlt aber nach jedem halben Jahre 300 fl. (also eigentlich statt 5 % die Interessen zu 6 %); was wird er nach 20 Jahren noch schuldig seyn?

Diese Aufgabe wird nach der Formel $\Sigma_N = K(1+p)^N - B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$ aufgelöset, wo $K = 10000$, $P = 2{\cdot}5$; $(1+p) = 1{\cdot}025$; $B = 300$; $N = 40$, und $(1+p)^N = 2{\cdot}685064$ ist. Hieraus folgt: $\Sigma = 10000 \times 2{\cdot}685064 - 300 \times \frac{1{\cdot}685064}{0{\cdot}025} = 26850{\cdot}64 - 20220{\cdot}768 = 6629{\cdot}872 = 6629$ fl. 52 Kr.

(12) Nach wie viel Jahren wird er nach der vorigen Bedingung seine ganze Schuld getilgt haben?

Die Auflösung dieser Aufgabe ergibt sich aus der Anwendung der Formel: $N = \frac{\log \pi - \log(\pi - P)}{\log(1+p)}$, wo $\pi = 3$; $P = 2{\cdot}5$; $(1+p) = 1{\cdot}025$; $\log(1+p) = 0{\cdot}0107239$; $(\pi - P) = 0{\cdot}5$; $\log \pi = 0{\cdot}4771213$; $\log(\pi - P) = 0{\cdot}6989700 - 1$; also $N = \frac{0{\cdot}7781513}{0{\cdot}0107239} = 72{\cdot}5622$ halbe Jahre.

Die Auflösung dieser Aufgabe kann, da sie einen konkreten Fall enthält, auch nach der im §. 211 aufgefundenen Formel $N = \frac{\log B - \log(B - Kp)}{\log(1+p)}$

aufgelöset werden, wo $K = 10000$, $B = 300$; $p = 0{\cdot}025$; $(1+p) = 1{\cdot}025$; $pK = 250$; $B - Kp = 50$ ist

$$\log B = 2{\cdot}4771213 \qquad \log(1+p) = 0{\cdot}0107239$$

$$\log(B - Kp) = \frac{\begin{array}{r}2{\cdot}4771213\\ 1{\cdot}6989700\end{array}}{0{\cdot}7781513} \qquad \text{also ist } N = \frac{0{\cdot}7781513}{0{\cdot}0107239} = 72{\cdot}5622 \text{ halbe}$$

Jahre, genau wie bei der ersteren Auflösung.

Die ganze Schuld wird nach 72 halben, oder nach 36 Jahren größtentheils, und wenigstens in der Art getilgt seyn, daß im nächsten halben Jahre nicht mehr der ganze Betrag zu entrichten kommt. Um zu wissen, wie groß der im 73. halben Jahre noch zu leistende Betrag seyn wird, hat man die Aufgabe aufzulösen: Jemand bezahlt, um eine Schuld von 10000 fl. sammt 5% Zinsen zu tilgen, halbjährig verfallen 300 fl. Was wird er nach 36 Jahren noch schuldig seyn? Antwort: 165 fl. 28 Kr.

Demnach wird der Schuldner nach dem 36. Jahre noch 165 fl. 28 Kr., oder um ½ Jahr später 169 fl. 37 Kr. zu bezahlen haben.

(13) Jemand hat ein Kapital von 36000 fl. aufgenommen gegen 5% Verzinsung. Er bezahlt aber statt 5% Zinsen 10%, in halbjährigen Terminen verfallen. Nach wie viel Jahren wird er die ganze Schuld getilgt haben?

Antwort: Nach 28 halben oder nach 14 Jahren, wornach er noch 126 fl. sogleich, oder 129 fl. 9 Kr. nach einem halben Jahre zu bezahlen hat.

(14) Jemand hat ein Kapital von 20000 fl. gegen 5% Verzinsung aufgenommen. Was hat er nach jedem halben Jahre zu bezahlen, um nach 10 Jahren diese Schuld zu tilgen, und wie viel Prozente des Kapitals beträgt diese Bezahlung?

Antwort: 1282·94 oder 1282 fl. 56 Kr.

Betrachtet man diesen Betrag als die halbjährigen Zinsen von 20000 fl., so findet man, daß durch denselben 12·8294, oder 12⅚ % bezahlt wurden.

(15) Jemand hat ein zu 5% aufgenommenes Kapital dadurch getilgt, daß er durch 10 Jahre nach jedem halben Jahre 769⅔ fl. bezahlte. Wie groß war dieses Kapital? Antwort: 12000 fl.

(16) Nach wie viel Jahren wird ein zu 5% ausgeliehenes Kapital von 1000 fl. getilgt, wenn a) 6%, b) 7%, c) 8%, d) 9%, e) 10%, f) 11%, g) 12%, h) 15%, i) 20%, k) 25%, l) 30%, in halbjährig verfallenen Raten bezahlt werden, und wie hoch beläuft sich die letzte nur mehr unvollständige Rate?

Antwort:

Im	Falle	a)	sind	durch	36	Jahre	halbjährig	30 fl.	zu bezahlen,	im	73.	halben Jahre noch 16·969 fl.
»	»	b)	»	»	25	»	»	35 fl.	»	»	51.	» » » 25·786 fl.
»	»	c)	»	»	19½	»	»	40 fl.	»	»	40.	» » » 28·962 fl.
»	»	d)	»	»	16	»	»	45 fl.	»	»	33.	» » » 37·920 fl.
»	»	e)	»	»	14	»	»	50 fl.	»	»	29.	» » » 3·593 fl.
»	»	f)	»	»	12	»	»	55 fl.	»	»	25.	» » » 30·268 fl.
»	»	g)	»	»	10½	»	»	60 fl.	»	»	22.	» » » 49·801 fl.
»	»	h)	»	»	8	»	»	75 fl.	»	»	17.	» » » 31·764 fl.
»	»	i)	»	»	5½	»	»	100 fl.	»	»	12.	» » » 65·334 fl.
»	»	k)	»	»	4½	»	»	125 fl.	»	»	10.	» » » 4·662 fl.
»	»	l)	»	»	3½	»	»	150 fl.	»	»	8.	» » » 57·986 fl.

§. 213. Bei allen früher erwähnten Berechnungen war immer vorausgesetzt, daß die Interessen, so wie die der Tilgung wegen geleisteten hö-

heren Beträgen, nach Ablauf der betreffenden Zeitperiode entrichtet werden. In der neuesten Zeit werden aber häufig Verträge in der Art abgeschlossen, daß die genannten Beträge halbjährig anticipando zu leisten sind, wodurch sich alle Berechnungen bedeutend verändern.

Um das in dieser Beziehung erforderliche Rechnungs-Verfahren aufzufinden, wollen wir ein Kapital K annehmen, dessen Verzinsung zu P Prozente zu geschehen hat, von dessem Nennwerthe aber bis zu seiner Tilgung π Prozente abgestattet werden. Der Betrag B ist in diesem Falle (bei halbjähriger Interessen-Entrichtung) gleich $\frac{K\pi}{200}$, und besteht aus zwei Theilen, nämlich: erstens aus dem wegen der höhern Prozente erfolgenden Rückzahlungs-Betrage, und zweitens aus den Interessen zu P Prozenten von dem Unterschiede der vorigen Schuld und des jeweiligen Rückzahlungs-Betrages.

Setzen wir den ersten Rückzahlungs-Betrag, der sogleich bei der Entstehung der Schuld abzutragen kommt $= x_1$, so ist $B = x_1 + \frac{(K - x_1)P}{200}$, oder weil $B = \frac{K\pi}{200}$ ist, so muß auch $\frac{K\pi}{200} = x_1 + \frac{(K - x_1)P}{200}$ seyn, woraus man $x_1 = \frac{K(\pi - P)}{200 - P}$ auffindet.

Um nun den Rest, von welchem die Interessen zu P Prozente den zweiten Bestandtheil von B ausmachen, aufzufinden, wollen wir ihn R_1 nennen, und er wird gleich seyn müssen dem ganzen Kapitale K, vermindert um den für x_1 gefundenen Ausdruck; sonach ist $R_1 = K - \frac{K(\pi - P)}{200 - P}$, woraus man $R_1 = \frac{K(200 - \pi)}{200 - P}$ erhält.

Nimmt man von diesem Ausdrucke die halbjährigen Interessen I_1 zu P Prozente, so findet man diese $I_1 = \frac{KP(200 - \pi)}{200(200 - P)}$, welcher Ausdruck zu dem für x_1 aufgefundenen addirt, wirklich den Werth von B oder $\frac{K\pi}{200}$ zur Summe gibt.

Wenn wir beziehungsweise auf den zweiten Semester die am ersten Tage des zweiten Semesters fallende Zurückzahlung mit x_2, den zweiten Rest mit R_2 bezeichnen, so finden wir:

$$\frac{K\pi}{200} = x_2 + \frac{(R_1 - x_2)P}{200}$$

$$K\pi = 200\,x_2 + R_1 P - x_2 P$$

$$x_2 = \frac{K\pi - R_1 P}{200 - P}.$$

Wird statt R_1 sein Werth gesetzt, so erhält man:

$$(200 - P)\,x_2 = K\pi - \frac{PK\,(200 - \pi)}{200 - P}$$

$$(200 - P)^2\,x_2 = 200\,K\pi - KP\pi - 200\,KP + KP\pi$$

$$x_2 = \frac{200\,K\,(\pi - P)}{(200 - P)^2} = \frac{200}{200 - P} \times x_1$$

$$x_3 = \frac{200}{200 - P} \times x_2$$

Wegen des zweiten Restes findet man, da dieser gleich $R_1 - x_2$ seyn muß:

$$R_2 = \frac{K\,(200 - \pi)}{200 - P} - \frac{200\,K\,(\pi - P)}{(200 - P)^2}$$

$$(200 - P^2)\,R_2 = K\,(200 - \pi)\,(200 - P) - K\,(200\,\pi - 200\,P)$$

$$= K\,[(200)^2 - 200\,\pi - 200\,P + P\pi - 200\,\pi + 200\,P]$$

$$R_2 = \frac{K\,[200\,(200 - \pi) - \pi\,(200 - P)]}{(200 - P)^2}.$$

Es müssen sonach die im zweiten Semester bezahlten Interessen

$$J_2 = \frac{KP\,[200\,(200 - \pi) - \pi\,(200 - P)]}{200\,(200 - P)^2}$$ seyn.

Wird dieselbe Ausarbeitung weiter fort auf x_3 fortgesetzt, so findet man:

$$\frac{K\pi}{200} = x_3 + \frac{(R_2 - x_3)\,P}{200}$$

$$K\pi = 200\,x_3 + R_2 P - x_3 P$$

$$x_3 = \frac{K\pi - R_2 P}{200 - P},$$ und wenn man für R_2 seinen Werth substituirt:

$$(200 - P)\,x_3 = K\pi - \frac{PK\,[200\,(200 - \pi) - \pi\,(200 - P)]}{(200 - P)^2}$$

$$(200 - P)^3 x_3 = K\pi(200 - P)(200 - P) - KP \times 200(200 - \pi) + KP\pi(200 - P)$$

$$= K\,[(200 - P)\,(200\,\pi - P\pi + P\pi) - 200\,P\,(200 - \pi)]$$

$$= K\,[(200 - P)\,200\,\pi - 200\,P\,(200 - \pi)]$$

$$x_3 = \frac{K\,[200\,\pi\,(200 - P) - 200\,P\,(200 - \pi)]}{(200 - P)^3}$$

$$= \frac{200\,K\,(200\,\pi - P\pi - 200\,P + P\pi)}{(200 - P)^3}$$

$$x_3 = \frac{(200)^2\,K\,(\pi - P)}{(200 - P)^3}$$

Bei Vergleichung der für die Rückzahlungen von Semester zu Semester aufgestellten Ausdrücke findet man:

$$x_1 = \frac{K\,(\pi - P)}{200 - P}$$

$$x_2 = \frac{200\,K\,(\pi - P)}{(200 - P)^2} = x_1 \times \frac{200}{200 - P}$$

$$x_3 = \frac{(200)^2\,K\,(\pi - P)}{(200 - P)^3} = x_2 \times \frac{200}{200 - P}$$ u. s. w.

Aus diesen Resultaten ist man zu den Schluß berechtiget:

$$x_N = x_{N-1} \times \frac{200}{200-P}$$

Zur Erläuterung des Gesagten wollen wir folgende Aufgaben lösen:

(17) Jemand hat ein Kapital von **1000** fl. gegen **5 %** **anticipando** Zinsen aufgenommen, zahlt aber jedes Mahl **10 %** vom Nennwerthe des Kapitals ab, was beträgt die Rückzahlung nach jedem Semester, und was betragen die Interessen in jedem Semester; endlich welcher Rest bleibt nach jedem Semester noch von der anfänglichen Schuld?

Für diesen Fall ist $K=1000$, $\pi=10$, $P=5$, $B=50$.

Mittelst der Formel $x_1 = \frac{K(\pi-P)}{200-P}$ findet man für diesen Fall

$x_1 = \frac{1000\times 5}{195} = 25\cdot\dot{6}4102\dot{5}$, dieses von $B=50$ abgezogen, gibt $I_1 = 24\cdot\dot{3}5897\dot{4}$, und $R = 974\cdot\dot{3}5897\dot{4}$.

Da wegen $x_N = x_{N-1} \times \frac{200}{200-P}$ auch $x_2 = x_1 \times \frac{200}{200-P}$ ist, so folgt, daß man die in jeder einzelnen Zeitperiode aufgefundenen Rückzahlungen nur mit $\frac{200}{195}$ oder mit $1\cdot\dot{0}2564\dot{1}$ zu multipliziren hat, wodurch man für $x_2 = 26\cdot298488$ auffindet. Diese von B abgezogen, geben **23·701512** als den für den zweiten Semester entfallenden Interessenbetrag und von R_1 abgezogen den zweiten Rest der Schuld mit **948·060486**.

Sucht man die von jedem Reste der Schuld entfallenden halbjährigen Interessen zu **5 %**, so erhält man aus dem Reste **974·358974** die Interessen **24·358974**, aus dem zweiten Reste **948·060486** die Interessen: **23·701512**, übereinstimmend mit den früher aufgefundenen Interessenbeträgen, woraus sich auch die Richtigkeit des Verfahrens für den vorliegenden Fall nachweiset.

Multiplizirt man den zweiten Rückzahlungsbetrag mit dem konstanten Faktor **1·025641**, so erhält man den dritten u. s. w., der von **B** und von dem vorhergehenden Reste abgezogen, die diesen Semester zugehörigen Zinsen und neuen Reste angeben. Fährt man auf diese Weise fort, bis man auf einen Rest kommt, der kleiner ist als **B**, so ist die Auflösung beendet, und dieser Rest gibt an, welcher Betrag im nächstfolgenden Semester unverzinset noch zu erstatten ist. Im vorliegenden Falle findet man den **27.** Rest gleich **19·041504**, welcher anzeigt, daß beim Anfange des **28.** Semesters noch dieser Betrag, jedoch unverzinset, zu verabfolgen kommt, wornach das ganze Geschäft beendet ist.

Anmerkung. Die Tabelle Nr. (XXXI) gibt für unsere Aufgabe alle in den einzelnen Semestern erforderlichen Rückzahlungsbeträge, so wie die entsprechenden Interessen und neuen Reste bis zur Abschließung des Geschäftes an, wobei jede spätere Rückzahlung aus der ihr unmittelbar vorhergehenden abgeleitet wurde.

Aus der Form des konstanten Faktors $\frac{200}{200-P}$ zeigt sich, daß dieser für alle jene Fälle derselbe bleibt, für welche dieselbe Verzinsung des Kapitals ver-

langt wird, nämlich bei 5 % Verzinsung immer $1{\cdot}0\dot{2}5641\dot{}$, und daß man ferner nur die erste Rückzahlung nach der Form $x = \frac{K(\pi - P)}{200 - P}$ den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmen braucht, aus welcher sich sodann die zweite u. s. f. jede spätere Rückzahlung ergibt.

Um aber jede einzelne Rückzahlung unabhängig von der ihr jedesmal vorhergehenden, und unmittelbar aus der ersten ableiten zu können, kann man sich eine sehr brauchbare Tabelle dadurch entwerfen, daß man sich alle Potenzen von $\frac{200}{200 - P}$, welchen Ausdruck wir der Kürze wegen mit **E** bezeichnen wollen, entwickelt. — Bezeichnet **N** die Anzahl der schon erfolgten Rückzahlungen, so ist für die erste Rückzahlung, welche sogleich bei Kreirung der Schuld entrichtet wird, $N = 0$, folglich $E^N = E^0 = 1$. Bei der zweiten Rückzahlung ist $E = 1$, bei der dritten $E = 2$, u. s. w.

Für eine 5 perzentige Verinteressirung jedes noch schuldigen Restes, welche die am häufigsten vorkommende ist, finden sich diese Potenzen von **E** in der Tabelle XXXIII, für welchen Fall $E = 1{\cdot}0\dot{2}564\dot{1}$ ist.

(18) Was beträgt die zehnte Rückzahlung vom Kapitale 1000 fl. bei 5 % Verzinsung und 10 % Abstattung, bei halbjähriger Kapitalisazion?

Für diesen Fall ist $x_{10} = 25{\cdot}6\dot{4}12\dot{5} \times 1{\cdot}255910 = 32{\cdot}20282$ fl.

In der genannten Tabelle finden sich in der zunächst daneben stehenden Spalte die Summen der früheren Potenzen von **E** angegeben, wodurch man den wesentlichen Vortheil erreicht, daß man sogleich wissen kann, wie viel nach mehreren schon geleisteten Rückzahlungen im Ganzen zurückgezahlt worden ist; wenn man nämlich die bei **N** vorkommende Zahl der letzterwähnten Spalte mit der ersten Rückzahlung multiplizirt. Wird dieser Betrag von der ursprünglichen Summe subtrahirt, so muß der Rest offenbar den noch weiter schuldigen Betrag angeben.

(19) Welcher Betrag ist in dem, in der nächstvorhergehenden Aufgabe erwähnten Falle, durch die ersten Rückzahlungen schon getilgt worden, und was beträgt der Rest der Schuld?

In dieser Tabelle findet man nach 10 Rückzahlungen die Summe 11·236390, welche mit $25{\cdot}\dot{6}4102\dot{5}$ multiplizirt, das Produkt 288·1126 gibt; woraus erhellet, daß nach 10 Rückzahlungen schon fl. 228·1126 bezahlt sind, daß also der noch schuldige Rest fl. 711·8874 beträgt.

(20) Welcher Betrag ist in demselben Falle nach 27 Rückzahlungen wirklich zurückbezahlt, und was beträgt der noch schuldige Rest?

Die Tabelle gibt für 27 Rückzahlungen die Summe 38·257379 × 25·641025, oder das Produkt 980·9584; woraus erhellet, daß nach 27 Rückzahlungen fl. 980·9584 bezahlt sind, daß also der noch schuldige Rest nur mehr fl. 19·0416 beträgt.

Die allgemeine Form für dieses Summenglied ist:

$x + xE + xE^2 + xE^3 + xE^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + xE^{N-2} + xE^{N-1}$ wo bekanntlich x die erste Rückzahlung, **E** aber den konstanten Faktor $\frac{200}{200 - P}$ bezeichnet.

Offenbar muß die Summe aller Rückzahlungen der ganzen Schuld oder K gleich seyn. Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$K = x + xE + xE^2 + xE^3 + xE^4 + \ldots\ldots\ldots + xE^{N-2} + xE^{N-1}.$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit E, so ist

$$KE = xE + xE^2 + xE^3 + xE^4 + xE^5 + \ldots\ldots xE^{N-1} + xE^N.$$

Subtrahirt man die frühere Gleichung von der letztaufgestellten, so erhält man $KE - K = xE^N - x$, oder $K = \frac{x(E^N - 1)}{E - 1}$, welche Formel angibt, was für ein Betrag nach einer Reihe von Semestern schon zurückbezahlt ist.

Hieraus wird $E^N = \frac{K(E-1) + x}{x}$. Setzt man in diesem Ausdrucke für x und E ihre Werthe, nämlich $x = \frac{K(\pi - P)}{200 - P}$, und $E = \frac{200}{200 - P}$, so erhält man:

$$E^N = \left\{ K\left(\frac{200}{200-P} - 1\right) + K\left(\frac{\pi - P}{200 - P}\right)\right\} : \frac{K(\pi - P)}{200 - P}$$

$$E^N = \frac{200K - 200K + KP + K\pi - KP}{K(\pi - P)} = \frac{K\pi}{K(\pi - P)} = \frac{\pi}{\pi - P}$$

Wird diese Gleichung für N aufgelöset, so ist

$$N \log E = \log \pi - \log(\pi - P), \text{ folglich}$$

$$N = \frac{\log \pi - \log(\pi - P)}{\log E}$$

Diese Formel lehrt uns die Aufgabe auflösen: Wie viele Semester muß man die Rückzahlungen mit anticipando-Zinsen machen, um ein aufgenommenes Kapital zurückzubezahlen?

(21) Nach wie viel Semester wird ein Kapital, welches zu 5 % verzinset werden soll, bei 10 % Abstattung getilget seyn?

Anmerkung. Offenbar hat die Größe des Kapitals hierauf keinen Einfluß, weil sich nach Festsetzung der Verzinsungs- und der Rückzahlungsprozente eine noch so kleine Schuld dennoch nicht früher tilgen kann, als eine Schuld, die wie immer groß ist, wie dieß auch die Formel nachweiset.

$\log \pi = 1$	$\log E = 0{\cdot}0109954$
$\log(\pi - P) = 0{\cdot}6989700$	Also ist $N = 0{\cdot}3010300 : 0{\cdot}0109954$
Differenz $= 0{\cdot}3010300$	$N = 27$:............

Anmerkung. In den allerseltensten Fällen, vielleicht auch gar nie, wird man für N eine ganze Zahl finden, der aufgefundene anzuhängende Bruch ist aber unbrauchbar. Es wird somit hier der Fall eintreten, daß man die Summe aller Rückzahlungen nach N Semester bestimmt, wornach man den noch schuldigen Rest erhält, der aber jedesmal kleiner als der sonstige Abstattungsbetrag entfallen muß.

Löset man hiernach die vorliegende Aufgabe auf, so ist ihre Auflösung mit der Auflösung der Aufgabe 20 identisch.

(22) Ein zu 5 % aufgenommenes Kapital von 1000 fl. soll durch Entrichtung von 6 % anticipando Zinsen in halbjährigen Raten zahlbar getilgt werden. Was beträgt die erste Rückzahlung, durch wie viele Semester wer-

den die vollständigen 6 % Interessen bezahlt werden müssen, und wie hoch beläuft sich der im letzten Semester noch zu zahlende Betrag?

Antwort: Der vollständige Betrag von 30 fl. per Semester ist durch 70 Semester zu leisten. Die erste Rückzahlung beträgt 5·128205 fl., im 71. Semester sind noch 23·188542, d. i. 23 fl. 11 Kr. zu zahlen.

(23) Ein zu 5 % aufgenommenes Kapital von 1000 fl. soll durch Entrichtung von 7 % anticipando Zinsen, in halbjährigen Raten zahlbar, getilgt werden. Was beträgt die erste Rückzahlung; durch wie viele Semester werden die vollständigen 7 % Interessen geleistet werden müssen; und wie groß wird der im letzten Semester noch zahlbare Betrag seyn?

Antwort. Die erste Rückzahlung beträgt 10·256410 fl. Der vollständige Betrag von 35 fl. muß durch 49 Semester entrichtet werden, und es sind für den 50sten Semester nur noch 16·962929 fl., oder 16 fl. 58 Kr. zu entrichten.

(24) Welche Resultate erhält man unter denselben Bedingungen bei 8 % anticipando Zinsen?

Antwort. Die erste Rückzahlung beträgt 15·384615 fl. Der vollständige Betrag von 40 fl. muß durch 38 Semester entrichtet werden, und es sind am Anfange des 39sten Semesters nur mehr 29·724517 oder 29 fl. 43 Kr. zu entrichten.

(25) Welche Resultate erhält man unter denselben Bedingungen bei 9 % anticipando Zinsen?

Antwort: Die erste Rückzahlung beträgt 20·512820 fl. Der vollständige Betrag von 45 fl. ist durch 32 Semester zu entrichten, und es sind am Anfange des 33sten Semesters noch 1 fl. 22 Kr. zu bezahlen.

(26) Welche Resultate erhält man unter denselben Bedingungen bei 12 % anticipando Zinsen?

Antwort: Die erste Rückzahlung beträgt 35·897435 fl. Der vollständige Betrag von 60 fl. ist durch 21 Semester zu entrichten, und es sind am Anfange des 22sten Semesters noch 17·51034 fl., d. i. 17 fl. 31 Kr. zu bezahlen.

(27) Welche Resultate enthält man unter eben diesen Bedingungen bei 15 % anticipando Zinsen?

Antwort. Die erste Rückzahlung beträgt 51·282051 fl. Der vollständige Betrag von 75 fl. ist durch 16 Semester zu entrichten, und es sind am Anfange des 17. Semesters noch 1·140 fl., oder 1 fl. 8 Kr. zu bezahlen.

(28) Ein Kapital von 1000 fl. soll durch Entrichtung von 5½ % anticipando Zinsen, in halbjährigen Renten zahlbar, getilgt werden, wenn jeder Rest der Schuld mit 5 % verzinset wird. Was beträgt die erste Rückzahlung? Durch wie viele Semester werden die vollständigen 5½ % Interessen bezahlt werden müssen? Wie hoch belauft sich der im letzten Semester noch zu entrichtende Betrag?

Antwort. Die erste Rückzahlung beträgt 2·564102 fl. Der vollständige Zinsenbetrag mit 27½ fl. per Semester ist durch 94 Semester zu entrichten, wornach im 95 Semester noch fl. 19·6459 oder 19 fl. 39 Kr. zu bezahlen sind.

(29) Ein Kapital von 12000 fl. soll durch Entrichtung von 8 % anticipando Zinsen in halbjährigen Raten zahlbar, getilgt werden, wenn jeder Rest der Schuld mit 4 % verzinset wird. Was beträgt die erste Rückzahlung?

Durch wie viele Semester müssen die vollständigen 8 % Zinsen im Betrage von **480** fl. per Semester entrichtet werden? Welcher Betrag ist in dieser Zwischenzeit zurückbezahlt? Wie hoch beläuft sich der im letzten Semester noch zu entrichtende Betrag?

Anmerkung. Da hier eine andere als eine 5 % Verzinsung für jeden Rest der Schuld bedungen ist, so kann man sich zur Auflösung dieser Aufgabe der Tabelle XXXIII nicht bedienen, es muß sonach die Auflösung nach unseren aufgestellten Formeln vollständig ausgearbeitet werden, wie folget:

Die erste Rückzahlung $x = \frac{K(\pi - P)}{200 - P} = \frac{12000 \times 4}{196}$ beträgt fl. **244·897959**. Die Anzahl der Semester ergibt sich aus der Formel $N = \frac{\log \pi - \log(\pi - P)}{\log E}$. Der Werth von $E = \frac{200}{200 - P} = 200 : 196$ ist: **1·020408163265.......**, daher wird $N = \frac{\log 8 - \log 4}{\log 1{\cdot}020408} = 0{\cdot}3010300 : 0{\cdot}0087738 = 34$. Es sind daher die **480** fl. durch **34** Semester vollständig zu bezahlen.

Um zu finden, ein wie großer Theil der Schuld während dieser **34** Semester zurückbezahlt wurde, dient die Formel: $K = \frac{x(E^N - 1)}{E - 1}$. Hierfür findet man E^N mittelst Logarithmen gleich **1·98751**. Es ist daher $\frac{E^N - 1}{E - 1} = 0{\cdot}98751 : 0{\cdot}020408 = 48{\cdot}389$. Hieraus folgt, daß die Summe aller während **34** Semestern erfolgten Rückzahlungen gleich **244·897959** × **48·389**, oder gleich **11850·3672** fl. ist, folglich sind im Anfange des **35.** Semesters noch fl. **149·6328** oder **149** fl. **38** Kr. zu bezahlen.

Anmerkung. Die von Semester zu Semester sich ergebenden Resultate sind in der Tabelle XXXII angegeben, woraus auch zu ersehen ist, daß der geringfügige Unterschied keiner weiteren Berücksichtigung gewürdiget werden darf.

(30) Was beträgt die erste Rückzahlung $x = \frac{K(\pi - P)}{200 - P}$ vom Kapitale **1000** Gulden bei einer **5** %tigen Verzinsung jedes noch vorhandenen Restes bei nachstehenden Abstattungs (π) Prozenten?

Antwort:

$\pi = 5\frac{1}{4}$; $x = 1{\cdot}282051$	$\pi = 7\frac{1}{4}$; $x = 11{\cdot}538461$
$\pi = 5\frac{1}{2}$; $x = 2{\cdot}564102$	$\pi = 7\frac{1}{2}$; $x = 12{\cdot}820512$
$\pi = 5\frac{3}{4}$; $x = 3{\cdot}846153$	$\pi = 7\frac{3}{4}$; $x = 14{\cdot}102564$
$\pi = 6$; $x = 5{\cdot}128205$	$\pi = 8$; $x = 15{\cdot}384615$
$\pi = 6\frac{1}{4}$; $x = 6{\cdot}410256$	$\pi = 8\frac{1}{4}$; $x = 16{\cdot}6$
$\pi = 6\frac{1}{2}$; $x = 7{\cdot}692307$	$\pi = 8\frac{1}{2}$; $x = 17{\cdot}948717$
$\pi = 6\frac{3}{4}$; $x = 8{\cdot}974358$	$\pi = 8\frac{3}{4}$; $x = 19{\cdot}230769$
$\pi = 7$; $x = 10{\cdot}256410$	$\pi = 9$; $x = 20{\cdot}512820$

$\pi = 9\frac{1}{4}$; $x = 21{\cdot}794871$	$\pi = 12\frac{1}{4}$; $x = 37{\cdot}179487$
$\pi = 9\frac{1}{2}$; $x = 23{\cdot}076923$	$\pi = 12\frac{1}{2}$; $x = 38{\cdot}461538$
$\pi = 9\frac{3}{4}$; $x = 24{\cdot}358974$	$\pi = 12\frac{3}{4}$; $x = 39{\cdot}743589$
$\pi = 10$; $x = 25{\cdot}641025$	$\pi = 13$; $x = 41{\cdot}025641$
$\pi = 10\frac{1}{4}$; $x = 26{\cdot}923076$	$\pi = 13\frac{1}{4}$; $x = 42{\cdot}307692$
$\pi = 10\frac{1}{2}$; $x = 28{\cdot}205128$	$\pi = 13\frac{1}{2}$; $x = 43{\cdot}589743$
$\pi = 10\frac{3}{4}$; $x = 29{\cdot}487179$	$\pi = 13\frac{3}{4}$; $x = 44{\cdot}871794$
$\pi = 11$; $x = 30{\cdot}769230$	$\pi = 14$; $x = 46{\cdot}153846$
$\pi = 11\frac{1}{4}$; $x = 32{\cdot}051282$	$\pi = 14\frac{1}{4}$; $x = 47{\cdot}435897$
$\pi = 11\frac{1}{2}$; $x = 33{\cdot}3$	$\pi = 14\frac{1}{2}$; $x = 48{\cdot}717948$
$\pi = 11\frac{3}{4}$; $x = 34{\cdot}615384$	$\pi = 14\frac{3}{4}$; $x = 50{\cdot}$
$\pi = 12$; $x = 35{\cdot}897435$	$\pi = 15$; $x = 51{\cdot}282051$

u. s. w.

§. 214. Oftmals werden, zumal größere Kapitale in der Art aufgenommen, daß das ganze Kapital in kleinere Theile vertheilt, von mehreren Gläubigern vorgestreckt wird. Die Kapitalszahlung geschieht dann gewöhnlich durch Verlosungen, die von Zeit zu Zeit Statt finden, und durch welche den Gläubigern mindestens ihr Kapital meistens mit Interessen, für viele aber noch mit sehr bedeutenden Gewinnsten vermehrt, zurückbezahlt wird.

Um den Gläubigern solche Gewinnste zuwenden zu können, wenn der Schuldner doch nur die gewöhnlich üblichen Zinsen von seiner Schuld leistet, werden den bei der Verlosung herausgekommenen niedersten Treffern weniger Prozente gegeben, als zu wie viel der Schuldner seine Schuld verzinset, und es wird das dabei in Ersparung Gebrachte für die Hauptgewinnste verwendet; was sich die Gläubiger gerne gefallen lassen, indem ihnen die Hoffnung zur Erreichung größerer und sehr namhafter Gewinnste bleibt.

Bei Kontrahirung einer Schuld wird in der Schuldurkunde hierüber der gehörige Aufschluß gegeben, und es werden die auf jede Verlosung fallenden Gewinnste in einem eigenen Verlosungsplane den Gläubigern bekannt gemacht.

Welche Berechnungen hierbei Statt finden, wird sich am leichtesten in einem speziälen Falle darthun. Daß diese Berechnungen für einen jeden speziälen Fall anders seyn, und sich jedesmal nach den in der Schuldurkunde angegebenen Bedingungen richten müssen, ist von selbst klar.

(31) Eine Herrschaft nimmt gegen sichere Hypothek ein Vermögen von **20** Millionen auf, und verzinset die ganze Schuld mit **5** von Hundert. Das vermittelnde Großhandlungshaus gibt hierfür **40000** Lose à **500** fl. aus. Diese **40000** Lose werden in **1000** Serien à **40** Stück vertheilt. Diese Lose werden durch **25** Verlosungen, von welchen die erste nach Einem Jahre und jede folgende wieder um Ein Jahr später als ihre nächstvorgehende vorgenommen wird, in der Art eingelöset, daß in jedem Jahre **40** Serien oder **1600** Lose gezogen und sonach zurückbezahlt werden.

Im ersten Jahre werden von dem in die Verlosung fallenden Kapitale **8%**, im zweiten **7%**, im dritten **6%**, im vierten **5%**, in allen späteren bis inclusive zwanzigsten Jahre **4½%**, vom ein und zwanzigsten bis fünf und zwanzigsten Jahre **5%** berechnet und vertheilt. Es versteht sich von selbst, daß die Interessen jedesmal für die ganze Dauer des Anlehens bis zur Vertheilung zu berechnen und zu vertheilen kommen.

Für das, was der Schuldner in den drei ersten Jahren über die verheißenen 5% mehr bezahlt, wird keine Interessen-Vergütung verlangt. Eben so leistet er aber auch an die Gläubiger keine Interessen-Vergütung für die zurückbehaltenen Beträge, die aus den um ½% zu wenig geleisteten Interessen vom 5ten bis zum 21sten Jahre sich ergeben. Letztgenannte Beträge werden anfänglich dazu verwendet, um die ersteren zu früh bezahlten zu tilgen, alles noch Übrige aber wird bis zur letzten Verlosung gesammelt, und zur Erhöhung der Gewinnste für die im 25sten Jahre noch zu verlosenden 40 Serien verwendet.

Von den 1600 nach jedem Jahre zu verlosenden Stücken sollen jedesmal 1000 die niedersten Treffer haben, und für jedes Jahr bis zu ihrer Verlosung 2% Interessen erhalten; 250 anderen sollen auf dieselbe Weise 4% zugewendet werden, die übrigen 350 Lose sollen mit dem Erübrigten durch die Verlosung betheilt werden.

Verlosungen.

Nach dem ersten Jahre

1 Jahr à 8%	1000	à	510	=	fl. 510000
fl. 800000	250	à	520	=	130000
64000	200	à	540	=	108000
	80	à	550	=	44000
fl. 864000	40	à	650	=	26000
zu viel	20	à	860	=	17200
fl. 24000	5	à	1100	=	5500
	2	à	1650	=	3300
	2	à	5000	=	10000
	1	à	10000	=	10000
	1600 Lose				fl. 864000

Nach dem zweiten Jahre

2 Jahre à 7%	1000	à	520	=	fl. 520000
fl. 800000	250	à	540	=	135000
5% 80000	200	à	560	=	112000
2% 32000	80	à	660	=	52800
	40	à	900	=	36000
fl. 912000	20	à	1120	=	22400
zu viel	5	à	1400	=	7000
fl. 32000	2	à	2400	=	4800
24000	2	à	5500	=	11000
	1	à	11000	=	11000
fl. 56000					
	1600 Lose				fl. 912000

Nach dem dritten Jahre

3 Jahre à 6%	1000	à	530	=	fl. 530000
fl. 800000	250	à	560	=	140000
à 5% 120000	200	à	600	=	120000
à 1% 24000	80	à	700	=	56000
	40	à	950	=	38000
fl. 944000	20	à	1175	=	23500
zu viel	5	à	1400	=	7000
fl. 24000	2	à	2750	=	5500
56000	2	à	6000	=	12000
	1	à	12000	=	12000
fl. 80000					
	1600 Lose				fl. 944000

Nach dem vierten Jahre

4 Jahre à 5%	1000	à	540	=	fl. 540000
fl. 800000	250	à	580	=	145000
160000	200	à	600	=	120000
	80	à	710	=	56800
fl. 960000	40	à	950	=	38000
zu viel	20	à	1175	=	23500
fl. 80000	5	à	1400	=	7000
	2	à	2850	=	5700
	2	à	6000	=	12000
	1	á	12000	=	12000
	1600 Lose				fl. 960000

Nach dem fünften Jahre

5 Jahre à 4½ %	1000	à	550	=	fl. 550000
fl. 800000	250	à	600	=	150000
à 5% 200000	200	à	610	=	122000
fl. 1000000	80	à	720	=	57600
à ½ % 20000	40	à	950	=	38000
	20	à	1225	=	24500
fl. 980000	5	à	1400	=	7000
fl. 80000	2	à	2950	=	5900
fl. 20000	2	à	6000	=	12000
	1	à	13000	=	13000
zu viel					
fl. 60000					
	1600 Lose				fl. 980000

Nach dem sechsten Jahre

6 Jahre à 4½ %	1000	à	560	=	fl. 560000
fl. 800000	250	à	620	=	155000
à 5% 240000	200	à	630	=	126000
	80	à	850	=	68000
1040000	40	à	1000	=	40000
24000	20	à	1370	=	27400
fl. 1016000	5	à	1440	=	7200
24000	2	à	3200	=	6400
60000	2	à	6000	=	12000
	1	á	14000	=	14000
zu viel					
fl. 36000					
	1600 Lose				fl. 1016000

Nach dem siebenten Jahre

7 Jahre à 4½ %		1000	à	570	=	fl. 570000
	fl. 800000	250	à	640	=	160000
à 5 %	280000	200	à	650	=	130000
	1080000	80	à	900	=	72000
	28000	40	à	1200	=	48000
	fl. 1052000	20	à	1440	=	28800
	36000	5	à	1480	=	7400
	28000	2	à	3900	=	7800
zu viel		2	à	6500	=	13000
	fl. 8000	1	à	15000	=	15000
		1600 Lose.....fl. 1052000				

Nach dem achten Jahre

8 Jahre à 4½ %		1000	à	580	=	fl. 580000
	fl. 800000	250	à	660	=	165000
à 5 %	320000	200	à	700	=	140000
	1120000	80	à	950	=	76000
	32000	40	à	1250	=	50000
	fl. 1088000	20	à	1510	=	30200
	8000	5	à	1680	=	8400
	32000	2	à	4200	=	8400
zu wenig		2	à	7000	=	14000
	fl. 24000	1	à	16000	=	16000
		1600 Lose.....fl. 1088000				

Nach dem neunten Jahre

9 Jahre à 4½ %		1000	à	590	=	fl. 590000
	fl. 800000	250	à	680	=	170000
à 5 %	360000	200	à	750	=	150000
	1160000	80	à	1000	=	80000
	36000	40	à	1300	=	52000
	fl. 1124000	20	à	1580	=	31600
	24000	5	à	1880	=	9400
	36000	2	à	4500	=	9000
zu wenig		2	à	7500	=	15000
	fl. 60000	1	à	17000	=	17000
		1600 Lose.....fl. 1124000				

Nach dem zehnten Jahre

10 Jahre à 4½ %		1000	à	600	=	fl. 600000
	fl. 800000	250	à	700	=	175000
à 5 %	400000	200	à	800	=	160000
	1200000	80	à	1050	=	84000
	40000	40	à	1350	=	54000
	fl. 1160000	20	à	1650	=	33000
	60000	5	à	2080	=	10400
	40000	2	à	4800	=	9600
zu wenig		2	à	8000	=	16000
	fl. 100000	1	à	18000	=	18000
		1600 Lose.....fl. 1160000				

Nach dem eilften Jahre

11 Jahre à 4½ %		1000	à	610	=	fl. 610000
	fl. 800000	250	à	720	=	180000
à 5 %	440000	200	à	850	=	170000
	1240000	80	à	1100	=	88000
	44000	40	à	1400	=	56000
	fl. 1196000	20	à	1720	=	34400
	100000	5	à	2280	=	11400
	44000	2	à	5100	=	10200
zu wenig		2	à	8500	=	17000
	fl. 144000	1	à	19000	=	19000
		1600 Lose.....fl. 1196000				

Nach dem zwölften Jahre

12 Jahre à 4½ %		1000	à	620	=	fl. 620000
	fl. 800000	250	à	740	=	185000
à 5 %	480000	200	à	900	=	180000
	1280000	80	à	1150	=	92000
	48000	40	à	1450	=	58000
	fl. 1232000	20	à	1790	=	35800
	144000	5	à	2480	=	12400
	48000	2	à	5400	=	10800
zu wenig		2	à	9000	=	18000
	fl. 192000	1	à	20000	=	20000
		1600 Lose.....fl. 1232000				

Nach dem dreizehnten Jahre

13 Jahre à 4½ %		1000	à	630	=	fl. 630000
	fl. 800000	250	à	760	=	190000
à 5 %	520000	200	à	950	=	190000
	1320000	80	à	1200	=	96000
	52000	40	à	1500	=	60000
	fl. 1268000	20	à	1860	=	37200
	192000	5	à	2680	=	13400
	52000	2	à	5700	=	11400
zu wenig		2	à	9500	=	19000
	fl. 244000	1	à	21000	=	21000
		1600 Lose.....fl. 1268000				

Nach dem vierzehnten Jahre

14 Jahre à 4½ %		1000	à	640	=	640000
	fl. 800000	250	à	780	=	195000
à 5 %	560000	200	à	1000	=	200000
	1360000	80	à	1250	=	100000
	56000	40	à	1550	=	62000
	fl. 1304000	20	à	1930	=	38600
	244000	5	à	2880	=	14400
	56000	2	à	6000	=	12000
zu wenig		2	à	10000	=	20000
	fl. 300000	1	à	22000	=	22000
		1600 Lose.....fl. 1304000				

Nach dem fünfzehnten Jahre

15 Jahre à 4½%	1000 à 650 = fl. 650000
fl. 800000	250 à 80 = 200000
à 5 % 600000	200 à 1050 = 210000
1400000	80 à 1300 = 104000
60000	40 à 1600 = 64000
fl. 1340000	20 à 2000 = 40000
300000	5 à 3080 = 15400
60000	2 à 6300 = 12600
zu wenig	2 à 10500 = 21000
fl. 360000	1 à 23000 = 23000

1600 Lose.....fl. 1340000

Nach dem sechzehnten Jahre

16 Jahre à 4½%	1000 à 660 = fl. 660000
fl. 800000	250 à 820 = 205000
à 5 % 640000	200 à 1100 = 220000
1440000	80 à 1350 = 108000
64000	40 à 1650 = 66000
fl. 1376000	20 à 2070 = 41400
360000	5 à 3280 = 16400
64000	2 à 6600 = 13200
zu wenig	2 à 11000 = 22000
fl. 424000	1 à 24000 = 24000

1600 Lose.....fl. 1376000

Nach dem siebenzehnten Jahre

17 Jahre à 4½%	1000 à 670 = fl. 670000
fl. 800000	250 à 840 = 210000
à 5% 680000	200 à 1150 = 230000
1480000	80 à 1400 = 112000
68000	40 à 1700 = 68000
fl. 1412000	20 à 2140 = 42800
424000	5 à 3480 = 17400
68000	2 à 6900 = 13800
zu wenig	2 à 11500 = 23000
fl. 492000	1 à 25000 = 25000

1600 Lose.....fl. 1412000

Nach dem achtzehnten Jahre

18 Jahre à 4½%	1000 à 680 = fl. 680000
fl. 800000	250 à 860 = 215000
à 5 % 720000	200 à 1200 = 240000
1520000	80 à 1450 = 116000
72000	40 à 1750 = 70000
fl. 1448000	20 à 2210 = 44200
492000	5 à 3680 = 18400
72000	2 à 7200 = 14400
zu wenig	2 à 12000 = 24000
fl. 564000	1 à 26000 = 26000

1600 Lose.....fl. 1448000

Nach dem neunzehnten Jahre

19 Jahre à 4½%	1000 à 690 = fl. 690000
fl. 800000	250 à 880 = 220000
à 5 % 760000	200 à 1250 = 250000
1560000	80 à 1500 = 120000
76000	40 à 1800 = 72000
fl. 1484000	20 à 2280 = 45600
564000	5 à 3880 = 19400
76000	2 à 7500 = 15000
zu wenig	2 à 12500 = 25000
fl. 640000	1 à 27000 = 27000

1600 Lose.....fl. 1484000

Nach dem zwanzigsten Jahre

20 Jahre à 4½%	1000 à 700 = fl. 700000
fl. 800000	250 à 900 = 225000
à 5 % 800000	200 à 1300 = 260000
1600000	80 à 1550 = 124000
80000	40 à 1850 = 74000
fl. 1520000	20 à 2350 = 47000
640000	5 à 4080 = 20400
80000	2 à 7800 = 15600
zu wenig	2 à 13000 = 26000
fl. 720000	1 à 28000 = 28000

1600 Lose.....fl. 1520000

Nach dem ein und zwanzigsten Jahre

21 Jahre à 5%	1000 à 730 = fl. 730000
fl. 800000	250 à 960 = 240000
20 J. 800000	200 à 1450 = 290000
1 J. 40000	80 à 1700 = 136000
fl. 1640000	40 à 2000 = 80000
zu wenig	20 à 2650 = 53000
fl. 720000	5 à 5280 = 26400
	2 à 9300 = 18600
	2 à 16000 = 32000
	1 à 34000 = 34000

1600 Lose.....fl. 1640000

Nach dem zwei und zwanzigsten Jahre

22 Jahre à 5%	1000 à 740 = fl. 740000
fl. 800000	250 à 980 = 245000
20 J. 800000	200 à 1500 = 300000
2 J. 80000	80 à 1750 = 140000
fl. 1680000	40 à 2050 = 82000
zu wenig	20 à 2750 = 55000
fl. 720000	5 à 5680 = 28400
	2 à 9800 = 19600
	2 à 17000 = 34000
	1 à 36000 = 36000

1600 Lose.....fl. 1680000

Nach dem drei und zwanzigsten Jahre			
23 Jahre à 5%	1000 à	750 =	fl. 750000
fl. 800000	250 à	1000 =	250000
20 J. 800000	200 à	1550 =	310000
3 J. 120000	80 à	1800 =	144000
	40 à	2100 =	84000
fl. 1720000	20 à	2850 =	57000
zu wenig	5 à	6080 =	30400
fl. 720000	2 à	10300 =	20600
	2 à	18000 =	36000
	1 à	38000 =	38000
	1600 Lose.....		fl. 1720000

Nach dem vier und zwanzigsten Jahre			
24 Jahre à 5%	1000 à	760 =	fl. 760000
fl. 800000	250 à	1020 =	255000
20 J. 800000	200 à	1600 =	320000
4 J. 160000	80 à	1850 =	148000
	40 à	2150 =	86000
fl. 1760000	20 à	2950 =	59000
zu wenig	5 à	6480 =	32400
fl. 720000	2 à	10800 =	21600
	2 à	19000 =	38000
	1 à	40000 =	40000
	1600 Lose.....		fl. 1760000

Nach dem fünf und zwanzigsten Jahre			
25 Jahre à 5%	1000 à	950 =	fl. 950000
fl. 800000	250 à	1400 =	350000
20 J. 800000	200 à	2550 =	510000
5 J. 200000	80 à	2800 =	224000
	40 à	3100 =	124000
fl. 1800000	20 à	4850 =	97000
720000	5 à	14480 =	72400
fl. 2520000	2 à	20300 =	40600
	2 à	36000 =	72000
	1 à	80000 =	80000
	1600 Lose.....		fl. 2520000

Übersicht.

1600	Lose	im Werthe	von	800000	fl.	werden	nach	dem	1.	Jahre eingelöset	mit	fl. 864000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	2.	»	»	= 912000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	3.	»	»	= 944000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	4.	»	»	= 960000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	5.	»	»	= 980000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	6.	»	»	= 1016000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	7.	»	»	= 1052000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	8.	»	»	= 1088000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	9.	»	»	= 1124000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	10.	»	»	= 1160000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	11.	»	»	= 1196000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	12.	»	»	= 1232000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	13.	»	»	= 1268000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	14.	»	»	= 1304000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	15.	»	»	= 1340000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	16.	»	»	= 1376000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	17.	»	»	= 1412000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	18.	»	»	= 1448000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	19.	»	»	= 1484000
1600	»	»	«	800000	=	»	»	»	20.	»	»	= 1520000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	21.	»	»	= 1640000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	22.	»	»	= 1680000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	23.	»	»	= 1720000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	24.	»	»	= 1760000
1600	»	»	»	800000	=	»	»	»	25.	»	»	= 2520000
40000	»	»	»	20,000000	fl.	werden eingelöset mit						fl. 33,000000

Erläuterungen über die Auflösung dieser Aufgabe.

In jedem Jahre wird dieselbe Anzahl Lose gezogen, also in jedem Jahre 40 Serien à 40 Stücke, folglich im Kapitalsbetrage für 1600 Lose à 500 fl. von 800000 fl.

Da nach dem vorliegenden Verlosungsplane für jedes verloste Kapital die **einfachen** Zinsen für die Zeit, als dasselbe anliegt, zu berechnen kommen, und weder für das zu viel noch für das zu wenig Geleistete eine Interessenvergütung Statt finden soll, dieses selbst aber doch ausgeglichen werden muß, so suche man, wie viel in jedem Jahre mehr oder weniger vertheilt wird, als durch die bedungene fünfperzentige Verzinsung geleistet werden soll. Die betreffenden Resultate finden sich für jedes Verlosungsjahr in der ersten Spalte zur Linken einzeln und in Summe angegeben.

Die Anzahl der niedersten Treffer ist in dem vorliegenden Falle für jedes Verlosungsjahr auf **1000** angenommen worden, welche außer ihrem eingelegten Kapitale immer noch **2%** pro anno für die ganze Dauer des Anliegens bis zur Verlosung erhalten, bis sich auch diese nach der zwanzigsten Verlosung von selbst bedeutend erhöhen. Ferner erhalten **250** Treffer nach derselben Bedingung immer ihr eingelegtes Kapital mit **4%** Zinsen vermehrt wieder zurück. Die übrigen **350** Treffer abgetheilt nach der Anzahl **200, 80, 40, 20, 5, 2, 2, 1** erhalten die **eigentlichen** beständig steigenden **Gewinnste**.

Ist die bei jeder einzelnen Verlosung zu vertheilende Summe bekannt, so berechne man den Betrag, welcher den **1000** niedersten und den **250** nächst höheren Treffern zufällt, wähle sodann den höchsten und die beiden nächst vorhergehenden Treffer, und ziehe die Summe der diesen **1253** Treffer zufallenden Gebühren und Gewinnste von dem zu vertheilenden Betrage ab. Die Differenz ist offenbar jener Betrag, welcher unter die **347** noch übrigen Treffer zu vertheilen kommt. Diese Differenz theile man nach den Anweisungen der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung einestheils im Verhältnisse der Zahlen **200, 80, 40, 20, 5, 2,** anderntheils im Verhältnisse beliebig gewählter Zahlen, nach welchen die Gewinnste sich stufenweise erhöhen sollen, und die bei jeder andern Verlosung wieder anders gewählt werden können. Hierbei kommt noch zu bemerken, daß die Gewinnste so viel als möglich in runden oder wenigstens in ganzen Zahlen entfallen sollen. Aus dieser Ursache lasse man bei der Berechnung der minderen Gewinnste die im Quozienten aufgefundenen Einheiten und Bruchtheile weg, oder wenn einem solchen Quozienten nur ein kleiner Theil fehlt, um eine zunächst darauf folgende runde Zahl zu geben, so nehme man diese dafür. Berechnet man aus diesem Quozienten den Betrag für die dahin gehörige Anzahl Lose, und zieht diesen von der vorigen Differenz ab, so wird mittelst einer neuen Gesellschaftsrechnung der Gewinnst für die nächste Gattung von Treffern auf dieselbe Weise bestimmt u. s. w., bis die zuletzt erhaltene Differenz den Gewinn für die **2** letzten Treffer angibt.

Beispiel für das erste Verlosungsjahr.

Kapital **800000** fl.	fl.	**800000.**
5% Zinsen für Ein Jahr	„	**40000.**
3% „ „ „ „	„	**24000.**
Die zu vertheilende Summe	fl.	**864000.**

Es wird zu viel vertheilt um **24000** fl.

1000 Lose, à **510** fl., erfordern	fl.	**510000**
250 „ à **520** fl., „	„	**130000**
Man setze den höchsten Treffer	„	**10000**
jeden der zwei nächst niederen **5000** fl.	„	**10000**
so bekommen **1253** Treffer zusammen	fl.	**660000.**

Hieraus folgt, daß unter die noch übrigen **347** Treffer der Betrag von **204000** fl. zu vertheilen ist.

Nimmt man an, daß die Gewinnste bei den sechs übrigen Gattungen der Treffer sich verhalten sollen, z. B. wie **5 : 6 : 7 : 9 : 12 : 18**, so wäre die Gesellschaftsrechnung aufzulösen:

200 × **5** **80** × **6** **40** × **7** **20** × **9** **5** × **12** **2** × **18**	**204000.**	Hieraus würde sich ergeben, daß der auf jeden der **200** Treffer fallende Antheil **500** fl. beträgt, welcher offenbar zu klein ist, indem dieser doch größer als **520** seyn muß. Daher wähle man für diesen Fall auch den Antheil von jedem dieser Treffer, z. B. **540** fl., was aber in den spätern Fällen nicht mehr nothwendig ist.

Die **200** Treffer, à **540** fl., erfordern **108000** fl., folglich bleiben für die noch übrigen **147** Treffer **96000** fl. zu vertheilen. Man löse sonach die Gesellschaftsrechnung auf:

80 × **6** **40** × **7** **20** × **9** **5** × **12** **2** × **18**	**96000.**	Hieraus erhält man für Einen Antheil von jedem der **80** Treffer den Betrag von **555** fl. mit einem Bruchtheile, wofür man **550** wählt.

80 Treffer, à **550** fl., erfordern **44000** fl. Es bleiben sonach noch **52000** fl. zu vertheilen. Man löse daher die Aufgabe auf:

40 × **7** **20** × **9** **5** × **12** **2** × **18**	**52000.**	Diesemnach sollte jedem der **40** Treffer der Betrag von **654** fl. mit einem Bruchtheile zugewendet werden, wofür man besser **650** fl. wählt.

40 Treffer, à **650** fl., erfordern **26000** fl. Es bleiben sonach für die noch übrigen **27** Treffer noch **26000** fl. übrig. Die entsprechende Vertheilung erfolgt durch die Auflösung der Aufgabe:

20 × **9** **5** × **12** **2** × **18**	**26000.**	Hieraus erhält man für jeden der **20** Treffer **847** fl. mit einem Bruchtheile, wofür wir **860** wählen wollen.

20 Treffer, à **860** fl., erfordern **17200** fl., und es bleiben noch zu vertheilen **8800** fl., was dadurch geschieht, daß man die Aufgabe löset:

5 × **12** **2** × **18**	**8800.**	Hierdurch findet man für jeden der **5** Treffer den Betrag von **1100** fl., folglich bleiben für jeden der beiden letztern **1650** fl.

Vergleicht man die Differenzen zwischen den nach jedem Jahre zu vertheilenden Beträgen, so findet man diese in den erstern Jahren, dem Verlosungsplane gemäß, verschieden, daher auch für diese Jahre die Bestimmung der Gewinnste bei jeder Verlosung besonders erfolgen muß. Nach dem sechsten bis zum inclusive zwanzigsten Jahre wird die zu vertheilende Summe mit jedem Jahre um die beständige Differenz **36000** fl. vermehrt. Vertheilt man diese Differenz, so wird man finden, daß, da nach dem Verlosungsplane auf jedes von **1000** Losen der Betrag von **10** fl., auf jedes von **250** der Betrag von **20** fl. fällt, was zusammen **15000** fl. ausmacht, die noch übrigen **21000** fl. auf die noch andern **350** Treffer zu vertheilen sind, und man findet, daß dieser Bedingung Genüge geleistet wird, wenn die Erhöhung des Gewinnstes

bei jedem der	200	Treffer	50	fl.,	zusammen	fl.	10000
" " "	80	"	50	"	"	"	4000
" " "	40	"	50	"	"	"	2000
" " "	20	"	70	"	"	"	1400
" " "	5	"	200	"	"	"	1000
" " "	2	"	300	"	"	"	600
" " "	2	"	500	"	"	"	1000,
und endlich beim Haupttreffer					"	"	1000 beträgt.

Fährt man daher nach der früher angegebenen Methode bis zum sechsten, und noch besser bis zum siebenten Jahre fort, so braucht man von hier an bis inclusive zum zwanzigsten Jahr nur die früheren Gewinnste um die beziehungsweise Differenz zu erhöhen, um die nach jeder spätern Verlosung erforderlichen Gewinnste zu erhalten.

Vom 21sten bis zum 24sten Jahre inclusive wächst nach dem Verlosungsplane die zu vertheilende Summe nach jedem Jahre um 40000 fl., was für 1000 Treffer, à 10 fl., und für 250 Treffer, à 20 fl., wie früher 15000 fl. gibt, wornach auf die 350 noch übrigen Treffer 25000 fl. entfallen. Dieser Bedingung wird entsprochen, wenn das Steigen der Treffer nach jedem Jahre beträgt:

200	Treffer	um	50	fl.,	zusammen	um	10000 fl.
80	"	"	50	"	"	"	4000 "
40	"	"	50	"	"	"	2000 "
20	"	"	100	"	"	"	2000 "
5	"	"	400	"	"	"	2000 "
2	"	"	500	"	"	"	1000 "
2	"	"	1000	"	"	"	2000 "
1	"	"	2000	"	"	"	2000 "
					Zusammen	. . .	25000 fl.

Es sind daher auch vom 22sten bis zum 24sten Jahre diese stufenweise erhöhten Gewinnste gegen die Gewinnste vom 21sten Jahre aufgeführt.

In Hinsicht des Überganges vom 20sten zum 21sten Jahre beläuft sich der Mehrbetrag zur Vertheilung auf 120000 = 3 × 40000 fl., aus welcher Ursache auch die Erhöhungen der Gewinnste auf das Dreifache der letzterwähnten anwachsen, und beziehungsweise um 30, 60, 150, 150, 150, 300, 1200, 1500, 3000 und 6000 größer, als im 20sten Jahre sind.

Die Differenz zwischen den zu vertheilenden Beträgen vom 24sten zum 25sten Jahre beläuft sich auf 760000 = 19 × 40000 fl., aus welcher Ursache auch die Erhöhung der Gewinnste auf das 19fache der Erhöhungen wegen 40000 fl. anwachsen, und beziehungsweise 190, 380, 950, 950, 950, 1900 u. s. w. betragen. Eine kleine Abweichung findet zur besseren Ausgleichung bei den 10 Haupttreffern Statt.

Sechzehnter Abschnitt.

Von der Kombinazionslehre.

§. 215. Der Gegenstand der Kombinazionslehre ist die Ordnung und Zusammenstellung mehrerer als zusammengehörig gedachter Dinge zu untersuchen.

Alles was im Nebeneinanderseyn, oder in der Aufeinanderfolge als zusammengehörig gedacht wird, nennt man eine Gruppe oder Komplexion. Jeder einzelne Bestandtheil heißt ein Element. Aus gegebenen Elementen Gruppen zusammensetzen, heißt Kombiniren im weitesten Sinne des Wortes. Hieraus folgt, daß die Kombinazionslehre folgende drei Hauptoperazionen in sich begreift:

A. Die verschiedenen Ordnungen anzugeben, in die eine bestimmte Anzahl Elemente gebracht werden kann. Dieses heißt Permutiren.

B. Die verschiedenen Zusammenstellungen zu zwei, drei oder mehreren Elementen angeben. Hier kann verlangt werden, daß jede Gruppe aus anderen Elementen bestehe. Dieses nennt man Kombiniren im engeren Sinne des Wortes.

C. Man kann aber solche Gruppen als neue ansehen, die aus denselben Elementen nur in verschiedener Ordnung zusammengesetzt sind, und kann auch die Aufstellung dieser verlangen. Diese Operazion heißt das Variren.

§. 216. Die Elemente selbst bezeichnet man entweder durch Buchstaben, oder was oft viel zweckmäßiger ist, durch Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung, so daß **1** das erste, **2** das zweite Element, u. s. w. bedeutet. So z. B. wird **514** eine Gruppe aus dem fünften, ersten und vierten Elemente bedeuten. Diese Zahlen heißen Zeiger (indices) der Elemente, und sind von den dekadischen Zahlen wohl zu unterscheiden.

§. 217. Eine Komplexion heißt gut geordnet, wenn ihre Elemente so stehen, daß das niederste den ersten Platz einnimmt, und jedes andere einen um so späteren, ein je höheres es ist, so daß das höchste als letztes zu stehen kommt.

Sind zwei Komplexionen aus denselben Elementen oder derselben Anzahl von Elementen zusammengesetzt, so heißt jene die höhere, welche, als Zahl ausgesprochen, einen höhern numerischen Werth hätte. So ist z. B. die Komplexion **235164** höher als **231654**; diese wieder höher, als **231456**, aber alle drei sind niedriger als **321**. Hat man Buchstaben statt Ziffer, so betrachtet man den im Alphabete später vorkommenden als den höheren.

A. Vom Permutiren.

§. 218. Mehrere Elemente promutiren, heißt diese Elemente in alle möglichen verschiedenen Ordnungen setzen. Dieses geschieht, wenn man erstlich alle diese Elemente gut geordnet hinschreibt. Um sodann die nächst höhere Komplexion zu erhalten, suche man die vom Anfange der Komplexion entfernteste Stelle auf, in welche ein höheres Element gesetzt werden kann, als bereits in ihr steht, setze das nächst höhere Element an diese Stelle, ohne

mit der vorhergehenden Stelle eine Änderung vorzunehmen, und besetze jede der nachfolgenden Stellen so niedrig als möglich. Auf diese Art fahre man fort, bis man zur höchsten Komplexion kommt, was dann der Fall ist, wenn der höchste Index den ersten, der niederste, den letzten Platz einnimmt, wornach die Operazion beendet ist.

(1) Gegebene Elemente.
a, b, c.

Permutazionen.

abc, bac, cab,
acb, bca, cba.

(2) Gegebene Elemente.
1, 2, 3.

Permutazionen.

123, 213, 312,
132, 231, 321.

(3) Gegebene Elemente.
a, b, c, d.

abcd, bacd, cabd, dabc,
abdc, badc, cadb, dacb,
acbd, bcad, cbad, dbac,
acdb, bcda, cbda, dbca,
adbc, bdac, cdab, dcab,
adcb, bdca, cdba, dcba.

(4) Gegebene Elemente.
1, 2, 3, 4.

1234, 2134, 3124, 4123
1243, 2143, 3142, 4132
1324, 2314, 3214, 4213
1342, 2341, 3241, 4231
1423, 2413, 3412, 4312
1432, 2431, 3421. 4321.

(5) Gegebene Elemente.
a, b, b, c.

Permutazionen.

abbc, babc, bbca, cabb,
abcb, bacb, bcab, cbab,
acbb, bbac, bcba, cbba.

(6) Gegebene Elemente.
1, 2, 2, 3.

Permutazionen.

1223, 2123, 2231, 3122,
1232, 2132, 2312, 3212,
1322, 2213, 2321, 3221.

(7) Man bilde die **120** Permutazionen aus den Elementen (**a, b, c, d, e**)
(8) Man bilde die **60** Permutazionen aus den Elementen (**a, b, b, c, d**)
(9) Man bilde die **60** Permutazionen aus den Elementen (**1, 2, 3, 3, 4**)
(10) Man bilde die **56** Permutazionen aus den Elementen
(**1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3**).

§. 219. Oftmals ist es erforderlich, aus den gegebenen Elementen die Anzahl der Zusammensetzungen zu bestimmen, ohne diese selbst zu machen. Hierbei hat man zu berücksichtigen, ob die Elemente alle von einander verschieden sind, oder ob einige davon gleich sind.

Betrachtet man den ersten Fall, daß nämlich alle Elemente von einander verschieden sind, so zeigt sich:

Ein einziges Element kann nur Einmal gesetzt werden.

Zwei Elemente können auf zweierlei Weise permutirt werden, **ab** und **ba**.

Sind drei Elemente zu permutiren, so kann jedes derselben den ersten Platz einnehmen, während die beiden andern in zwei verschiedenen Stellungen nachfolgen können. Es muß daher jedes der **3** Elemente zweimal den ersten Platz einnehmen, folglich wird es zusammen **6** verschiedene Komplexionen geben. (Siehe Beispiel **1** und **2**).

Bei vier Elementen muß es **6** verschiedene Stellungen geben, wo Ein und dasselbe Element den ersten Platz einnimmt, weil die **3** andern Elemente **6**mal verschieden gestellt, nachfolgen können. Es geben daher **4** Elemente **4** mal **6**, oder **24** verschiedene Stellungen.

Werden die Schlüsse auf diese Weise fortgesetzt, so wird man bald finden, daß 5 Elemente 24×5 oder 120; 6 Elemente 120×6 oder 720 Permutazionen geben u. s. w., daß also n Elemente nmal so viele Permutazionen geben, als (n—1) Elemente.

Drückt man durch das Symbol P_n die Zahl der Permutazionen von n Elementen aus, also das für n—1 Elementen durch P_{n-1}, so wird man finden, daß $P_n = n.P_{n-1}$, also auch $P_n = 1.2.3.4 \ldots\ldots (n-1)n$.

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n, wird von den Mathematikern der neueren Zeit sehr bequem durch n! ausgedrückt, so daß $P_1 = 1!$ $P_2 = 2!$, $P_3 = 3!$ und allgemein $P_n = n!$ dargestellt wird.

Betrachtet man den zweiten Fall, welchem zur Folge unter den gegebenen Elementen zwei oder mehrere gleiche vorkommen, so findet man in den Beispielen 5 und 6, daß bei 4 Elementen, worunter 2 gleiche sind, nicht 24, sondern blos 12 verschiedene Permutazionen erhalten werden. Daß dieß so geschehen muß, wird man sich leicht überzeugen, wenn man das andere der beiden gleichen Elemente auf irgend eine andere Weise, z. B. mit β bezeichnet, und die den Elementen (a, b, β, c) entsprechenden Permutazionen aufstellt; man erhält sonach:

				oder β wieder	gleich b	gesetzt.	
abβc,	baβc,	βabc,	cabβ,	abbc,	babc	babc,	cabb,
abcβ,	bacβ,	βacb,	caβb,	abcb,	bacb,	bacb,	cabb,
aβbc,	bβac,	βbac,	cbaβ,	abbc,	bbac,	bbac,	cbab,
aβcb,	bβca,	βbca,	cbβa,	abcb,	bbca,	bbca,	cbba,
acbβ,	bcaβ,	βcab,	cβab,	acbb,	bcab,	bcab,	cbab,
acβb,	bcβa,	βcba,	cβba.	acbb,	bcba,	bcba,	cbba.

Es muß daher, wenn unter mehreren gegebenen Elementen 2 gleiche vorhanden sind, jede Komplexion zweimal vorkommen, woraus folgt, daß P_n bei zwei gleichen, und nur bei zwei gleichen, Elementen gleich $\frac{n!}{2}$ ist, was der Gleichfömigkeit wegen auch so dargestellt werden kann, gleich $\frac{n!}{2!}$

Nehmen wir an, es sollen unter mehreren, z. B. 5 gegebenen Elementen 3 gleich seyn; unterscheiden wir diese wieder, und stellen alle 120 Permutazionen auf, so finden wir darunter je 6 und 6 einander gleich, woraus man zu den Schluß berechtigt ist, daß $P_5 = \frac{5!}{6} = \frac{5!}{2 \cdot 3} = \frac{5!}{3!}$; also auch, daß, wenn unter n Elementen drei gleiche sind, die Permutazionszahl durch $\frac{n!}{3!}$, folglich, wenn unter n Elementen α gleiche sind, durch $\frac{n!}{\alpha!}$ ausgedrückt werden kann.

Sind unter n Elementen nebst α gleichen noch β andere gleiche Elemente vorhanden, so muß dann die Anzahl der Permutazionen $= \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$ seyn, und allgemein sind unter n Elementen α gleiche, ferner β andere gleiche, dann wieder

γ andern gleiche u. s. w., so wird die Anzahl der Permutazionen durch $\frac{n}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\text{ u.s.w.}}$ dargestellt werden können.

Oftmals pflegt man die Komplexion, von der die Anzahl aller Permutazionen angegeben werden soll, einzuklammern, und das Symbol **P** vorzuschreiben. So ist $P\,(abc) = 3! = 6$; $P\,(uxyz) = 4! = 24$; $P\,(abcdef) = 6! = 720$. Statt $P\,(abbc)$ schreibt man besser $P\,(ab^2c) = \frac{4!}{2!} = 12$.

Es sollen die Anzahlen für folgende Kombinazionsfälle angegeben werden.

$$(11)\ P\,(a^2b^2c^2) = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90.$$

$$(12)\ P\,(a^m) = \frac{m!}{m!} = 1$$

$$(13)\ P\,(a^{m-1}) = \frac{(m-1)!}{(m-1)!} = 1$$

$$(14)\ P\,(a^{m-1}b^3) = \frac{(m+2)!}{(m-1)!\,3!} = \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}$$

$$(15)\ P\,(a^{m-n}b^n) = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

$$(16)\ P\,(a^3b^5c^7d^9) = \frac{24!}{3!\,5!\,7!\,9!}$$

$$(17)\ P\,(a^{m+n-p}b^{p-n}) = \frac{m}{(m+n-p)!\,(p-n)!}$$

(18) Wie viele verschiedene Stellungen sind bei **12** Kugeln möglich, wenn sechs von diesen roth, **3** weiß, **2** grün, und **1** schwarz ist?

$$P_{12} = \frac{12!}{6!\,3!\,2!\,1!} = 55440.$$

B. Vom Kombiniren.

§. 220. Gegebene Elemente kombiniren (im engeren Sinne des Wortes) heißt alle möglichen verschiedenen Gruppen in bestimmter Anzahl dieser Elemente aus ihnen bilden.

Die aus zwei Elementen bestehenden Gruppen heißen Amben, die aus drei Ternen, die aus vier Quaternen (oder Verbindungen zu vier), und allgemein aus n Elementen, Verbindungen zu n.

Darf in einer solchen Gruppe ein Element öfters vorkommen, so heißt sie eine Kombinazion mit Wiederholungen; ist dieß nicht der Fall, eine Kombinazion ohne Wiederholungen, oder blos eine Kombinazion.

§. 221. Um die Amben, Ternen u. s. w., mit und ohne Wiederholungen aus gegebenen Elementen zu bilden, verfährt man auf eine ähnliche Weise,

wie bei den Permutazionen, indem man immer von einer Komplexion zur nächst höheren übergeht.

(19) Es sollen von den Elementen (a, b, c) und (20) von den Elementen (1, 2, 3) die Amben (a) ohne, (b) mit Wiederholungen angegeben werden.

(19, a)	(19, b)	(20, a)	(20, b)
ab, ac, bc	aa, bb, cc	12, 23	11, 22, 33,
	ab, bc	13	12, 23,
	ac		13.

(21) Es sollen von den Elementen (a, b, c, d), und (22) von den Elementen (1, 2, 3, 4, 5) die Amben (a) ohne, (b) mit Wiederholungen angegeben werden.

(21, a)	(21, b)	(22, a)	(22, b)
ab, bc, cd,	aa, bb, cc, dd,	12, 23, 34, 45,	11, 22, 33, 44, 55,
ac, bd,	ab, bc, cd,	13, 24, 35,	12, 23, 34, 45,
ad.	ac, bd,	14, 25,	13, 24, 35,
	ad.	15.	14, 25,
			15.

§. 222. Um die Anzahl der Amben von n Elementen ohne Wiederholungen aufzufinden, wird es zweckdienlich seyn, die Aufgabe zu lösen: Man soll zu n Elementen (a, b, c, d........x, y, z,) alle Amben aufstellen.

Ganz gewiß wird man alle aus verschiedenen Elementen zusammengesetzte Amben erhalten, wenn man zuerst a mit allen Elementen verbindet, dann b, dann c u. s. f., jedes spätere mit allen gegebenen, zuletzt also auch x, y, z, nur mit sich selbst nicht. Hierdurch erhält man:

ab, ac, ad, ae, ...ax, ay, az,
ba, bc, bd, be, ...bx, by, bz,
ca, cb, cd, ce, ...cx, cy, cz,
ya, yb, yc, yd, ... yx, yz,
za, zb, zc, zd, ... zx, zy.

Durch dieses Verfahren erhält man so viele Horizontalreihen, als Elemente da sind, d. h. n; in jeder Horizontalreihe aber sind (n—1) Amben. Jeder Ambo kommt aber zweimal vor, z. B. ab erstlich durch die Zusammenstellung der Elemente a und b, und durch die Zusammenstellung der Elemente b und a, und so durchgehends. Es ist also die Gesammtzahl aller verschiedenen Amben, die Hälfte des Produktes n (n—1), oder gleich $\frac{n(n-1)}{2}$.

Will man alle Ternen von n Elementen bilden, so verfährt man am sichersten, wenn man jeden möglichen Ambo mit allen Elementen verbindet, außer mit denen, die in dem wirklich zu verändernden Ambo schon vorhanden sind. Sonach erhält man aus denselben Elementen a, b, c, d......x, y, z, die Ternen.

abc, abd, abe,........abx, aby, abz,
acb, acd, ace,.........acx, acy, acz,
. . . .
bca, bcd, bce,.........bcx, bcy, bcz,
. . . .
cda, cdb, cde,........cdx, cdy, cdz,
⋮ ⋮
zxa, zxb, zxc,..........................zxy
zya, zyb, zyc,.........................zyx.

Durch dieses Verfahren erscheinen offenbar so viele Horizontalreihen, als Amben von n Elementen möglich sind, also $\frac{n(n-1)}{1.2}$. In jeder Reihe kommen (n—2) Ternen vor. Es ist sonach die Anzahl dieser Ternen $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.}$

Da aber jeder Terno 3mal vorkommt, z. B. die Terne abc aus dem Ambo ab mit c, aus dem Ambo ac mit b, und aus dem Ambo bc mit a, so wird die früher gefundene Anzahl aller Ternen, um nur die unter einander verschiedenen Ternen zu erhalten, durch 3 zu dividiren seyn.

Es ist sonach die Anzahl der verschiedenen Ternen gleich $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

Wählt man für die Kombinazionszahlen allgemeine Bezeichnungen, so daß $\binom{n}{r}$ die Anzahl aller möglichen Verbindungen von n Dingen zu r Elementen bedeutet, (was gelesen zu werden pflegt n über r), so hat man dem Frühern zur Folge $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1.2}$; $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; folglich auch auf dieselbe Weise:

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.};\ \binom{n}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

u. s. w. Es ist sonach auch

$$\binom{n}{12} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-10)(n-11)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ldots\ 11.\ 12},$$ und allgemein:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots[n-(r-2)][n-(r-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(r-1)\ r}$$

§. 223. Um die Kombinazionen mit Wiederholungen und die Anzahl derselben leichter zu erhalten, verbindet man bei denselben Elementen a, b, c, d, ...x, y, z jedes Element mit sich selbst, und mit jedem von den n gegebenen Elementen, sich selbst nicht ausgeschlossen, sonach erhält man:

aa, aa, ab, ac, ad.......ax, ay, az,
bb, ab, bb, bc, bd.......bx, by, bz,
cc, ac, bc, cc, cd........cz, cy, cz,
dd, ad, bd, cd, dd.......dx, dy, dz,
⋮ ⋮
zz, az, bz, cz, dz.......xz, yz, zz.

Auf diese Weise erhält man wieder n Reihen, in jeder Reihe aber (n+1) Amben. Jede Ambe kommt aber 2mal vor. Es ist sonach die Anzahl aller verschiedenen Amben mit Wiederholungen von n Elementen gleich $\frac{n(n+1)}{2}$.

Um nun die Ternen zu erhalten, nehme man jede der verschiedenen Amben, verbinde sie mit den Elementen, die in der Ambe sind, und dann mit allen n Elementen, und setze diese Ternen in eine Horizontalreihe. Hierdurch erhält man (n+2) Ternen in einer Reihe, Reihen aber offenbar so viele, als Amben möglich waren, $\frac{n(n+1)}{1.2}$. Es ist sonach die Anzahl aller so gebildeten

Ternen $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.}$. Da aber jede Terne dreimal vorkommt, so ist die Anzahl aller verschiedenen Ternen mit Wiederholungen bei **n** Elementen $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$

Eben so findet man für die Verbindungen zu vier Elementen $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ u. s. w., und allgemein für die Verbindungen zu r Elementen die Form

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots\ldots\ldots[n+(r-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ r}$$

(23) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen u. s. w. sind (a) ohne, (b) mit Wiederholungen bei 12 Elementen möglich?

(24) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen u. s. w. sind (a) ohne, (b) mit Wiederholungen aus den Elementen aabbbccdf möglich?

C. Vom Variren.

§. 224. Variazionen sind Kombinazionen, wobei zugleich auf die Stellung der Elemente gesehen wird, so daß dieselben Elemente einer Kombinazion, verschieden gestellt, eine neue Variazion derselben Klasse geben. Die Variazionsklasse benennt man nach der Menge der Elemente. Auch hier kann man Variazionen ohne oder mit Wiederholungen unterscheiden.

§. 225. Die Anzahl der Komplexionen, die beim Variren ohne Wiederholungen erhalten werden, ergibt sich aus Folgendem: Es ist bekannt, daß n Elemente $\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}$ Amben geben. Da aber jede Ambe zwei verschiedene Stellungen zuläßt, so muß die Anzahl der Variazionen der zweiten Klasse bei n Elementen ohne Wiederholungen $n(n-1)$ seyn.

Werden n Elemente zu Ternen kombinirt, so erhält man $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$ verschiedene Ternen; jede Terne aber läßt $1.2.3=6$ verschiedene Stellungen zu, also ist die Anzahl der Variazionen in der dritten Klasse bei n Elementen ohne Wiederholungen gleich $n(n-1)(n-2)$.

Auf dieselbe Weise findet man die Anzahl der Variazionen der vierten Klasse bei n Elementen ohne Wiederholungen gleich $n(n-1)(n-2)(n-3)$; und allgemein die Anzahl der Variazionen der rten Klasse bei n Elementen ohne Wiederholungen gleich $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots.[n-(r-1)]$.

§. 226. Um die Anzahl der Variazionen mit Wiederholungen zu erhalten, seyen a, b, c,......x, y, z die gegebenen n Elemente. Man verbinde a mit sich selbst und mit allen übrigen Elementen, und setze bei den Verbindungen überall a voraus. Alle diese Verbindungen, deren Anzahl n seyn wird, setze man in eine Reihe. Verfährt man mit jedem andern gegebenen Elemente auf dieselbe Weise, so erhält man für jedes derselben eine neue Reihe von n Gliedern. Sonach hat man n solche Reihen. Es ist daher die Anzahl aller Variazionen der zweiten Klasse gleich $n \times n = n^2$.

Um die Anzahl der Variazionen der dritten Klasse zu erhalten, verbinde man jede Variazion der zweiten Klasse mit allen Elementen, und setze die-

se nach. Dadurch erhält man in einer Reihe n Variazionen. Die Anzahl der Reihen aber ist n^2: folglich ist die Anzahl aller Variazionen der dritten Klasse mit Wiederholungen gleich $n \cdot n^2 = n^3$.

Auf dieselbe Weise findet man, daß die Anzahl aller Variazionen der vierten Klasse gleich $n \cdot n^3 = n^4$, und allgemein, daß die Anzahl aller Variazionen der rten Klasse mit Wiederholungen bei n Elementen gleich $n . n^{r-1} = n^r$ seyn muß.

Man pflegt die Anzahl der Variazionen durch das Symbol V auszudrücken, und schreibt rechts oberhalb die Klasse an. Sind auch Wiederholungen verlangt, so wird dieses durch ein zugesetztes kleines w angezeigt. Die Anzahl der Elemente, von denen die Variazionszahl angegeben werden soll, schreibt man hinter das Symbol, oder man schreibt die Elemente selbst hin, welche aber im letzteren Falle eingeklammert werden müssen.

§. 227. Die Bildung der Variazionen geschieht, indem man wie beim Kombiniren, von jeder Komplexion zur nächst höheren übergeht.

(25) $V^2 (1, 2, 3) = 3.2 = 6$; nämlich 1.2; 1.3; 2.1; 2.3; 3.1; 3.2.

(26) $\overset{2,\,w}{V}(1, 2, 3, 4) = 4^2 = 16$; nämlich
1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 2.1; 2.2; 2.3; 2.4; 3.1; 3.2; 3.3; 3.4; 4.1; 4.2; 4.3; 4.4.

Anmerkung. Wer sich über die Kombinazionslehre ausführliche Kenntnisse verschaffen will, den verweisen wir auf das Werk:
Die kombinatorische Analysis vom Professor Andreas von Ettingshausen, Wien 1826, bei J. B. Wallishausser.

Siebenzehnter Abschnitt.

Von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

§. 228. Die mathematische Wahrscheinlichkeit oder Probabilität irgend eines Ereignisses ist das Verhältniß der das Ereigniß begünstigenden zu allen gleich möglichen Fällen, und wird durch einen Bruch ausgedrückt, in welchem diese beiden Zahlen beziehungsweise den Zähler und Nenner bilden. So ist die Wahrscheinlichkeit (W) mit einem gewöhnlichen Würfel Eine der sechs Zahlen, z. B. die Zahl drei zu werfen $= \frac{1}{6}$; jene, irgend einen von den beiden Zahlen 2 oder 3 zu werfen, $= \frac{2}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit wird daher um so größer, je mehr sich der die **W** ausdrückende Bruch der Einheit nähert. Kann von allen möglichen Fällen keiner dem Ereignisse ungünstig seyn, so wird die **W** zur Gewißheit. Für diesen Fall werden die Zähler und Nenner des die **W** ausdrückenden Bruches gleich, folglich ist dieser Bruch = 1.

Die Einheit ist sonach das Symbol der Gewißheit.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß nicht, sondern daß das Gegentheil davon eintreffe, heißt die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit des erwarteten Ereignisses, und muß, zur Wahrscheinlichkeit des Ereignisses addirt, die Einheit geben, weil es gewiß ist, daß dieses Ergebniß entweder eintrifft oder nicht eintrifft. Nimmt man z. B. die 8 Karten von derselben Farbe, z. B. die Coeurs, und zieht Eine davon auf Gerathewohl heraus, so ist die Wahrscheinlichkeit, das Aß, oder überhaupt irgend eine bestimmte Karte zu ziehen $= \frac{1}{8}$; die **W**, daß man irgend eine Figur ziehen wird, gleich $3/8$; die entgegengesetzte **W**, oder die, daß man das Aß nicht zieht $= 7/8$; daß man keine Figur zieht $= 5/8$. Diese

beiden beziehungsweisen Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{8}+\frac{7}{8}$, und $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$ sind gleich Eins, wie dieß auch seyn muß.

Anmerkung. Ist die Wahrscheinlichkeit irgend eines Ereignisses $>\frac{1}{2}$, so hat dieses eine absolute Wahrscheinlichkeit für sich, und man sagt daher auch im gemeinen Leben schon, daß das Eintreffen desselben wahrscheinlich sey. Befinden sich z. B. in einem Topfe 90 weiße und 10 schwarze Kugeln von übrigens ganz gleicher Beschaffenheit, so wird niemand anstehen, dem Resultate des Probabilitätskalküls beizupflichten, nach welchem es wahrscheinlich ist, daß man auf den ersten Zug eher eine weiße als eine schwarze Kugel ziehen wird: für die weiße Kugel ist nämlich die $W=\frac{90}{100}$, für die schwarze $=\frac{10}{100}$. Obgleich dieses Ergebniß nicht so zu verstehen ist, als könnte man beim ersten oder zweiten Hineingreifen in den Topf nicht auch statt der weißen eine schwarze Kugel ziehen, so ist es doch ausgemacht, daß z. B. unter 100 Versuchen höchst wahrscheinlich öfter eine weiße als eine schwarze Kugel gezogen werden wird, und dieß ist der Sinn der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

§. 229. Außer dieser Wahrscheinlichkeit, welche auch die einfache oder absolute W heißt, unterscheidet man noch die relative und zusammengesetzte W. Unter der relativen W versteht man die W, welche entsteht, wenn man bloß jene Fälle, die zweien bestimmten Ereignissen günstig sind, ohne Rücksicht auf die noch übrigen möglichen Fälle, in Betrachtung zieht, z. B. aus einer Urne, welche weiße, rothe, blaue und schwarze Kugeln enthält, eher eine weiße als eine schwarze Kugel zu ziehen, wobei alle jene Fälle, in welchen man eine rothe oder blaue Kugel zieht, nicht entscheiden.

Unter der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit versteht man die W, daß zwei oder mehrere von einander unabhängige Ereignisse zusammen eintreffen werden; so wie auch die W eines Ereignisses, welches von dem Eintreffen eines oder mehrerer vorausgehender Ereignisse, die wieder ihre eigene W haben, abhängt oder bedingt wird. So ist z. B. die W mit 2 Würfel auf Einen Wurf den Pasch 66 zu werfen, eine zusammengesetzte; weil die Ereignisse mit dem einen Würfel die 6, und dann auch mit dem andern Würfel dieselbe Zahl zu werfen, zusammen eintreffen müssen. Theilt man die 32 Karten nach ihren 4 Farben in 4 Packete, so ist die W, das Coeur Aß zu ziehen, ebenfalls eine zusammengesetzte, weil man zuerst die Hand auf das rechte Packet legen, und dann erst aus diesem das Aß ziehen muß, welch letzteres Ereigniß gar nicht eintreffen kann, wenn nicht das erstere schon Statt gefunden hat.

Von der einfachen oder absoluten Wahrscheinlichkeit.

§. 230. Bezeichnen a und b die Anzahl der Fälle, welche beziehungsweise ein Ereigniß begünstigen oder demselben entgegen sind, so ist die W. für das Ereigniß $w=\frac{a}{a+b}$, und die entgegengesetzte W desselben, $w_1=\frac{b}{a+b}$.

Zerfällt das mögliche Resultat einer Handlung oder eines Versuches in mehr als zwei, z. B. in drei Klassen, so daß von drei verschiedenen Ereignissen nothwendig Eins eintreffen muß, und sind a Fälle dem ersten, b dem zweiten und c dem dritten Ereignisse günstig, so sind ihre W, wenn man $a+b+c=s$ setzt, beziehungsweise $w=\frac{a}{s}$, $w_1=\frac{b}{s}$ und $w_2=\frac{c}{s}$; zu gleich ist die Summe aus allen dreien $=\frac{a+b+c}{s}=1$, wie es auch seyn muß.

(1) Wie groß ist die **W** mit zwei Würfeln eine bestimmte Summe zu werfen?

Es können überhaupt die Summen **2**, **3** u. s. w. **11** und **12** fallen, die aber keineswegs alle dieselbe **W** haben. So können die Summen **2** und **12** nur auf Eine Art geworfen werden, indem jeder der beiden Würfel beziehungsweise **1** und **6** zeigen muß. Die Summe **6** dagegen kann schon auf **5** verschiedene durch die Kombinazionen **15**, **24**, **33**, **42**, **51** dargestellten Arten geworfen werden. Da nun überhaupt $6^2 = 36$ Fälle gleich möglich sind, indem sich die **6** Felder des einen Würfels mit allen **6** Feldern des andern verbinden lassen, so ist die Wahrsch., die Summe **2** oder **12** zu werfen, $= \frac{1}{36}$, dagegen ist für die Summen **3** und **11** die $W = \frac{2}{36}$, für **4** und **10** ist die $W \frac{3}{36}$, für die Summen **5** und **9** ist sie $\frac{4}{36}$, für **6** und **8** gleich $\frac{5}{36}$, für **7** gleich $\frac{6}{36}$. Nebenbei ist die Summe aller

$$W = \frac{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}{36} = 1,$$

wie es auch seyn soll.

(2) Man soll die **W**. finden, daß man mit **3** Würfeln a) die Summe **9** überhaupt werfe, b) daß sich darunter **2**, und nur **2**, gleiche Zahlen finden, c) daß alle **3** gleich sind, d) daß dabei der erste, zweite und dritte Würfel beziehungsweise die Zahlen **2**, **3** und **4** zeigt, e) daß diese **3** Zahlen ohne Rücksicht auf die Ordnung der Würfel fallen.

a) Da sich die Zahl **9** auf **28** verschiedene Arten zu **3** zerlegen und permutiren läßt, von welcher Anzahl jedoch der Natur der Sache nach die drei Komplexionen **117**, **171** und **711** ausgeschlossen bleiben, so sind dem fraglichen Ereignisse **25** Fälle günstig, während im Ganzen $6^3 = 216$ Fälle gleich möglich sind. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach $= \frac{25}{216}$.

117	216	315	414	513	612	711
126	225	324	423	522	621	
135	234	333	432	531		
144	243	342	441			
153	252	351				
162	261					
171						

b) Da der Fall mit drei gleichen Zahlen ausgeschlossen seyn soll, so können die zwei gleichen Zahlen nur **22** oder **44** seyn, also die dritte ungleiche Zahl beziehungsweise nur **5** oder **1**; da ferner diese dritte Zahl jeder der drei Würfel zeigen kann, so gibt es im Ganzen unter **216** möglichen nur $3 \times 2 = 6$ günstige Fälle, es ist demnach die gesuchte $W = \frac{6}{216}$.

c) Da die Summe **9** nur auf eine einzige Art mit **3** gleichen Zahlen (**333**) fallen kann, so ist für diesen Fall die $W = \frac{1}{216}$.

d) Auch in diesem Falle kann die **W** keine andere als $\frac{1}{216}$ seyn.

e) Da sich die Zahlen **2**, **3**, **4** sechsmal permutiren lassen, oder was dasselbe ist, da die Zahlen **2**, **3**, **4** ohne Unterschied der Würfel auf **6** verschiedene Arten fallen können, so ist für diesen Fall $W = \frac{6}{216}$.

(3) Man hat die **13** Blätter von Einer Farbe eines vollständigen Spieles von **52** Karten in Ein Packet gebracht, und gehörig gemischt. Wie groß ist die **W**, daß das oberste Blatt der König, und das nächste die Dame sey?

Die beiden obersten Blätter bilden (auf eine gleich mögliche Weise) eine der $\frac{13 \,.\, 12}{1 \,.\, 2} = 78$ Kombinazionen der **13** Blätter zu zwei, unter denen jene von König und Dame nur Einmal vorkommt; es ist also die **W**, daß ohne Rücksicht auf die Ordnung, das oberste Paar König und Dame sey

$=\frac{1}{78}$. Da aber bei einer bestimmten Ordnung dieser beiden Blätter die **W** nur halb so groß ist, so erhält man die gesuchte $W=\frac{1}{156}$, was man auch findet, wenn man berücksichtiget, daß jede von den **78** Kombinazionen noch **2** Permutazionen zuläßt, und daß unter diesen so verschiedenen Komplexionen nur Eine dem fraglichen Ereignisse günstig ist.

Von der relativen Wahrscheinlichkeit.

§. 231. Um die Regel für die relative **W.** sogleich in einem Beispiele zu entwickeln, soll die **W.** bestimmt werden, mit zwei Würfeln auf Einen Wurf eher die Summe **7**, als jene **5** zu werfen.

Nach dem Beispiele (**1**) gibt es für die Summen **7** und **5** beziehungsweise **6** und **4** günstige Fälle, und da es nach dem Sinne der vorliegenden Aufgabe **6+4** oder **10** gleich mögliche Fälle gibt, so sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten beziehungsweise $\frac{6}{10}$ und $\frac{4}{10}$, oder $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$. Da nun aber die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Summen **7** und **5** respektive $\frac{6}{36}$ und $\frac{4}{36}$ sind, so findet man die vorigen Resultate auch, indem man die betreffenden absoluten Wahrscheinlichkeiten, durch die Summe beider Wahrscheinlichkeiten dividirt. So erhält man für die Summe **7** die relative $W=\frac{6}{36}:\left(\frac{6+4}{36}\right)=\frac{6}{10}$, und für die Summe **5** die relative $W=\frac{4}{36}:\left(\frac{6+4}{36}\right)=\frac{4}{10}$, wie früher. — Auch ist hier die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten, der Natur der Sache gemäß, gleich der Einheit; weil es gewiß ist, daß man (weil die übrigen Summen unberücksichtiget bleiben) entweder eher die Summe **7** als jene **5**, oder umgekehrt, werfen wird.

Sind also allgemein **a** Fälle dem Ereignisse **A**, **b** dem Ereignisse **B**, **c** dem Ereignisse **C** u. s. w. günstig, und setzt man $a+b+c+\ldots\ldots=s$, so sind die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse **A**, **B**, **C** u. s. w. beziehungsweise $w=\frac{a}{s}$, $w_1=\frac{b}{s}$, $w_2=\frac{c}{s}$, ...; also die **W.**, daß **A** eher als **B** eintreffen werde, $=\frac{w}{w+w_1}=\frac{a}{a+b}$; und die entgegengesetzte **W.**, nämlich daß **B** eher als **A** eintrifft, $=\frac{w_1}{w+w_1}=\frac{b}{a+b}$, also auch hier wieder $w+w_1=1$. Eben so ist **W**, daß **A** eher als **C** eintritt, $=\frac{w}{w+w_2}=\frac{a}{a+c}$; jene, daß **B** eher als **C** eintrifft, $=\frac{w_1}{w_1+w_2}=\frac{b}{b+c}$.

Dem hier Erwähnten zur Folge ergibt sich: **Die relative W irgend eines Ereignisses wird erhalten, indem man die absolute W desselben durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten jener beiden Ereignisse, die gerade mit einander verglichen werden, dividirt.**

(**4**) Eine Urne enthält **6** weiße, **8** rothe, **14** blaue und **12** schwarze Kugeln. Wie groß ist die **W** auf Einen Zug eher eine weiße als eine schwarze Kugel zu ziehen?

Da die absolute **W** für das Ziehen einer weißen Kugel $= \frac{6}{40}$, jene eine schwarze zu ziehen $= \frac{12}{40}$ ist, so erhält man für die gesuchte relative **W** $w = \frac{6}{6+12} = \frac{1}{3}$, für die des Gegentheils $w_1 = \frac{12}{6+12} = \frac{2}{3}$; folglich auch $w + w_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} =$ Eins.

(5) Ein Spiel von **16** Karten, wovon immer **4** von derselben Farbe sind, wird unter **4** Spieler vertheilt, und dabei ist die letzte Karte Trumpf; wie groß ist die **W**, daß der Spieler **A**, welcher nicht Kartengeber ist, eher Einen, und auch nur Einen Trumpf, als **3**, und auch nur **3**, Karten von einerlei Farbe (z. B. **3** Coeurs) erhält?

Da, rücksichtlich des ersten Punktes der Frage, eigentlich nur **15** Karten ausgegeben werden, worunter sich **3** Trümpfe befinden, so kann **A** seine Karte auf $\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4}$, d. i. auf **1365** verschiedene Arten, erhalten. Da sich ferner nach Hinwegnahme der drei Trümpfe, die übrigen **12** Karten auf $\frac{12.11.10}{1.2.3}$, d. i. auf **220** verschiedene Arten, zu drei verbinden lassen, so gibt es **3**mal **220**, d. i. **660** Verbindungen zu vier, deren jede Einen, und auch nur Einen, Trumpf enthält, also auch eben so viele günstige Fälle. Es ist daher die absolute **W** für das erste Ereigniß $w = \frac{660}{1365} = \frac{44}{91}$.

Da sich ferner (rücksichtlich des zweiten Punktes kommen alle **16** Blätter in Rechnung) die **16** Blätter auf $\frac{16.15.14.13}{1.2.3.4}$ oder auf **1820** Arten zu **4** verbinden lassen, und unter diesen Verbindungen **192** mit **3** gleichen und Einer verschiedenen Farbe enthalten sind, so ist die absolute **W** für das zweite Ereigniß $\frac{192}{1820}$ oder $\frac{48}{455}$. Es ist also die gesuchte relative

$$W = \frac{w}{w+w_1} = \frac{220}{220+48} = \frac{55}{67}.$$

Anmerkung. Die vier Coeurs z. B. lassen sich $\frac{4.3.2}{1.2.3}$ oder 4mal zu 3 verbinden, und jede dieser Komplexionen gibt mit jeder der 12 übrigen Karten eine Verbindung zu 4 von der verlangten Eigenschaft, also gibt es 4×12 oder 48 Verbindungen, deren jede 3 Coeurs und eine andere Farbe enthält. Da aber dasselbe auch, wie von Coeurs, für jede der drei übrigen Farben gilt, so gibt es in der That 4×48, d. i. 192 günstige Fälle, wie bei der Auflösung erwähnt wurde.

Von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.

§. 232. Um die **W** für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse **A** und **B**, denen beziehungsweise **a** und a_1 Fälle günstig, **b** und b_1 Fälle entgegen seyn sollen, welche also die absoluten Wahrscheinlichkeiten $w = \frac{a}{a+b}$ und $w_1 = \frac{a_1}{a_1+b_1}$ besitzen, zu finden; so gibt es, da die **a** günstigen Fälle des ersten, und die a_1 günstigen Fälle des zweiten Ereignisses aa_1 Verbindungen geben, also beide Ereignisse auf aa_1 verschiedene Arten zusammentreffen kön-

nen, auch eben so viele günstige Fälle. Da ferner im Ganzen $(a+b)(a_1+b_1)$ Fälle auf eine gleich mögliche Art Statt finden können, so ist die gesuchte **W** für das Zusammentreffen beider Ereignisse $W = \frac{aa_1}{(a+b)(a_1+b_1)} = ww_1$.

Auf gleiche Weise findet man, daß, wenn w, w_1, w_2......beziehungsweise die einfachen Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A, B, C u. s. w. sind, sofort die **W** für das Zusammentreffen aller dieser Ereignisse $W = ww_1 w_2......$, d. i. gleich dem Produkte der einfachen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse ist.

(6) Welche **W** hat man, daß man mit einem gewöhnlichen Würfel irgend eine Zahl, z. B. die Zahl 6, mehreremal hinter einander werfen werde?

Hier ist die einfache **W**, die Zahl 6 zu werfen, $= \frac{1}{6}$, mithin die zusammengesetzte **W**, daß diese Zahl 2, 3, ... m mal hinter einander falle, beziehungsweise $\frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{6^2}$; $\frac{1}{6} . \frac{1}{6} . \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3}$, ... endlich $\frac{1}{6^m}$.

(7) Es soll die **W** bestimmt werden, für den Fall, als verlangt wird, aus den nach den 4 Farben in 4 Packete getheilten 32 Karten (ohne zu wissen, von welcher Farbe irgend ein Packet ist) das Coeur Aß zu ziehen.

Die Wahrscheinlichkeit, die Hand auf das Packet der Coeurs zu legen, ist $\frac{1}{4}$, folglich die gesuchte **W** für das zusammengesetzte Ereigniß $\frac{1}{4} . \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. Dasselbe Resultat erhält man auch aus der mit der vorliegenden identischen Aufgabe, die einfache **W** zu bestimmen, aus einem wohlgemischten Spiele das Coeur Aß zu ziehen.

(8) Wie groß ist die **W**, daß man aus einem gut gemischten Spiele von 32 Karten in zwei auf einander folgenden Zügen Aß und König von derselben Farbe in beliebiger Ordnung ziehen werde?

Die **W**, auf dem ersten Zuge das Aß der bestimmten Farbe zu ziehen, ist $= \frac{1}{32}$, die **W** hierauf den König derselben Farbe zu ziehen, ist $\frac{1}{31}$, folglich ist die **W**, daß beides in dieser angeführten Ordnung eintreffen werde, $= \frac{1}{32 . 31} = \frac{1}{992}$. Da aber die Ordnung willkürlich seyn kann, also auch jener Fall, in welchem zuerst der König und dann das Aß gezogen wird, ein günstiger ist, so ist die gesuchte zusammengesetzte **W** doppelt so groß, oder sie ist $= \frac{1}{496}$; und da endlich auch die Farbe nicht bestimmt ist, also dieses Ereigniß in allen 4 Farben eintreten kann, so hat man zuletzt für die zusammengesetzte **W** dieses Ereignisses $w = 4 . \frac{1}{496} = \frac{1}{124}$.

Eben dieses Resultat erhält man aber auch auf folgendem Wege: Die 32 Karten können auf $\frac{32.31}{1.2}$ Arten zu zwei verbunden werden, worunter aber dem fraglichen Ereignisse nur 4 Kombinazionen, nämlich jene günstig sind, in welchen Aß und König von gleicher Farbe beisammen liegen. Man hat daher für die einfache Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses $\frac{4 . 1 . 2}{32 . 31} = \frac{1}{124}$.

(9) Was hat man bei der gewöhnlichen Zahlenlotterie, in welcher von 90 Numern 5 gehoben werden, für eine Wahrscheinlichkeit, daß von 2 besetzten Numern wenigstens Eins herauskomme?

Die W, daß auf den ersten Zug 1 der beiden besetzten Nummern herauskomme, ist $\frac{1}{90}$, jene, daß auf den zweiten Zug die andere gezogen wird, $=\frac{1}{89}$, mithin die W, daß beides geschieht $=\frac{1}{90.89}$; da es aber hier auf die Ordnung, in welcher beide Numern gezogen werden, nicht ankommt, so wird diese W (da sich 5 Elemente, worunter drei gleiche sind, 20mal permutiren lassen) 20mal so groß, also die W, daß unter 5 Zügen die 2 besetzten Numern herauskommen, $=\frac{20}{90.89}=\frac{2}{801}$. Ferner ist die W, daß in diesen 5 Zügen bloß Eine der beiden Numern, z. B. die erste, komme, $=\frac{5}{90}$, und jene, daß die andere in den vier übrigen Zügen nicht herauskomme, $=1-\frac{4}{89}=\frac{85}{89}$, also die Wahrscheinlichkeit, daß beides zutrifft, $=\frac{5}{90}.\frac{85}{89}$. Da ferner dasselbe auch in Bezug auf die zweite Numer gilt, so ist überhaupt die W, daß in diesen 5 Zügen nur Eine der beiden Numern herauskommt, $=2.\frac{5}{90}.\frac{85}{89}=\frac{85}{9.89}$. Es ist also endlich, da beide betrachteten Ereignisse günstig sind, die gesuchte $W=\frac{2}{9.89}+\frac{85}{9.89}=\frac{87}{801}$.

Von den wiederholten Versuchen.

§. 233. Gibt es m Fälle, welche dem Ereignisse A, und p Fälle, welche dem Ereignisse B günstig sind, und findet bei jedem erneuerten Versuche das nämliche Verhältniß zwischen der Zahl der Fälle beider Arten Statt, so kann die W für irgend eine Erwartung nach einer bestimmten Anzahl von Versuchen leicht durch die zusammengesetzte W gefunden werden. — Nehmen wir z. B. ein $(m+p)$seitiges regelmäßiges Prisma, wovon m Seiten mit A und p Seiten mit B bezeichnet sind, und setzen, daß damit z. B. 3mal nach einander geworfen wird, so können dabei folgende Fälle eintreffen: Man wirft entweder 3mal A, oder 2mal A und 1mal B, oder 1mal A und 2mal B, oder 3mal B. Bezeichnet man das Eintreffen von A und B beziehungsweise mit a und b, so ist $a=\frac{m}{m+p}$, und $b=\frac{p}{m+p}$, folglich die zusammengesetzte W für das erste Ereigniß $AAA=a.a.a=a^3$; für das zweite oder $AAB=aab=a^2b$, und wenn dabei die Ordnung nicht bestimmt ist (wenn also AAB 3mal permutirt werden kann), $=3a^2b$; für das dritte Ereigniß ABB, $=abb=ab^2$, und ohne Rücksicht auf irgend eine Ordnung, $=3ab^2$; und endlich für das vierte Ereigniß $BBB=bbb=b^3$. Die bei diesen drei wiederholten Versuchen vorkommenden Wahrscheinlichkeiten aller dabei möglichen Fälle sind demnach, wenn die Ordnung nicht bestimmt ist, a^3, $3a^2b$, $3ab^2$, b^3, nämlich die Glieder der Entwickelung von $(a+b)^3$.

Durch Fortsetzung dieser Betrachtungen findet man eben so, daß die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für alle jene Fälle, welche bei n wiederholten Versuchen eintreten können, durch die Glieder der Entwickelung von $(a+b)^n$, d. i. durch a^n, $\binom{n}{1}a^{n-1}b$, $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$, $\binom{n}{3}a^{n-3}b^3$, ... b^n ausge-

drückt werden, so daß nämlich das allgemeine Glied $\binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ die W ausdrückt, daß unter n Versuchen oder Würfen, ohne Rücksicht auf die Ordnung, A (n — p)mal und B pmal eintreffe. Soll dabei die Ordnung eine bestimmte seyn, so darf man darin nur den Koeffizienten auslassen, d. i. $\binom{n}{p} = 1$ setzen.

Soll endlich die W. bestimmt werden, daß unter diesen n Versuchen A wenigstens (n — 2)mal eintrifft, so sind auch jene Fälle dem Ereignisse günstig, in welchen A (n — 1) oder nmal zutrifft. Mithin drückt die Summe der drei ersten Glieder der vorigen Entwickelung die gesuchte W. aus, weil man in diesem Falle eigentlich die W. sucht, daß A nmal, oder (n—1) oder (n—2) mal eintrifft. Dagegen ist die W, daß A unter n Versuchen höchstens (n — 2) mal eintrifft, gleich der Summe der ganzen Reihe um jene der beiden ersten Glieder vermindert. Dasselbe gilt auch in Beziehung auf das Ereigniß B.

Da hier immer $a + b = 1$, also auch $(a + b)^n = 1$, oder die Summe der ganzen Reihe gleich Eins ist, so ist auch die Summe aus der W, daß A wenigstens (n — p) mal, und höchstens (n — p — 1) mal unter n Versuchen eintrifft, immer gleich der Einheit oder Gewißheit. Zugleich folgt daraus, daß es, wenn zur Bestimmung irgend einer Wahrscheinlichkeit mehr als die halbe Anzahl der Glieder dieser Reihe summirt werden soll, bequemer ist, die Summe der noch übrigen Theile von der Einheit abzuziehen, was damit übereinstimmt, anstatt der gesuchten W. die entgegengesetzte zu bestimmen, und diese von der Einheit abzuziehen.

(10) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel unter 4 Würfen a) die Zahl 6 Einmal, also 3mal eine andere Zahl, b) die Zahl 6 wenigstens 2mal, und endlich c) höchstens 2mal zu werfen?

Hier ist die einfache W für A, $a = \frac{1}{6}$; also die entgegengesetzte $b = \frac{5}{6}$, und $n = 4$; daher $(a + b)^n = (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

a) In diesem Falle gibt das vierte Glied dieser Reihe die gesuchte W, diese ist nämlich $4ab^3 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{125}{216} = \frac{125}{324}$.

b) Die gesuchte W wird hier durch die Summe der drei ersten Glieder dieser Reihe ausgedrückt, so daß man dafür hat:

$$\frac{1 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 25}{6^4} = \frac{171}{1296} = \frac{19}{144}.$$

c) In diesem Falle erhält man die W durch die Summe der 3 letzten Glieder der Reihe; diese ist aber $= \dfrac{6 \cdot 25 + 4 \cdot 125 + 625}{6^4} = \dfrac{1275}{1296} = \dfrac{425}{432}$.

Eben dieses Resultat erhält man aber auch noch einfacher, wenn man die Summe der zwei ersten Glieder von der Einheit subtrahirt; es ist nämlich

$$1 - \frac{1 + 4 \cdot 5}{6^4} = \frac{1296 - 21}{1296} = \frac{1275}{1296} = \frac{425}{432}.$$

(11) In einer Urne befinden sich 4 weiße und 6 schwarze Kugeln. Wie groß ist die W., in 6 Zügen, nach deren jedem die Kugel wieder in die Urne gelegt wird, 2 weiße und 4 schwarze Kugeln zu ziehen?

Hier ist die einfache W, eine weiße Kugel zu ziehen (die W für das Ereigniß A), $a = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, und jene, eine schwarze zu ziehen (die W für das

Ereigniß B), $b = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Die gesuchte W wird daher durch jenes Glied der Entwickelung von $(a+b)^6$ ausgedrückt, welches die Form $K a^2 b^4$ hat (die Exponenten von a und b sind die Wiederholungszahlen von A und B), und da hier $K = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3.4} = 15$ ist, so hat man die gesuchte

$$W = 15 \cdot \frac{4}{25} \cdot \frac{81}{625} = \frac{972}{3125}.$$

(12) Man wirft ein Geldstück, dessen beide Seiten beziehungsweise das Gepräge von Kopf und Wappen besitzen, in die Höhe. Wie groß ist die W, daß in 2 Würfen wenigstens Einmal Wappen falle?

Die gesuchte W ist $a^2 + 2ab$, wobei $a = b = \frac{1}{2}$ ist, also $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$.

Regeln beim Wetten.

§. 234. Eine Wette zwischen zwei oder mehreren Personen kann nur dann rechtmäßig genannt werden, wenn der Einsatz eines Jeden der W, die Wette zu gewinnen, proporzionirt ist. Denn nimmt man z. B. an, daß beim gewöhnlichen Würfelspiele von 6 Personen, jede Eine der 6 Zahlen besetzt, so wird offenbar jeder gleichviel setzen müssen; es hat aber auch in der That jeder der Spielenden die nämliche W für sich, das Spiel zu gewinnen. Übernimmt nun z. B. B 5 Antheile, oder vertritt er die Stelle von 5 Spielenden, die etwa beziehungsweise auf die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 gesetzt haben, so bleibt Alles dasselbe, wenn nur B den Einsatz des A fünfmal leistet.

Setzen 2 Spieler A und B die Summen a und a_1, und sind ihre W zu gewinnen w und w_1, so wird erfordert, daß $a : a_1 = w : w_1$ sey. Für diesen Fall ist a_1 der zu hoffende Gewinn des A, und a der zu hoffende Gewinn des B, ferner muß $a w_1 = a_1 w$ seyn, das heißt, es müssen die Produkte aus dem Gewinne, den jeder hofft in die W diesen zu erlangen, oder es müssen die mathematischen Erwartungen oder Hoffnungen einander gleich seyn.

(13) Wettet A gegen B, daß er mit 2 Würfeln auf Einen Wurf die Summe 5 werfen wird, so müssen sich die von A und B zu leistenden Einsätze wie 1 : 8 verhalten, weil die W, die Summe 5 zu werfen, $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, also die des Gegentheiles $\frac{8}{9}$ ist.

(14) Verspricht A dem B, beim Kopf und Wappenspiel, wenn Wappen auf den ersten Wurf fällt, 2 Groschen, und wenn es erst auf den zweiten Wurf fällt, 4 Groschen, so ist die mathematische Hoffnung des B, da die einfache W der genannten Ereignisse beziehungsweise $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ sind, so fort $2 . \frac{1}{2} + 4 . \frac{1}{4} = 2$ Groschen; und eben so viel muß auch der B dem A entgegensetzen.

Soll aber, ungeachtet vielleicht schon auf den ersten Wurf Wappen fiel, B dennoch die 4 Groschen bekommen, wenn es auf den zweiten Wurf fällt, so ist jetzt die W, daß Wappen auf den zweiten Wurf fällt, da nun der erste Wurf keinen Einfluß hat, $= \frac{1}{2}$, also die mathematische Hoffnung des B $= 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 3$ Groschen, die er sofort auch einsetzen muß.

Rechtmäßige Theilung des Einsatzes vor Beendigung des Spieles.

§. 235. Sind mehrere Versuche nöthig, um ein Spiel zu entscheiden, und wird, nachdem bereits einige Versuche gemacht worden sind, das Spiel vor dessen Beendigung abgebrochen, so kann gefragt werden, nach welchem Verhältnisse der von den Spielern geleistete Einsatz zu vertheilen sey. Da

man bei jedem Spiele von dem Grundsatze ausgeht, daß jeder Spieler auf den geleisteten Einsatz verzichtet, dagegen, wenn der Zufall über den ganzen Einsatz noch nicht entschieden hat, zur Entschädigung auf diesen Einsatz ein Recht besitzt, welches seiner Hoffnung, d. i. seiner Wahrsch., das Spiel zu gewinnen, proporzionirt ist; so muß eben diese Regel, die sogenannte Theilungsregel, bei allen solchen Theilungen, wenn sie rechtmäßig seyn soll, zum Grunde liegen.

(15) Wettet z. B. **A** mit Einem Würfel **2**mal hinter einander die Zahl **6** zu werfen, so darf er nur die Summe **1** setzen, während sein Gegner **B** den Einsatz **35** zu leisten hat. Gehen die Spieler aus einander, bevor noch ein Wurf gemacht worden ist, so muß natürlich jeder seinen Einsatz unverändert zurücknehmen, oder es muß der ganze Einsatz **36** so vertheilt werden, daß davon **A** die Summe **1**, und **B** die Summe **35** erhält; also augenscheinlich in demselben Verhältnisse, in welchem in diesem Augenblicke noch die **W**, ihr Spiel zu gewinnen, stehen. Hat aber **A** bereits Einmal, und dabei wirklich die Zahl **6** geworfen, so haben sich dadurch die Hoffnungen der Spieler ganz anders gestellt. **A** gewinnt nun, wenn er im nächsten Wurfe die Zahl **6** wirft, wofür er die $W = \frac{1}{6}$ hat, **B** dagegen gewinnt, wenn **A** diese Zahl nicht wirft, wofür die $W = \frac{5}{6}$ ist. Vor dem zweiten Wurfe verhalten sich also die mathematischen Hoffnungen des **A** und **B**, das Spiel zu gewinnen, wie **1 : 5**, also muß auch, falls sich die Spieler vor diesem zweiten Wurfe trennen, der ganze Einsatz **36** in eben diesem Verhältnisse getheilt werden, so daß davon **A 6** und **B 30** zurückerhält.

(16) Zwei Spieler **A** und **B** kommen mit einander überein, daß derjenige den ganzen Einsatz erhalten solle, welcher zuerst **3** Parthien gewinnt. Nachdem nun **A** bereits **2**, **B** Eine Parthie gewonnen hat, trennen sie sich. Nach welchem Verhältnisse ist jetzt der Einsatz zu theilen?

Wäre das Spiel fortgesetzt worden, so würde **A** den Einsatz gewonnen haben, wenn er entweder die folgende gewonnen hätte, wofür $W = \frac{1}{2}$ ist, oder wenn er diese Parthie verloren, dagegen die nächst folgende gewonnen hätte, welches zusammengesetzte Ereigniß sonach die $W\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ für sich hat; es ist also in dem Augenblicke, in welchem das Spiel unterbrochen wird, die mathematische Hoffnung des **A** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. **B** dagegen würde das Spiel nur haben gewinnen können, wenn er die beiden folgenden Parthien nach einander gewonnen hätte, wofür die zusammengesetzte $W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ist; und diese ist zugleich die Hoffnung, welche **B** beim Unterbrechen des Spieles hat. Es muß also, zu Folge der obigen Regel, **A** $^3/_4$, **B** $^1/_4$ des gemeinschaftlichen Einsatzes erhalten, so daß, wenn z. B. jeder **32** Dukaten gesetzt hätte, **A 48**, **B** aber nur **16** zu bekommen hat.

Anmerkung. Zur vollständigen Belehrung über diese Gegenstände verweisen wir auf das ausführliche Lehrbuch der höhern Mathematik vom Professor A. Burg. Wien 1833, oder auf dessen Kompendium der höhern Mathematik, Wien 1836.

Achzehnter Abschnitt.

Von der Zahlen-Lotterie.

§. 236. Die k. k. Zahlen-Lotterie hat folgende Einrichtung. In einem Glücksrade befinden sich die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. bis inclusive 90. Von diesen zieht Jemand (gewöhnlich ein Waisenknabe) nach und nach fünf Nummern, wobei immer, nachdem eine Nummer herausgehoben ist, die noch übrigen neu gemischt werden. Dieses Herausheben von fünf Nummern nennt man eine Ziehung.

Vor der Ziehung wählen die Spieler bestimmte Nummern unter verschiedenen Bedingungen. Der Spieler wählt entweder Eine Nummer mit der Bedingung, daß die Ziehung für ihn günstig seyn soll, wenn (a) diese Nummer, was immer für eine von fünf gehobenen ist (eine Extrate), oder (b) unter der Bedingung, daß die Ziehung nur dann für ihn günstig seyn soll, wenn diese Nummer gerade die so vielte gerufen wird, als er vorherbestimmt, (eine Nominate). Oder der Spieler setzt zwei oder mehrere Nummern unter der Bedingung, daß die Ziehung für ihn günstig seyn soll, wenn zwei der benannten Nummern sich unter den fünf gehobenen befinden. Das Errathene von zwei der 5 gehobenen Nummern wird Ambo genannt. Oder der Spieler setzt drei oder mehrere Nummern in jeder beliebigen Anzahl unter der Bedingung, daß die Ziehung für ihn günstig seyn soll, wenn er aus den fünf gehobenen drei erräth. Das Errathen von drei aus den fünf gehobenen Nummern wird Terno genannt.

(1) Wie viele Amben und Ternen erhält man aus den 5 in einer Ziehung gehobenen Nummern?

Es ist in der Kombinazionslehre (§. 222) erwiesen worden, daß die Anzahl der Amben bei n Elementen $=\frac{n(n-1)}{1.2.}$, die der Ternen $=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$ ist.

Hieraus folgt für unsere Aufgabe, daß die Anzahl der Amben $=\frac{5\times 4}{1\times 2}=10$; die der Ternen $=\frac{5\times 4\times 3}{1.\ 2.\ 3}=10$ ist.

(2) Welche Wahrscheinlichkeit findet Statt, daß Eine bestimmt genannte Nummer die erste gehoben werde?

Da jede von den 90 Nummern die erste gehoben werden kann, so ist die W offenbar gleich $\frac{1}{90}$; oder auch: Die W, daß eine bestimmt genannte Nummer die erste gezogen werde, verhält sich zur entgegengesetzten W, wie 1:89.

(3) Welche W hat man mit zwei genannten Nummern einen Ambo zu machen? Antwort: $\frac{1.2}{90.89}=\frac{2}{8010}=\frac{1}{4005}$, wenn nämlich nur 2 Nummern gehoben werden. Da aber durch die fünf in einer Zie-

hung gehobenen Nummern **10** verschiedene Amben vorkommen, so ist die **W** $= \frac{1}{4005} \times 10 = \frac{1}{400 \cdot 5}$.

(4) Welche **W** hat man mit drei genannten Nummern bei einer Ziehung einen Terno zu machen?

Wenn nur drei Nummern gehoben würden, so wäre die **W** $= \frac{1.\ 2.\ 3.}{90.\ 89.\ 88.}$; da aber bei fünf gehobenen Nummern **10** verschiedene Ternen möglich sind, so ist die **W** $= \frac{1.\ 2.\ 3}{90.\ 89.\ 88} \times 10 = \frac{1}{11748}$.

(5) Welche **W** hat man, mit **4** genannten Nummern bei einer Ziehung einen Quaterno zu machen?

Würden blos vier Nummern gehoben werden, so wäre die **W** $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{90.89.88.87.}$; da aber fünf gehobene Nummern $\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} = 5$ verschiedene Quaternen geben, so ist für den in Frage stehenden Fall die **W** $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{90.\ 89.\ 88.\ 87} \times 5 = \frac{1}{511038}$.

(6) Welche **W** hat man, daß von **5** genannten Nummern bei einer Ziehung alle **5** herauskommen?

Für diesen Fall ist die **W** $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{90.\ 89.\ 88.\ 87.\ 86.} = \frac{1}{43949268}$.

Gesetzliche Verordnungen für die k. k. Zahlen-Lotterie.

§. 237. Die Wahl der Zahlen, deren Anzahl für einen einzelnen Spielsatz, und die Geldeinlage, welche jedoch niemals unter **3** Kreuzer betragen darf, ist willkührlich.

Das k. k. Lotto-Gefäll bezahlt für einen jeden getroffenen unbestimmten Auszug (für eine Extrate) den hierauf eingelegten Geldbetrag vierzehnmal; für jeden getroffenen bestimmten Auszug (für eine Nominate) wird die darauf gemachte Einlage sieben und sechzigmal bezahlt; für jeden getroffenen einfachen Ambo wird die Einlage zwei Hundert vierzigmal bezahlt.

Aus der letztgenannten Bestimmung folgt, daß, wenn in einem einzelnen Spielsatze, welcher zu Ambo gespielt wird, mehr als zwei Zahlen getroffen werden, der Ambo so vielmal gewonnen wird, als die errathenen Zahlen Amben enthalten. Daher wird bei drei errathenen Zahlen, weil selbe **3** Amben enthalten, der Ambo dreifach; bei vier errathenen Zahlen, welche **6** Amben enthalten, sechsfach; und wenn alle fünf Zahlen errathen werden, welche **10** Amben enthalten, der einfache Ambo zehnfach bezahlt.

Für einen jeden getroffenen Terno wird die darauf gemachte Geldeinlage vier Tausend acht Hundertmal gezahlt.

Werden in einem zu Terno gespielten Satze mehr als **3** Zahlen errathen, so wird der einfache Terno eben so vielmal gezahlt, als die getroffenen Zahlen Ternen enthalten. Diesem zu Folge wird bei vier errathenen Zahlen, weil diese vier Ternen enthalten, der einfache Terno viermal, und wenn alle

fünf Zahlen errathen werden, welche 10 Ternen enthalten, der einfache Terno zehnmal bezahlt.

Bei einzelnen Spielsätzen auf alle vorgedachten Spielarten, darf sich nicht blos auf die zur Erreichung eines Gewinnes erforderliche Anzahl von Nummern beschränkt werden, sondern man kann, wie schon im Eingange erwähnt wurde, diese Zahl nach Belieben vermehren.

Bei Ambo und Terno Gewinnsten, welche durchgehends in k. k. Dukaten gerechnet werden, wird ein Dukaten mit vier Gulden Konvenzions-Münze ausbezahlt.

§. 238. Beispiele vom Ambospiele.

(7) Wie viele Kreuzer oder Gulden hat man zu setzen, um bei einem Ambospiele Einen Dukaten zu erhalten?

(a) Werden zwei Zahlen gesetzt und errathen, so wird die Einlage 240 mal zurückbezahlt. Bezeichnen wir die zu machende Einlage mit E Kreuzer, um Einen Dukaten zu erhalten, so ist der zurückerhaltende Gewinn = 240 E in Kreuzern, welche auf Dukaten zu bringen sind, was dadurch geschieht, wenn man, weil Ein Dukaten zu 240 Kr. ausbezahlt wird, mit 240 dividirt. Es ist sonach in dem genannten Falle $\frac{240\,E}{240} = 1$, also $E = 1$ Kr.

(b) Werden 3 Zahlen gesetzt und 2 errathen, würde der Gewinn von 240 E nur dann vollständig ausbezahlt, wenn nur Ein einziger Ambo möglich wäre. Da aber bei 3 Zahlen $\frac{3.2}{1.2}$ oder 3 Amben möglich sind, so wird hiervon nur der ⅓ Theil bezahlt werden, oder was dasselbe ist, man müßte, um den Gewinn von Einem Dukaten zu erhalten, dreimal so viel wie im ersten Falle, also 3 Kr. einsetzen.

(c) Werden 4 Zahlen gesetzt und zwei errathen, so können aus diesen 4 Zahlen $\frac{4.3}{1.2}$ oder sechserlei verschiedene Amben gemacht werden, von welchen aber nur Einer gemacht wird. Es wird daher auch bei einer Einlage von Einem Kreuzer nur ⅙ Dukaten bezahlt; oder was dasselbe ist; man muß 6 Kr. einlegen, um im vorliegenden Falle Einen Dukaten zu gewinnen.

(d) Werden die Schlüsse auf dieselbe Weise fortgesetzt, so wird man bemerken, daß man um Einen Dukaten zu gewinnen, Einen Kreuzer so vielmal gesetzt haben muß, als wie viele Amben in der Anzahl der benannten Zahlen möglich sind. Werden also insgemein beim Ambospiele n Zahlen vor dem Spiele benannt, so beträgt der Einsatz hierfür, um Einen Dukaten zu gewinnen $\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}$ Kreuzer.

Wer also mit 5 gesetzten Zahlen für einen errathenen Ambo Einen Dukaten gewinnen will, hat $\frac{5.4}{1.2}$ d. i. 10 Kreuzer zu setzen, bei 6 gesetzten Zahlen 15 Kr.; bei 12 gesetzten Zahlen 1 fl. 6 Kr., bei 20 gesetzten Zahlen 3 fl. 10 Kr., bei 25 gesetzten Zahlen 5 fl. u. s. w. Es versteht sich von selbst, daß für erwünschte G Dukaten Gewinn, die früher berechneten Einsätze auch G mal berichtigt werden müssen, und daß der Gewinn von Einem Dukaten so viel-

mal ausbezahlt wird, wie oft der früher berechnete Einsatzbetrag in dem willkührlichen Einsatze enthalten ist.

Bezeichnet man nun die Anzahl Kreuzer des beliebigen Einsatzes mit E, und die Anzahl der zu gewinnenden Dukaten mit G, so ist

$$E : \frac{n(n-1)}{1.2} = G.$$ Hieraus folgt: $$E \times \frac{1.2}{n(n-1)} = G; \ 2E = n(n-1)G.$$

Diese Gleichung dient dazu, aus je zwei der gegebenen Stücke, das dritte durch Rechnung zu finden. Man erhält nämlich $E = \frac{n(n-1)G}{2}$; $G = \frac{2E}{n(n-1)}$;

und $$n = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{2E}{G}\right)}$$

(8) Wie groß ist der Einsatz, wenn man bei 6 genannten Nummern 20 Dukaten für den einfachen Ambo gewinnen will?

$$G = 20, \ n = 6; \ E = \frac{6.5}{2} \times 20 = 300 \text{ Kr.} = 5 \text{ fl.}$$

(9) Wie viele Dukaten gewinnt man für den einfachen Ambo, wenn bei 5 genannten Nummern 5 fl. gesetzt werden?

$$E = 300, \ n = 5; \ G = \frac{2.300}{5.4} = 30 \text{ Dukaten.}$$

(10) Jemand hat 18 fl. 40 Kr. gesetzt, und 40 Dukaten gewonnen. Wie viele Nummern wurden beim Einsatze benannt?

$$E = 18 \text{ fl. } 40 \text{ Kr.} = 1120 \text{ Kr.}, \ G = 40; \ n = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{2240}{40}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{1+15}{2} = 8.$$

(11) Jemand setzt (a) zwei Nummern, (b) drei Nummern, (c) vier Nummern, (d) fünf Nummern, (e) zehn Nummern; und für jeden einzelnen Satz fünf Gulden. Wie viele Dukaten hat er in der Lotto-Kasse für jeden einzelnen Fall zu fordern, wenn er in jedem derselben zwei Nummern erräth?

Antwort: Im Falle (a) 300; (b) 100; (c) 50; (d) 30; (e) 6⅔ #.

(12.) Jemand setzt auf 5 Nummern Einen Gulden; was gewinnt er im Ambospiele, wenn er (a) zwei Nummer; oder (b) drei Nummer; oder (c) vier Nummer; oder (d) gar alle 5 Nummern erräth?

Antwort: Im Falle (a) 6 Dukaten,
(b) weil die drei getroffenen Zahlen 3 Amben geben, 18 Dukaten,
(c) weil die vier getroffenen Zahlen 6 Amben geben, 36 Dukaten,
(d) weil die fünf getroffenen Zahlen 10 Amben geben, 60 Dukaten.

(13) Welcher Betrag hätte Jemand an die Lotto-Kassa anzusprechen, wenn er im Ambospiele (a) auf 20, (b) auf 40 Nummern jedesmahl 247 fl. setzen würde?

Antwort: Im Falle (a) 78; im Falle (b) 19 Dukaten.

Anmerkung. In der letzten Aufgabe zeigt sich im Falle (b), daß selbst beim Errathen eines Ambo der Gewinn kleiner als die Einlage wäre. Es wird da-

her wünschenswerth seyn, zu wissen, wie viele Nummern man höchstens setzen kann, um für den Fall des Gelingens doch wenigstens so viel zu erhalten, als die Einlage betrug.

(14) Wie viele Nummern darf man höchstens setzen, um für den Fall, als das Spiel günstig ist (als man einen Ambo macht) doch wenigstens seinen Einsatz zurückerzuerhalten?

Wenn man in der Formel $2E = n(n-1)\ G$, wo E die Anzahl der zu spielenden Kreuzer bedeutet, weil jeder geringste Gewinn ein Dukaten oder **240** Kr. ist, $E = 240$ setzt, so erhält man $n(n-1) = 480$, woraus man n etwas größer als **22** auffindet, d. h. bei **22** besetzten Nummern wird, im Falle diese einen Ambo enthalten, der Gewinn noch größer als der Einsatz seyn, würde man aber mit **23** besetzten Nummern einen Ambo machen, so wäre der Gewinn kleiner als der Einsatz, also würde eigentlich ein Verlust eintreten. Setzt jemand auf **22** Zahlen **7** Gulden, so ist $E = 420$, und es wird $G = \frac{2E}{n(n-1)} = \frac{840}{22.21} = 1\frac{9}{11}$ Lotto Duk. $= 7$ fl. $16\frac{4}{11}$ Kr. — Setzt aber diese Person denselben Betrag auf **23** Nummern, so ist $G = \frac{840}{23.22} = 1\frac{167}{253}$ Lotto Dukaten $= 6$ fl. $38\frac{106}{253}$ Kr.

(15) Was beträgt der Einsatz, um mit **2**, **3**, **4**, u. s. w., bis inclusive **22** Nummern Einen Lotto Dukaten zu gewinnen?

Formel: $2E = n(n-1)$

Antwort: Bei **2** gesetzten Zahlen **1** Kr.; bei **3**, **3** Kr.; bei **4**, **6** Kr.; bei **5**, **10** Kr.; bei **6**, **15** Kr.; bei **7**, **21** Kr.; bei **8**, **28** Kr.; bei **9**, **36** Kr.; bei **10**, **45** Kr.; bei **11**, **55** Kr.; bei **12**, **1** fl. **6** Kr.; bei **13**, **1** fl. **18** Kr.; bei **14**, **1** fl. **31** Kr.; bei **15**, **1** fl. **45** Kr.; bei **16**, **2** fl.; bei **17**, **2** fl. **16** Kr.; bei **18**, **2** fl. **33** Kr.; bei **19**, **2** fl. **51** Kr.; bei **20**, **3** fl. **10** Kr.; bei **21**, **3** fl. **30** Kr.; bei **22**, **3** fl. **51**. Kr.

§. 239. Beispiele vom Ternospiele.

(16) Wie viele Kreuzer oder Gulden hat man zu setzen, um bei einem Ternospiele Einen Dukaten zu gewinnen?

(a) Werden drei Nummern gesetzt und errathen, so bezahlt die Lotto-Gefälls-Kasse den geleisteten Einsatz **4800**mal. Bezeichnen wir die zu machende Einlage mit E Kreuzer, um einen Dukaten zu erhalten, so ist der zurückerhaltene Gewinn **4800** E Kreuzer, oder $\frac{4800}{240}$ Dukaten, d. i. **20** Dukaten, woraus folgt, daß in dem genannten Falle Ein Kreuzer Einsatz, **20** Dukaten Gewinn bringt.

(b) Werden **4** Nummern gesetzt, und **3** errathen, so würde der Gewinn **4800** E nur dann vollständig ausbezahlt, wenn nur Ein einziger Terno möglich wäre; da aber bei vier Elementen auch **4** Ternen möglich sind, so wird von dem ganzen Gewinne nur $\frac{1}{4}$ Theil, d. i. es werden für Einen Kreuzer Einsatz fünf Dukaten bezahlt werden.

(c) Werden **5** Nummern gesetzt, und **3** errathen, so können aus diesen fünf Nummern = **10** verschiedenen Ternen gebildet werden, von welchen aber nur Einer gemacht wird. Es wird daher auch von dem Betrage **20** Dukaten nur der $\frac{1}{10}$ Theil für den Gewinn entfallen, oder man erhält bei **5**

gesetzten Nummern für einen einfachen Terno für Einen Kreuzer Einsatz **2** Dukaten.

(d) Bezeichnet man die Anzahl der einzelnen Kreuzer, um den Gewinn von **G** Dukaten zu erhalten, mit **E**, so ist dieser bei einem Terno gleich **4800 E** Kreuzer, oder **20** Dukaten. Dieser Ausdruck ist aber bei **n** benannten Zahlen noch durch die Anzahl der aus **n** Elementen möglichen Ternen, d. h. durch $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$ zu dividiren. Auf diese Weise findet man $G = 20E$:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} = 20\,E \times \frac{1.\ 2.\ 3.}{n(n-1)(n-2)} = \frac{120\,E}{n(n-1)(n-2)},$$

(17) Wie viele Kreuzer oder Gulden hat man zu setzen, um mit **6**, **7,8** .....bis inclusive **31** besetzten Nummern wenigstens Einen Lotto-Dukaten zu gewinnen?

Formel $120\,E = n(n-1)(n-2)$.

Antwort: Bei **6** gesetzten Zahlen, **1** Kr.; bei **7**, **2** Kr.; bei **8**, **3** Kr.: bei **9**, **5** Kr.; bei **10**, **6** Kr.; bei **11**, **9** Kr.; bei **12**, **11** Kr.; bei **13**, **15** Kr.; bei **14**, **19** Kr.; bei **15**, **23** Kr.; bei **16**, **28** Kr.; bei **17**, **34** Kr.; bei **18**, **41** Kr.; bei **19**, **49** Kr.; bei **20**, **57** Kr.; bei **21**, **1** fl. **7** Kr.; bei **22**, **1** fl. **17** Kr.; bei **23**, **1** fl. **29** Kr.; bei **24**, **1** fl. **42** Kr.; bei **25**, **1** fl. **55** Kr.; bei **26**, **2** fl. **10** Kr.; bei **27**, **2** fl. **27** Kr.; bei **28**, **2** fl. **44** K.; bei **29**, **3** fl. **3** K.; bei **30**, **3** fl. **23** Kr.; bei **31**, **3** fl. **45** Kr.

Aus der früher aufgestellten Gleichung $120\,E = G.\ n(n-1)(n-2)$ folgt noch außer dem für **G** schon aufgestellten Werthe $G = \frac{120\,E}{n(n-1)(n-2)}$;

daß $E = \frac{G.n(n-1)(n-2)}{120}$, und daß $n^3 - 3\,n^2 + 2\,n = \frac{120\,E}{G}$ ist.— Diese aufgestellten Werthe lehren zu je zwei gegebenen Stücken (Einsatz, Gewinn, Anzahl der zu besetzenden Nummern), das dritte durch Rechnung zu bestimmen.

(18) Wie groß ist der Einsatz, wenn man bei **8** besetzten Nummern **100** Dukaten für den einfachen Terno gewinnen will?

$$E = \frac{100.8.7.6}{120} = 280\ \text{Kr.} = 4\ \text{fl.}\ 40\ \text{Kr.}$$

(19) Wie viele Dukaten gewinnt man für den einfachen Terno, wenn man bei **10** besetzten Nummern **10** fl. einsetzt?

$$G = \frac{120.600}{10.9.8} = 100\ \text{Lotto-Dukaten.}$$

(20) Jemand hat **16** fl. **40** Kr. eingelegt, und für einen einfachen Terno **2000** Dukaten erhalten. Wie viele Nummern hat er benannt?

$$n^3 - 3\,n^2 + 2\,n = \frac{120.1000}{2000} = 60;\ \text{oder}\ n^3 - 3\,n^2 + 2\,n - 60 = 0.$$

Die razionale Wurzel dieser Gleichung wird gefunden, wenn man $n = 5$ setzt. (Sieh mein Lehrbuch über die Auflösungslehre der Gleichungen und Aufgaben, **2.** Auflage, Wien bei Karl Gerold **1832**, §. **90** u. f.). Es wurden sonach **5** Nummern gesetzt.

(21) Jemand setzt (a) drei Nummern, (b) 4 Nummern, (c) fünf Nummern, (d) 6 Nummern, (e) 10 Nummern, und legt bei jedem Satze 5 fl. ein. Wie viele Dukaten hat er von dem Lotto-Gefälle für jeden einzelnen Fall zu fordern, wenn er in jedem derselben drei Nummern erräth?

Antwort: Im Falle (a) 6000, (b) 1500, (c) 600, (d) 300, (e) 50 Dukaten.

(22) Jemand setzt auf 5 Nummern Einen Gulden. Was gewinnt er im Ternospiele, wenn er (a) drei Nummer, (b) vier Nummer, oder (c) alle fünf Nummern erräth?

Antwort: Im Falle (a) 120 Dukaten.

Im Falle (b), weil 4 Nummern 4 Ternen enthalten, 480 Dukaten.

Im Falle (c), weil 5 Nummern 10 Ternen enthalten, 1200 Dukaten.

§. 240. Beispiele vom Ambo-Ternospiele.

Das Ambo-Ternospiel ist aus den beiden früheren zusammengesetzt, und besteht darin, daß jemand mit einem Theile seines eingelegten Geldes auf dieselben genannten Nummern Ambo, und mit dem andern Theile seiner Einlage Terno spielt. Der Gewinn ist sonach die Summe der Gewinne, welche nach dieser besonderen Wahl aus den bestimmten Einsätzen sich einzeln ergeben.

(23) Jemand setzt auf 3 genannte Nummern 4 Kr.; und bestimmt 3 Kreuzer Einlage für das Ambospiel, und 1 Kr. für das Ternospiel. Was gewinnt diese Person (a) wenn sie 2, und (b) wenn sie alle 3 Nummern erräth?

(a) 1 Lotto-Dukaten. (b) für den Ambo 3 Dukaten
für den Terno 20 „

Zusammen 23 Dukaten.

(24) Jemand benennt fünf Nummern, und setzt Einen Gulden, wovon 40 Kr. für das Ambo und 20 Kr. für das Ternospiel gehören sollen. Was gewinnt diese Person (a) wenn sie 2, (b) wenn sie 3, (c) wenn sie 4, und (d) wenn sie alle 5 Nummern erräth?

(a) 4 #; (b) im Ambospiele 12 #; (c) im Ambospiele 24 #;
im Ternospiele 40 # im Ternospiele 160 #

Zusammen 52 # Zusammen 184 #;

(d) im Ambospiele 40 #
im Ternospiele 400 #

Zusammen 440 #

(25) Wie würde der Gewinn unter den vorigen Bedingungen entfallen, wenn für das Ambospiel 20 Kr., und für das Ternospiel 40 Kreuzer bestimmt worden wären?

(a) 2 #; (b) im Ambospiele 6 #; (c) im Ambospiele 12 #;
im Ternospiele 80 # im Ternospiele 320 #

Zusammen 86 #; Zusammen 332 #;

(d) im Ambospiele 20 #;
im Ternospiele 800 #

Zusammen 820 #.

Neunzehnter Abschnitt.

Von den Klassen-Lotterien.

§. 241. Unter Klassen-Lotterien versteht man Lotterie-Einrichtungen, in welchen durch die Theilnehmer, deren jeder Ein Los erhält, nach mehrmaligen Einzahlungen eine gewisse Summe Geldes zusammengebracht wird, die sodann in mehreren Ziehungen unter eine bestimmt ausgesprochene Anzahl von Losen als Gewinn vertheilt wird.

Diese Einrichtungen sind willkührlich, und werden durch die betreffenden Verlosungspläne von Fall zu Fall bekannt gegeben. — Alle verschiedenartigen hierauf Bezug nehmenden Pläne haben Folgendes gemeinschaftlich:

Mehrere Spieler zusammen kaufen eine bestimmte Anzahl von Losen, von welchen nach einiger Zeit eine bestimmte Anzahl gezogen, und gegen Ausbezahlung der auf sie gefallenen Gewinne wieder eingelöset werden. Eine solche Ziehung pflegt man eine Klasse zu nennen.

Für die bei der ersten Ziehung nicht herausgekommenen Lose wird wieder eingezahlt, und zwar entweder eben so viel, wie beim ersten Ankaufe, oder nach Verschiedenheit auch ein anderer, gewöhnlich ein höherer Betrag. Dieses Wiedereinzahlen wird das Renoviren der Lose genannt, wornach die zweite Ziehung erfolgt.

Auf gleiche Weise müssen alle bei der zweiten und jeder späteren Ziehung nicht herausgekommenen Lose wieder renovirt werden, bis die vorletzte Ziehung vor sich gegangen ist. Nach dieser Ziehung werden die noch vorhandenen Lose zum letzten Male renovirt, und es erfolgt sonach die Hauptziehung. Die Anzahl der Ziehungen oder Klassen ist verschieden, gewöhnlich **5**, **6**, oder **7**, welche Anzahl nicht leicht übersteigen wird.

Die Anzahl der in jeder Klasse zu ziehenden Lose kann gleich oder verschieden seyn; im letzteren Falle werden gewöhnlich in jeder späteren Ziehung mehr als in jeder vorhergehenden gezogen, die meisten aber jedesmal bei der Hauptziehung. Gewöhnlich beträgt die Gesammtzahl der in allen Ziehungen zu hebenden Lose nicht leicht weniger, als die Hälfte aller Lose, meistens ist sie dieser gleich, selten größer, nie aber viel größer als die Hälfte.

Die bei der Hauptziehung nicht herausgekommenen Lose verlieren ihre Gesammteinlage, und heißen Nieten.

Was die Gewinne betrifft, so steigen diese in jeder späteren Klasse, und werden so gewählt, daß sie den Einkaufspreis des Loses, so wie alle durch die Renovazionen für dasselbe eingezahlten Beträge übersteigt, also eigentlich Gewinne enthalten. Bei der Hauptziehung kommen die meisten und größten Gewinne vor, deren höchster das große Los genannt wird, welches für die Spielenden das eigentliche Lockmittel ist, um in die Lotterie zu setzen.

Die Summe aller Gewinne ist der Summe aller Einzahlungen gleich, hieraus folgt, daß, je größer die Gewinne in der Hauptziehung seyn sollen, desto mehr von den für diese Ziehung noch übrigen Losen Nieten seyn müssen.

Von den Gewinnsten werden den Gewinnern gewöhnlich Abzüge gemacht, die nach Prozenten bestimmt sind, und meistens von den Gewinnsten unter **1000** Gulden oder Thalern **10 %**, bei **1000** Gulden oder Thaler aber und darüber **12½ %** betragen.

Die nähere Erläuterung über diesen Gegenstand wird sich aus den nachstehenden Beispielen ergeben.

§. 242. Vierzehnte königlich-sächsische Landes-Lotterie in Leipzig vom Jahre 1838.

Diese bestand aus **34000** Losen und **17000** in **5** Klassen vertheilten Gewinnen. In jeder der vier ersten Klassen wurden **1500**, in der Hauptziehung **11000** Nummern und Gewinne gezogen. Die Einlage sowohl beim Ankaufe als bei jeder Renovazion beträgt **8** Thaler, so daß ein bei der Hauptziehung noch mitspielendes Los auf **40** Thaler preuß. Kourant zu stehen kommt. Die Bestimmung der Abzüge von den Gewinnsten ist die im vorigen Paragraphe erwähnte.

Plan für diese Lotterie:

Erste Klasse, à 8 Thaler Einlage.		Zweite Klasse, à 8 Thaler Renovazion.		Dritte Klasse, à 8 Thaler Renovazion.	
Gewinn.	Thaler.	Gewinn.	Thaler.	Gewinn.	Thaler.
1 à 2000 . .	2000	1 à 3000 . .	3000	1 à 4000 . .	4000
1 à 1000 . .	1000	1 à 1000 . .	1000	1 à 2000 . .	2000
5 à 400 . .	2000	5 à 400 . .	2000	2 à 1000 . .	2000
8 à 200 . .	1600	8 à 200 . .	1600	6 à 400 . .	2400
35 à 100 . .	3500	35 à 100 . .	3500	10 à 200 . .	2000
50 à 40 . .	2000	50 à 50 . .	2500	50 à 100 . .	5000
100 à 30 . .	3000	100 à 40 . .	4000	130 à 60 . .	7800
1300 à 20 . .	26000	1300 à 30 . .	39000	1300 à 40 . .	52000
1500 Gew. betrag.	41100 Thl.	1500 Gew. betrag.	56600 Thl.	1500 Gew. betrag.	77200 Thl.

Vierte Klasse, à 8 Thaler Renovazion.		Fünfte Klasse, à 8 Thaler Renovazion.	
Gewinn.	Thaler.	Gewinn.	Thaler.
1 à 5000 . .	5000	1 à 100000 . .	100000
1 à 2000 . .	2000	1 à 50000 . .	50000
2 à 1000 . .	2000	1 à 30000 . .	30000
6 à 400 . .	2400	1 à 20000 . .	20000
10 à 200 . .	2000	2 à 10000 . .	20000
60 à 100 . .	6000	4 à 5000 . .	20000
120 à 60 . .	7200	10 à 2000 . .	20000
1300 à 50 . .	65000	60 à 1000 . .	60000
1500 Gew. betrag.	91600 Thl.	100 à 400 . .	40000
		150 à 200 . .	30000
		1000 à 100 . .	100000
		9670 à 50 . .	483500
		11000 Gew. betragen	973500 Thl.

Bilanz.

Einnahme.						Ausgabe.					
34000 Lose,	à 8 Thl.,	I.	Klasse	betr.	272000	1500	Gewinnste	I.	Klasse	betragen	41100
32500 „	detto	II.	„	„	260000	1500	detto	II.	„	„	56600
31000 „	detto	III.	„	„	248000	1500	detto	III.	„	„	77200
29500 „	detto	IV.	„	„	236000	1500	detto	IV.	„	„	91600
28000 „	detto	V.	„	„	224000	11000	detto	V.	„	„	973500
				Summe Thaler	1240000	17000	Gewinnste	betragen		Thaler	1240000

Folgerungen: **1.** Da die Wahrscheinlichkeit immer durch einen Bruch dargestellt werden kann, dessen Zähler die Anzahl aller günstigen, und dessen Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle ist; so folgt hieraus, daß die W, in dieser Lotterie zu gewinnen oder zu verlieren, vollkommen gleich ist. Denn bezeichnet man diese W beziehungsweise mit w_g und w_v, so hat man

$$w_g : w_v = \frac{17000}{34000} : \frac{17000}{34000} = 1 : 1.$$

2. Bezeichnet man die W. herauszukommen mit w_h, die nicht herauszukommen mit w_n, so erhält man:

a) für die erste Klassenziehung $w_h = \frac{1500}{34000} = \frac{3}{68}$; es ist sonach $w_n = \frac{65}{68}$, folglich $w_h : w_n = 3 : 65$;

b) für die zweite Klassenziehung $w_h = \frac{1500}{32500} = \frac{3}{65}$; es ist daher $w_n = \frac{62}{65}$, folglich $w_h : w_n = 3 : 62$;

c) für die dritte Klassenziehung $w_h = \frac{1500}{31000} = \frac{3}{62}$; es ist daher $w_n = \frac{59}{62}$, folglich $w_h : w_n = 3 : 59$;

d) für die vierte Klassenziehung $w_h = \frac{1500}{29500} = \frac{3}{59}$; es ist daher $w_n = \frac{56}{59}$, folglich $w_h : w_n = 3 : 56$;

e) für die Hauptziehung $w_h = \frac{11000}{28000} = \frac{11}{28}$; es ist daher $w_n = \frac{17}{28}$, folglich $w_h : w_n = 11 : 17$.

§. 243. Beispiel, in welchem sowohl die Renovazionsbeträge, als die Anzahl der in jeder Klasse zu ziehenden Lose verschieden sind.

Es wird eine Klassen-Lotterie eingerichtet, in welcher **60000** Lose ausgegeben und sogleich mit **5** Gulden bezahlt werden. Bei dieser finden **6** Ziehungen und eine Hauptziehung Statt. In diesen Ziehungen werden beziehungsweise **2000**, **2500**, **3000**, **3500**, **4000**, **4500** und in der Hauptziehung **16500**, also zusammen **36000** Lose gezogen, und gegen die darauf fallenden Gewinne eingelöset, so daß diese Lotterie nur **24000** Nieten enthält. Die Renovazionen werden mit **6**, **8**, **9**, **10**, **12** und **15** fl. gemacht.

Plan für diese Lotterie.

Erste Klasse, à 5 fl. Einlage.							Zweite Klasse, à 6 fl. Renovazion.						
Gewinn.						Gulden.	Gewinn.						Gulden.
1000	Lose,	à	10	fl.,	gewinnen	10000	1200	Lose,	à	20	fl.,	gewinnen	24000
500	„	à	15	„	detto	7500	800	„	à	25	„	detto	20000
250	„	à	20	„	detto	5000	250	„	à	32	„	detto	8000
150	„	à	30	„	detto	4500	150	„	à	40	„	detto	6000
50	„	à	40	„	detto	2000	50	„	à	50	„	detto	2500
25	„	à	50	„	detto	1250	25	„	à	60	„	detto	1500
20	„	à	60	„	detto	1200	20	„	à	80	„	detto	1600
2	„	à	75	„	detto	150	2	„	à	200	„	detto	400
2	„	à	200	„	detto	400	2	„	à	500	„	detto	1000
1	„	à	4000	„	detto	4000	1	„	à	5000	„	detto	5000
2000	Lose gewinnen Gulden . . .					36000	2500	Lose gewinnen Gulden . . .					70000

Dritte Klasse, à 8 fl. Renovazion.							Vierte Klasse, à 9 fl. Renovazion.						
Gewinn.						Gulden.	Gewinn.						Gulden.
1400	Lose,	à	30	fl.,	gewinnen	42000	1600	Lose,	à	40	fl.,	gewinnen	64000
1100	„	à	40	„	detto	44000	1300	„	à	50	„	detto	65000
250	„	à	50	„	detto	12500	300	„	à	60	„	detto	18000
150	„	à	60	„	detto	9000	200	„	à	80	„	detto	16000
50	„	à	80	„	detto	4000	50	„	à	100	„	detto	5000
25	„	à	100	„	detto	2500	25	„	à	200	„	detto	5000
20	„	à	200	„	detto	4000	20	„	à	300	„	detto	6000
2	„	à	300	„	detto	600	2	„	à	500	„	detto	1000
2	„	à	700	„	detto	1400	2	„	à	1500	„	detto	3000
1	„	à	6000	„	detto	6000	1	„	à	7000	„	detto	7000
3000	Lose gewinnen Gulden . . .					126000	3500	Lose gewinnen Gulden . . .					190000

Fünfte Klasse, à 10 fl. Renovazion.						Sechste Klasse, à 12 fl. Renovazion.					
Gewinn.					Gulden.	Gewinn.					Gulden.
1800	Lose,	à 50	fl.,	gewinnen	90000	2000	Lose,	à 70	fl.,	gewinnen	140000
1500	„	à 60	„	detto	90000	1600	„	à 80	„	detto	128000
350	„	à 80	„	detto	28000	450	„	à 100	„	detto	45000
250	„	à 120	„	detto	30000	250	„	à 120	„	detto	30000
50	„	à 180	„	detto	9000	150	„	à 200	„	detto	30000
25	„	à 240	„	detto	6000	25	„	à 400	„	detto	10000
20	„	à 400	„	detto	8000	20	„	à 600	„	detto	12000
2	„	à 600	„	detto	1200	2	„	à 1000	„	detto	2000
2	„	à 1900	„	detto	3800	2	„	à 2500	„	detto	5000
1	„	à 8000	„	detto	8000	1	„	à 10000	„	detto	10000
4000	Lose gewinnen Gulden . . .				274000	4500	Lose gewinnen Gulden . . .				412000

Siebente Klasse, à 15 fl. Renovazion.
(Hauptziehung.)

Gewinn.					Gulden.
8000	Lose,	à 80	fl.,	gewinnen	640000
4000	„	à 100	„	detto	400000
2000	„	à 120	„	detto	240000
1000	„	à 150	„	detto	150000
800	„	à 180	„	detto	144000
400	„	à 200	„	detto	80000
200	„	à 300	„	detto	60000
50	„	à 800	„	detto	40000
25	„	à 1800	„	detto	45000
10	„	à 2500	„	detto	25000
10	„	à 4000	„	detto	40000
2	„	à 15000	„	detto	30000
2	„	à 50000	„	detto	100000
1	„	à 100000	„	detto	100000
16500	Lose gewinnen Gulden . . .				2,094000

Bilanz.

Einnahme.							Ausgabe.						
60000	Lose,	à 5	fl.,	betragen	fl.	300000	2000	Gew.	I.	Klasse	gewinnen	fl.	36000
58000	„	à 6	=	detto	=	348000	2500	„	II.	„	detto	=	70000
55500	„	à 8	=	detto	=	444000	3000	„	III.	„	detto	=	126000
52500	„	à 9	=	detto	=	472500	3500	„	IV.	„	detto	=	190000
49000	„	à 10	=	detto	=	490000	4000	„	V.	„	detto	=	274000
45000	„	à 12	=	detto	=	540000	4500	„	VI.	„	detto	=	412000
40500	„	à 15	=	detto	=	607500	16500	„	VII.	„	detto	=	2094000
Summe Gulden . . .						3,202000	36000	Gewinnste betragen Gulden					3,202000

Folgerungen: **1.** $w_g : w_v = \frac{36000}{60000} : \frac{24000}{60000} = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2.$

a) Für die erste Klassenziehung ist $w_h = \frac{2000}{60000} = \frac{1}{30}$; folglich ist $w_n = \frac{29}{30}$; es ist daher $w_h : w_n = 1 : 29$;

b) für die zweite Klassenziehung ist $w_h = \frac{2500}{58000} = \frac{5}{116}$; folglich ist $w_n = \frac{111}{116}$; es ist daher $w_h : w_n = 5 : 111 = 1 : 22\frac{1}{5}$;

c) für die dritte Klassenziehung ist $w_h = \frac{3000}{55500} = \frac{2}{37}$; folglich ist $w_n = \frac{35}{37}$; es ist daher $w_h : w_n = 2 : 35 = 1 : 17\frac{1}{2}$;

d) für die vierte Klassenziehung ist $w_h = \frac{3500}{52500} = \frac{1}{15}$; folglich ist $w_n = \frac{14}{15}$; es ist daher $w_h : w_n = 1 : 14$;

e) für die fünfte Klassenziehung ist $w_h = \frac{4000}{49000} = \frac{4}{49}$; folglich ist $w_n = \frac{45}{49}$; es ist daher $w_h : w_n = 4 : 45 = 1 : 11\frac{1}{4}$;

f) für die sechste Klassenziehung ist $w_h = \frac{4500}{45000} = \frac{1}{10}$; folglich ist $w_n = \frac{9}{10}$; es ist daher $w_h : w_n = 1 : 9$;

g) für die Hauptziehung ist $w_h = \frac{16500}{40500} = \frac{11}{27}$; folglich ist $w_n = \frac{16}{27}$; es ist daher $w_h : w_n = 11 : 16 = 1 : 1\frac{5}{11}$.

Drückt man für jede Ziehung die w_h durch die Zahl **220** aus, so sind die beziehungsweisen Zahlen für w_n folgende: **6380, 4884, 3850, 3300, 2475, 1980, 320.**

Zwanzigster Abschnitt.

Von den Realitäten-Lotterien.

§. 244. Zu den Lotterien können auch die größeren Ausspielungen, Verlosungen, auch Güter-Lotterien, Realitäten-Lotterien u. s. w. genannt, gezählt werden.

Verlosungen sind Vertheilungen von Geldsummen oder andern Gegenständen, die nach ihrem Geldwerthe geschätzt werden, unter einige Wenige von vielen Einzelnen, die durch eine verhältnißmäßig geringe Einzahlung ein Recht zum Mitspiele erworben haben. Jeder Mitspielende erhält eine mit einer Nummer versehene Einzahlungsbescheinigung, welche ein Los genannt wird. — Die Nummern aller Lose werden in ein Glücksrad gegeben, aus welchem von unparteiischen Personen einige Nummern gehoben werden. — Die Besitzer jener Lose, deren Nummern gehoben worden sind, erhalten die zu verlosenden Gegenstände als Eigenthum, während alle übrigen Mitspielenden ihre Einlage verlieren.

Die Einrichtung bei solchen Verlosungen ist sehr mannigfaltig, und bei jeder einzelnen wieder anders. Die für jeden speziellen Fall bekannt gemachten Spielplane geben die Hoffnungen an, welche der Mitspielende durch seine Einlage erwirbt.

§. 245. Bei der Bearbeitung des Spielplanes und bei der Bestimmung der Anzahl von Losen hat man erstlich darauf zu sehen, daß die Summe aller durch den Verkauf der Lose eingegangenen Einzahlungen einestheils den Werth aller zu verlosenden Gegenstände, anderntheils aber auch noch alle übrigen mit der Ausspielung verbundenen Kosten, als z. B. landesfürstliche Abgaben, Druckkosten, Verschleißprämien u. dgl., in sich begreifen muß. Ferner hat man zu berücksichtigen, daß vielleicht eine bedeutende Partie von Losen unveräußert bleiben dürfte, wodurch die Unternehmer in einen bedeutenden Schaden versetzt werden könnten, besonders dann, wenn unter den liegen gebliebenen Losen sich keine Treffer befinden; daher aus dieser Ursache die Anzahl der Lose größer seyn muß, als es nach den sonstigen Auslagen für die Ausspielung erforderlich wäre.

Ein weiter berücksichtigungswürdiger Gegenstand ist es, darauf bedacht zu seyn, daß das Spiel Interesse erregt, welches um so höher steigt, je größer der höchste zu erwartende Gewinn ist, und je mehrere andere bedeutende Treffer außer dem Haupttreffer noch vorkommen.

Um den Absatz der Lose zu beschleunigen, werden gewöhnlich Freilose ausgegeben, welche entweder dasselbe Recht gewähren, wie die übrigen zahlbaren Lose, und für diesen Fall nur als eine Verschleißprämie oder als eine Daraufgabe auf mehrere zusammen veräußerte Lose zu betrachten sind; oder welche außerdem, daß sie mit allen übrigen Losen gleiche Rechte gewähren, noch einen ganz sicheren bestimmt ausgesprochenen Gewinn verschaffen; oder daß für diese wieder eine ganz eigene Ziehung angeordnet wird, wodurch sie meistens noch einen bestimmten, oft einen bedeutend hohen Gewinn bewirken.

§. 246. Hinsichtlich der Art der Verlosung sind wieder verschiedene Verfahrungsweisen üblich. Es wird entweder bloß Eine einzige Ziehung vorgenommen, bei welcher aus einem Glücksrade die Nummern des Loses, und aus einem andern der dieser Nummer zufallende Gewinn gleichzeitig gehoben wird, was man so lange fortsetzt, bis alle Gewinnste gehoben sind. Die Besitzer der Lose, deren Nummern im ersten Glücksrade zurückbleiben, erhalten nichts. — Oder es werden in Einer einzigen Ziehung bloß einige Nummern gehoben, und schon im Plane bestimmt, daß sodann auch auf einige der gezogenen unmittelbar vorhergehende, und auf dieselbe unmittelbar nachfolgende Nummern, Vor- und Nachtreffer genannt, ein früher bestimmter Gewinn fällt. In diesem Falle liegt es in der Natur der Sache, daß die Vortreffer, die etwa über die Nr. **1** hinaus noch vorhanden seyn dürften, in umgekehrter Ordnung auf die letzte Zahl und so weiter aufwärts fallen; eben so die Nachtreffer, die etwa noch über die höchste Losezahl hinausfallen, auf Nr. **1** u. s. w., so weit sie reichen, zu überlegen sind. — Auch können alle Losnummern in bestimmte Partien, gewöhnlich Serien genannt, abgetheilt werden, für welchen Fall die Lose mit zwei Nummern versehen werden müssen, von welchen die eine die Serie, die andere die Nummer in der Serie bezeichnet. Sind die Lose in Serien eingetheilt, so sind immer mehrere Ziehungen erforderlich, welche entweder sogleich unmittelbar nach einander, oder in im Vorhinein bestimmten Zwischenräumen erfolgen können. Es müssen nämlich zuerst die Serien gezogen werden, deren Losen die Gewinnste zufallen sollen, dann sind in einer weiteren Ziehung jene Nummern zu bestimmen, welche die Gewinnste erhalten, und wie hoch sich diese Gewinnste für die einzelnen Lose belaufen.

Offenbar können noch eine Menge Modifikazionen in den frühern Anordnungen getroffen, ja auch ganz andere, von diesen ganz und gar verschiedene Bedingungen festgesetzt werden.

§. 247. Alle Unternehmungen dieser Art stehen unter der Aufsicht der Staatsverwaltung, und die Unternehmer haben vorschriftsmäßig eine als hinreichend anerkannte Garantie zu leisten. Die Ziehungen werden unter der Aufsicht der von der hohen Staatsverwaltung eigens hierzu aufgestellten Beamten vorgenommen. Wann nach der Ziehung die Übergabe der Gewinne erfolgt, wird in dem Spielplane angezeigt.

§. 248. Bezüglich auf die hierbei erforderlichen Berechnungen, welche immer sehr einfach, und größtentheils willkürlich gewählt sind, scheint es am zweckdienlichsten, dieselben in einem speziellen Beispiele nachzuweisen.

(1) Es sollen zwei Realitäten **A** und **B**, dann ein Silberservise **C**, nebst mehreren Vor- und Nach-, so wie mit mehreren Geldtreffern verloset werden. Wie viele verkäufliche Lose zu **12** fl. **30** Kr. W. W. und wie viele Freilose sind zu machen, wenn auf jede vier verkäufliche Lose ein Freilos gegeben wird, welches fünfzehn Gulden sicherer Gewinn treffen muß?

Nähere Bestimmungen für diese Aufgabe.

Der Schätzungswerth der Realität **A** sey **120000** fl., welche den Haupttreffer ausmachen. Dieser Haupttreffer hat Einen Vor- und Einen Nachtreffer von **2000** fl., **2** Vor- und **2** Nachtreffer, à **1000** fl., **10** Vor- und Nachtreffer, à **500** fl., **50** Vor- und Nachtreffer, à **100** fl., **100** Vor- und Nachtreffer, à **50** fl.

Die Realität **B** ist im Schätzungswerthe von **80000** fl. und macht den zweiten Haupttreffer aus. Dazu gehört Ein Vor- und Nachtreffer, à **1500** fl., **2** Vor- und Nachtreffer, à **750** fl., **10** Vor- und Nachtreffer, à **400** fl., **50** Vor- und Nachtreffer, à **75** fl., **100** Vor- und Nachtreffer, à **40** fl.

Der Silberservise **C**, als dritter Haupttreffer, ist auf **60000** fl. geschätzt. Dazu gehören: Ein Vor- und Nachtreffer, à **1200** fl., **2** Vor- und Nachtreffer, à **600** fl., **10** Vor- und Nachtreffer, à **350** fl., **50** Vor- und Nachtreffer, à **70** fl., dann **100** Vor- und Nachtreffer, à **36** fl.

Außer diesen Haupttreffern sind zur Verlosung noch bestimmt: Ein Treffer von **20000** fl.; **2** Treffer, à **10000** fl.; **4** Treffer, à **6000** fl.; **6** Treffer, à **4000** fl.; **10** Treffer, à **1000** fl.; **100**, à **500** fl.; **500**, à **100** fl.; **1000**, à **50** fl.; **2000**, à **25** fl.

Die Verlosungskosten werden auf **120000** fl. angeschlagen; ferner soll das Risiko auf **25%** aller Gewinnste, sammt den Verlosungskosten, berechnet werden.

Berechnung.

Zur Deckung der Treffer müssen durch den Verkauf der Lose einkommen:

Wegen der Realität **A**		fl.	**120000.**
1 Vortreffer, **1** Nachtreffer,	à **2000** fl........fl. **4000**		
2 Vor- **2** Nach-	Treffer, à **1000** fl....fl. **4000**		
10 Vor- **10** Nach-	Treffer, à **500** fl....fl. **10000**		
50 Vor- **50** Nach-	Treffer, à **100** fl....fl. **10000**		
100 Vor- **100** Nach-	Treffer, à **50** fl......fl. **10000**		
		"	**38000.**
Wegen der Realität **B**		"	**80000.**
1 Vor- **1** Nach-	Treffer, à **1500** fl....fl. **3000**		
2 Vor- **2** Nach-	Treffer, à **750** fl......fl. **3000**		
10 Vor- **10** Nach-	Treffer, à **400** fl......fl. **8000**		
50 Vor- **50** Nach-	Treffer, à **75** fl........fl. **7500**		
100 Vor- **100** Nach-	Treffer, à **40** fl........fl. **8000**		
		"	**29500.**
	Fürtrag . . .	fl.	**267500.**

	Übertrag . . .	fl. 267500.
Wegen des Silberservises C		„ 60000.
1 Vor- / 1 Nach- Treffer, à 1200 fl....	fl. 2400	
2 Vor- / 2 Nach- Treffer, à 600 fl......	fl. 2400	
10 Vor- / 10 Nach- Treffer, à 350 fl......	fl. 7000	
50 Vor- / 50 Nach- Treffer, à 70 fl........	fl. 7000	
100 Vor- / 100 Nach- Treffer, à 36 fl........	fl. 7200	
		„ 26000.
1 Treffer		„ 20000.
2 „ à 10000 fl.		„ 20000.
4 „ à 6000 „		„ 24000.
6 „ à 4000 „		„ 24000.
10 „ à 1000 „		„ 10000.
100 „ à 500 „		„ 50000.
500 „ à 100 „		„ 50000.
1000 „ à 50 „		„ 50000.
2000 „ à 25 „		„ 50000.
Für die zu ziehenden Gewinnste zusammen . .		fl. 651500.
Vorangeschlagene Kosten		„ 120000.
		fl. 771500.
Risiko zu 25%		„ 192875.
Preis aller Lose		fl. 964375.

Nehmen wir an, die Anzahl der verkaufbaren Lose sey x, so muß die Anzahl der Freilose, welche der $1/5$ Theil aller Lose seyn sollen, der $1/4$ Theil der verkaufbaren Lose, oder gleich $\frac{x}{4}$ Theile seyn. Es muß daher der durch die verkaufbaren Lose herbeizuschaffende Betrag, außer dem erwähnten Betrage von 964375 fl., noch den auf die Freilose entfallenden Betrag, welcher $\frac{x}{4} \times 15$ ist, enthalten. — Da ein verkaufbares Los $12\frac{1}{2}$ fl. kostet, so werden alle x Lose um $\frac{25x}{2}$ Gulden verkauft, woraus sich die Gleichung ergibt:

$$964375 + \frac{15x}{4} = \frac{25x}{2}.$$

Hieraus findet man $x = 110214\frac{2}{7}$.

Hierfür kann man zur noch größeren Sicherheit der Unternehmer
110300 verkaufbare, also
27575 Freilose nehmen. — Sonach werden die Lose von Nr. 1 bis inclusive Nr. 137875 fortlaufen müssen.

Übersicht.

Laut früheren Ausweises betragen die zu ziehenden Gewinnste . .	fl.	651500.
Die im Voraus in Anschlag gebrachten Kosten	„	120000.
Die Auslagen für 27575 Freilose, à 15 fl.	„	413625.
Zusammen . . .	fl.	1,185125.

Durch die 110300, à 12½ fl., verkaufbaren Lose, kömmt ein Betrag von 1,378750 fl. ein, woraus sich für das Risiko der Unternehmer noch ein Betrag von 193625 fl. ergibt, also um 750 fl. mehr als ursprünglich angenommen wurde.

Die Anzahl aller Gewinnste beträgt in dem erwähnten Beispiele:

Haupttreffer	3
Geldgewinnste	3623
Vor- und Nachtreffer . . .	978
Freilose.	27575
Zusammen . . .	32179.

(2) Welcher ist, in der vorstehenden Aufgabe, der eigentliche Preis eines verkaufbaren Loses?

Zur Auflösung dieser Aufgabe mögen folgende Bemerkungen dienen:

Da auf vier verkaufbare Lose Ein Freilos kommt, welches wenigstens 15 fl. gewinnt, die vier verkaufbaren Lose aber mit 50 fl. bezahlt werden, da ferner die Freilose eben so wie die verkaufbaren Lose mitspielen, so folgt, daß alle 5 Lose mit 35 fl. bezahlt werden, wovon jedes verkaufbare Los den Preis von 7 Gulden, das Freilos aber den Preis von 22 fl. hat.

In ein noch niederes Verhältniß als 7 : 22 müßte sich der Preis eines verkaufbaren Loses zu den eines Freiloses für den Fall stellen, als für die Freilose eine abgesonderte Prämienziehung Statt finden sollte, weil in diesem Falle die Hoffnung des Gewinnes für ein Freilos sich noch günstiger herausstellen müßte, als die für den Gewinn für ein gewöhnliches verkaufbares Los.

Ein und zwanzigster Abschnitt.

Von den Sterblichkeits-Tafeln.

§. 249. In vielen Verhältnissen des Lebens ist es wünschenswerth zu wissen, wie lange ein Mensch von einem bestimmten Alter noch leben werde; wie viele von einer Summe gleich alter Personen in jedem Jahre sterben, u. dgl.

Wenn gleich der schwache Mensch nie im Stande war, und es auch nie seyn wird, derlei Fragen genau zu beantworten, oder die Dauer des Lebens einzelner Personen mit apodiktischer Gewißheit anzugeben, so hat er doch durch seinen Fleiß seit mehreren Jahrhunderten in verschiedenen Ländern Erfahrungen gesammelt über die Menge der Sterbfälle, die sich bei gleich alten Personen in ihren verschiedenen Altersstufen ereignet haben, und über ihr wechselseitiges Verhältniß unter einander. — Die Resultate solcher Erfahrungen ge-

hörig geordnet und numerisch zusammengestellt, heißen Sterblichkeits-Tafeln, Mortalitäts-Tafeln, und geben uns ein Mittel an die Hand, durch welches man bei dem gegebenen Alter einer Person die Wahrscheinlichkeit für ein noch weiter zu erreichendes Alter eben dieser Person u. dgl. angeben kann.

Ist es gleich wahr, daß die Wirklichkeit mit dieser W in sehr wenigen Fällen ganz genau zusammentrifft, so lehrt doch die Erfahrung, daß die Anzahl der früher sterbenden Personen gegen die der länger Lebenden sich dergestalt kompensirt, daß man für jede Berechnung, zumal in größeren Massen, als für welche solche Berechnungen nur angestellt werden, annehmen kann, daß alle Personen wirklich zu der Zeit sterben, welche durch die Sterblichkeits-Tafel nachgewiesen wird.

§. 250. Wir besitzen mehrere solche Sterblichkeits-Tafeln, unter welchen die vorzüglichsten folgende sind:

1. Die älteste hat der Engländer Halley aus den Sterbelisten der Stadt Breslau für die Jahre **1687** bis **1691** berechnet.

2. Die Tabelle, welche Wargentin nach den über Schweden gesammelten Beobachtungen verfertiget hat. Diese Tabelle, nach welcher das Absterben, im Ganzen genommen, langsamer als in andern Tabellen angegeben ist, wurde besonders für das nördliche Europa als zweckdienlich erkannt.

3. Die Süßmilch-Baumann'sche, welche zuerst Süßmilch aus sehr vielen Erfahrungen zusammen gesetzt, und später Baumann noch mehr berichtiget hat. Diese Tabelle ist für Deutschland und das mittlere Europa überhaupt, besonders auf die Volksmenge im Ganzen, anwendbar.

Anmerkung. Sieh die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes, vierte von Baumann besorgte Ausgabe. Berlin 1775 bis 1787. Band II. Seite 319.

4. Die von **Déparcieux** entworfene, und von Florencourt verbesserte Tabelle für die Sterblichkeit der Rentenirer. Sie bezieht sich auf ausgesuchte Gesellschaften solcher Personen, die der gewöhnlichen Nahrungssorgen überhoben und keinen großen Leibesanstrengungen unterworfen sind.

Anmerkung. Abhandlung aus der juristischen und politischen Rechenkunst von C. C. von Florencourt. Altenburg 1771 in Quarto.

5. **Loi de la mortalité en France, d'après Duvillard par le bureau des longitudes**; sieh **Annuaire pour l'an 1839. Paris, page 182.** — Diese Tabelle gehört der neueren Zeit an, und berücksichtiget die Folgen mit, welche von einer gegen die ältere geänderten Lebensweise, und von neueren zur Verminderung der Sterblichkeit gemachten Entdeckungen und getroffenen Maßregeln herrühren, wie z. B. von den Folgen der Kühpocken-Impfung u. dgl. Ferner wurde diese Sterblichkeits-Tafel nicht aus den Erfahrungen an einem einzelnen Orte, sondern aus allen im ganzen Königreiche Frankreich gesammelten Erfahrungen aufgestellt. Ihre ganz besondere Brauchbarkeit erhellet auch daraus, weil ihre Resultate sich dem Durchschnitte aus allen übrigen am meisten annähern.

6. **Loi de la mortalité dans la ville de Northampton.**

7. **Loi de la mortalité dans la ville de Carlisle.** Diese beiden letzteren findet man in demselben **Annuaire de Paris pour l'an 1839, pages 186 et 187**; sie sind aber minder gebrauchbar, weil sie sich bloß auf einzelne Städte beziehen.

§. 251. Um eine Sterblichkeits-Tabelle anzufertigen, trachte man über alle in einem Lande, in einem Kreise, in einem Orte vorgefallenen Sterbefälle in Einem Jahre, und wo möglich, in vielen Jahren, die zuverlässigsten Nachrichten einzuholen; und zwar nicht nur hinsichtlich ihrer Anzahl, als ganz besonders hinsichtlich des Alters jedes einzelnen Verstorbenen. Je zahlreicher die gesammelten Erfahrungen sind, desto weniger werden die einzelnen unvermeidlichen Unrichtigkeiten in den Angaben auf die Resultate einen Einfluß nehmen.

Gesetzt, man habe aus den sorgfältig gesammelten Nachrichten gefunden, daß an einem Orte, in welchem während Eines Jahres **6000** Personen sterben*), und in welchem

in dem Alter von	**0** bis **1** Jahr **1395**	gestorben sind, so findet man hieraus, daß von **6000** Personen nach	**1** Jahr noch **4605**	am Leben sind,
	1 „ **2** „ **574**		**2** „ „ **4031**	
	2 „ **3** „ **283**		**3** „ „ **3748**	
	3 „ **4** „ **156**		**4** „ „ **3592**	
	4 „ **5** „ **90**		**5** „ „ **3502**	
	5 „ **6** „ **61**		**6** „ „ **3441**	
	6 „ **7** „ **43**		**7** „ „ **3398**	

u. s. w.

Die in der letzten Kolumne enthaltenen Zahlen sind es gewöhnlich, welche man in den Sterblichkeits-Tabellen als Angaben auffindet (sieh das genannte **Annuaire pour l'an 1839, pages 182, 186, 187**, und die in der hier angehängten Tabelle Nr. **XXXIV** aufgestellten verschiedenen Sterblichkeits-Angaben), aus welchen man, den verschiedenen Zwecken anpassend, noch verschiedene andere Resultate ableitet, und in Kolumnen setzt, deren Benennung und Ableitung dem Wesentlichen nach hier angegeben, und durch die angehängten Tabellen Nr. **XXXV** und **XXXVI** erläutert werden soll.

Die Kolumne **B** enthält die früher genannten Angaben. In der Kolumne **A** befindet sich von jeder Angabe in **B** die Differenz zwischen dieser Angabe und der nächst folgenden. So findet man in der Tabelle Nr. **XXXV** bei dem Alter **0** bis **1** bei **A** die Zahl **232475**, bei **B** die Zahl **1,000000**; und in der Tabelle Nr. **XXXVI** bei **A** die Zahl **250**, bei **B** die Zahl **1000**, für welche Fälle die Zahlen bei **A** die beziehungsweisen Differenzen zwischen **1,000000** oder **1000**, und den nächst darauf folgenden Angaben **767525** oder **750** sind. Eben so findet man in der Duvillard'schen Tabelle bei dem Alter zwischen **24** und **25** Jahren in der Kolumne **A** die Zahl **6411**, welche anzeigt, daß von der in der Kolumne **B** sich vorfindenden Anzahl von Lebenden **477777** in diesem Jahre **6411** sterben, und somit am Schlusse des **25**sten oder am Anfange des **26**sten Jahres noch **471366** leben.

Die Kolumne **C**, mit der Aufschrift: Summe aller Lebensjahre, enthält die Summe aller Posten in der Kolumne **B** von unten auf addirt. Die Zahlen dieser Kolumne geben sonach an, wie viele Jahre die in der Kolumne **B** sich vorfindende Anzahl von Lebenden zusammen noch leben werden. So finden wir in der Tabelle Nr. **XXXV** bei dem Alter von **24** bis **25** Jahren, daß **477777** Personen dieses Alters zusammen noch **15,483915** Jahre zu leben Hoffnung haben.

---

*) Die Anzahl aller in Einem Jahre Verstorbenen kann man als die Anzahl der in Einem und demselben Jahre Gebornen betrachten, von welchen in dem angeführten Verhältnisse das Absterben erfolgt.

Dividirt man jede Zahl der Kolumne **C** durch die nebenstehende Zahl der Kolumne **B**, so erhält man die Anzahl Jahre, die eine jede Person des vorstehenden Alters noch leben würde, wenn sie alle gleich alt werden sollten, jedoch unter der Bedingung, daß sie alle am letzten Tage des Jahres sterben; richtiger aber ist die Annahme, daß sie alle schon in der Hälfte des Jahres sterben, daher der vorige Quozient um ½ zu vermindern kömmt. Die in dieser Beziehung entfallenden Resultate befinden sich in den Tabellen in der Kolumne **D**, unter der Aufschrift: Mittlere Lebensdauer. So finden wir in der Tabelle Nr. **XXXV** die mittlere Lebensdauer einer Person, im Alter von **24** bis **25** Jahren, gleich $\frac{15{,}483915}{477777} - \frac{1}{2} = 32{\cdot}41 - 0{\cdot}5 = 31{\cdot}91$.

Von dieser mittleren Lebensdauer ist die sogenannte wahrscheinliche künftige Lebensdauer wohl zu unterscheiden. Hierunter versteht man bei dem gegebenen Alter einer Person jene Zeit, in welcher die Hälfte der Personen desselben Alters gestorben seyn wird. Will man nach der Tabelle Nr. **XXXV** die wahrscheinliche künftige Lebensdauer einer Person im Alter von **24** bis **25** Jahren wissen, so suche man in der Kolumne **B** die Anzahl der in diesem Alter noch Lebenden, d. i. die Zahl **477777** auf, nehme hiervon die Hälfte, d. i. **238888**, und sehe, zwischen welche zwei andere Zahlen dieser Kolumne **B** diese Hälfte hineinfällt. Für den herausgehobenen Fall finden wir die nächst größere Zahl **240214**, die nächst kleinere **231488**, woraus folgt, daß alle diese Personen, wenn sie gleichzeitig sterben würden, das Alter von **57** bis **58** Jahren, oder genauer, das Alter von **57·2** Jahren, erreichen müßten. Da sie aber schon **24** Jahre alt sind, so ist die wahrscheinliche künftige Lebensdauer jeder einzelnen Person **57·2** — **24** = **33·2** Jahre. Die sich hierauf beziehenden Resultate sind in der Kolumne **E** aufgeführt.

Die Kolumne **F** gibt bei jedem Alter die Sterblichkeit nach Prozenten an, d. h. sie gibt an, wie viele von **100** gleich alten Personen in jeder Altersstufe absterben. Jede in dieser Kolumne vorhandene Zahl findet sich aus einer Proporzion, in welcher die dem gegebenen Alter entsprechende Zahl aus der Kolumne **B** das erste, die aus **A** das zweite, die Zahl **100** aber das dritte Glied ist. So findet man nach der Tabelle Nr. **XXXV** für das Alter von **24** bis **25** Jahren aus der Proporzion **477777 : 6411 = 100 : x**, daß die Sterblichkeit für dieses Alter gleich **1·342** ist.

Die Dezimalen, welche in diesen Fällen nie vernachläßiget werden dürfen, haben folgenden Sinn:

Von den **24**jährigen Personen sterben in diesem Alter:

Von	100	mehr	als	Einer,
„	1000	„	„	13
„	10000	„	„	134
„	100000	„	„	1342 u. s. w.

Nicht selten geschieht die Frage: Von wie vielen Personen desselben Alters stirbt jährlich Eine? Die entsprechende Zahl wird für den mehrmals erwähnten Fall für das Alter von **24** bis **25** Jahre offenbar durch die Proporzion **6411 : 477777 = 1 : x**, oder auch dadurch gefunden, daß man den Ausdruck $\frac{100}{1{\cdot}342}$ entwickelt. Man findet sonach **74·524**, d. h.

man findet, daß von 74 Personen, deren jede 24 Jahre alt ist, jährlich Eine, von 745 Personen 10, von 7452 solchen 100, und noch genauer, von 74524 Personen 1000 muthmaßlich sterben werden, ohne das Alter von 25 Jahren zu erreichen. Die sich hierauf beziehenden Resultate sind in der Kolumne G angegeben.

Zwei und zwanzigster Abschnitt.

Von den Veränderungen in der Bevölkerung eines Landes.

§. 252. Für viele statistische Berechnungen ist es nothwendig, außer den früher erwähnten Sterblichkeitstafeln, auch sorgfältig ausgefertigte Geburtstafeln, so wie auch Tafeln über die Anzahl der bestehenden Ehen für einzelne Orte und ganze Länder zu haben. Diese, mit den Sterblichkeits-Tafeln zusammen, geben die Angaben, aus deren Vergleichung es möglich wird, die vorkommenden Fragen über die Bevölkerung eines Ortes oder Landes und ihrer Veränderung gehörig zu beantworten.

Diese Angaben findet man am sorgfältigsten und am zahlreichsten gesammelt in dem mehrmals erwähnten **Annuaire de Paris pour l'an 1839**, welche für die Stadt Paris auf Anordnung des Departements-Präfekten, für ganz Frankreich auf Anordnung des Ministers des Innern gesammelt, und durch das **Bureau des Longitudes** geprüft und bekannt gemacht werden.

So findet man, page 119 bis 121, unter der Aufschrift: Veränderung in der Bevölkerung der Stadt Paris während des Jahres 1837 folgende Angaben:

Geburten:

	Männliche.	Weibliche.	Zusammen.
Eheliche	9910	9704	19614
Uneheliche . . .	4741	4837	9578
Zusammen	14651	14541	29192

Geschlossene Ehen.

Jünglinge mit Jungfrauen . . .	6788
Jünglinge mit Witwen.	430
Witwer mit Jungfrauen	878
Witwer mit Witwen	260
Zusammen . . .	8356.

Sterbfälle.

	Männlich.	Weiblich.	Zusammen.
In ihren Wohnungen . . .	8040	9087	17127
In den Civil-Spitälern . .	4586	4921	9507
In den Militär-Spitälern .	1083	14	1097
In den Gefängnissen	67	32	99
Todtgefundene	235	69	304
	14011	14123	28134

Aus der Gesammtzahl der Geburten 29192
und der Anzahl der Sterbefälle . . 28134 ergibt sich für das Jahr 1837

eine Vermehrung der Bevölkerung für
Paris von . . . . 1058 Personen.

Im ganzen Königreiche Frankreich findet man für das Jahr 1836, page 132 und 133.

Geburten.

	Männliche.	Weibliche.	Zusammen.
Eheliche . . .	467002	439316	906318
Uneheliche . .	37436	36066	73502
Zusammen	504438	475382	979820.

Geschlossene Ehen . . . 274145.

Sterbfälle.

Männlich.	Weiblich.	Zusammen.
390380.	381320.	771700.

Aus der Gesammtzahl der Geburten 979820, und
" " " " Sterbefälle 771700 ergibt sich für das Jahr 1836

im Königreiche Frankreich ein Zuwachs
von. . . . . 208120 Personen, worunter 114058 männlichen, und 94062 weiblichen Geschlechtes sind.

In eben diesem Werke findet man, page 134 et 135, alle hierher gehörigen Resultate vom Jahre 1817 bis inclusive 1836, d. i. von vollen 20 Jahren zusammengestellt. Diese Resultate sind in der hier angehängten Tabelle Nr. XXXVII aufgeführt und summirt, auch ist aus diesen Summen eben daselbst der Durchschnitt berechnet.

§. 253. Aus den in der Tabelle Nr. XXXVII aufgeführten Resultaten findet man, daß während dieser 20 Jahre in ganz Frankreich 10,000562 Knaben, und 9,399888 Mädchen geboren worden sind, daß mithin die Anzahl aller Geburten 19,400450 beträgt. — Bestimmt man zu dem Verhältnisse 10,000562 : 9,399888 die Näherungsverhältnisse, und nimmt man von diesen das dritte, so erhält man 17 : 16; würde man das vierte nehmen, so wäre dieses 33 : 31, d. h. man kann annehmen, daß, so oft 17 Knaben geboren werden, die Anzahl der in derselben Zeit gebornen Mädchen 16 ist; oder genauer: so oft 33 Knaben geboren werden, werden auch 31 Mädchen geboren. — Sucht man diese Verhältnisse von Jahr zu Jahr, so findet man, daß sie beinahe beständig sind, und zwischen 15 : 14 und 19 : 18 schwanken. Das Verhältniß 17 : 16. und noch genauer: 33 : 31, verdient vollen Glauben, weil es aus einer Anzahl von beinahe 19½ Millionen Geburten abgeleitet ist, und dieß um so mehr, da es sich aus früheren, z. B. aus dem 18jährigen Durchschnitte aus beinahe 17½ Millionen Geburten ganz genau eben so bestimmt. — Stellt man dieses Verhältniß der Anzahl Geburten vom männlichen und weiblichen Geschlechte aus den Angaben von den 86 einzelnen Departements auf, so findet man einen äußerst geringen, ganz und gar nicht zu beachtenden Unterschied auf, so daß man zu schließen berechtiget ist, daß das Klima hierauf keinen Einfluß habe.

Stellt man aus den Durchschnittsresultaten von der Summe aller während des Zeitraumes von **20** Jahren ehelich gebornen Kinder **18,014959** und der Summe der unehelich gebornen **1,385491** ein Verhältniß auf, so findet man dieses gleich **13 : 1**, d. h. auf **13** eheliche Geburten folgt Eine uneheliche, oder unter **14** Geburten kann man Eine uneheliche annehmen.

Eben so wie die Anzahl der gebornen Knaben die Anzahl der Mädchen übertrifft, so ist auch die Anzahl der Sterbenden des männlichen Geschlechtes wieder größer, als die Anzahl der vom weiblichen Geschlechte Sterbenden. Die beziehungsweisen Zahlen und ihr Verhältniß sind **8,081630 : 7,939184**, oder mittelst der Näherungsverhältnisse in kleinern Zahlen dargestellt, **57 : 56**, oder genauer, **170 : 167** u. s. w. (Sonst hat man das Verhältniß **55 : 54** aufgestellt.)

Vergleicht man die Zahl aller Einwohner in Frankreich vom Jahre **1836** (**Annuaire, pag. 159**) **33,540910** mit der Anzahl der in diesem Jahre abgeschlossenen Ehen (**pag. 135**) **274145**, so findet man, daß man auf **122** Einwohner jährlich Eine Ehe rechnen kann, oder genauer, auf **1223** Einwohner **10** Ehen. (Sonst Eine Ehe auf **130**.)

Vergleicht man die Anzahl aller Einwohner vom Jahre **1836** oder die Zahl **33,540910** mit der Anzahl der in diesem Jahre Verstorbenen **771700**, so findet man, daß von **43** Einwohnern Einer, oder genauer, daß von **4346** Einwohnern **100** sterben. (Sonst Einer von **40**.)

Vergleicht man die Zahl aller Einwohner vom Jahre **1836** oder die Zahl **33,540910** mit der Anzahl der in diesem Jahre Gebornen, d. i. mit **979820**, so findet man, daß man auf **34·23** Einwohner Eine, oder auf **3423** Einwohner **100** Geburten rechnen kann. (Sonst Eine auf **32·7**.)

Dividirt man die Summe aller Einwohner **33,540910** durch den Zuwachs der Bevölkerung in diesem Jahre, d. i. durch **208120**, so findet man den Quozienten **161**, welcher angibt, daß die Vermehrung der Bevölkerung $\frac{1}{161}$ beträgt. Berücksichtigt man nebenbei, daß unter den **979820** Geburten **504438** auf das männliche und **475382** auf das weibliche Geschlecht fallen, und theilt man den Bruch $\frac{1}{161}$ im Verhältnisse dieser Zahlen, so findet man für das Anwachsen der Bevölkerung durch das männliche Geschlecht den Bruch **0·003195**, für das Anwachsen der Bevölkerung durch das weibliche Geschlecht den Bruch **0·003016**, woraus folgt, daß das Anwachsen der Bevölkerung rücksichtlich der Geschlechter im Verhältnisse wie **3195 : 3016** stehe. Es folgt also auch hieraus, daß das Zuwachsen der Bevölkerung wieder eine Vermehrung des männlichen Geschlechtes bewirkt.

§. 254. Beziehungsweise auf die Veränderung in der Bevölkerung des Österreichischen Kaiserstaates entlehnen wir die Daten der neuesten Zeit aus **Dr. Becher's** statistischer Übersicht der Bevölkerung der Österreichischen Monarchie. (Stuttgart und Tübingen, Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung, **1841**.)

Summarische Uebersichten der Bevölkerung im Jahre 1840.

I. Wohnorte, Häuser und Familien.

Länder.	Flächeninhalt in Österr. Q. Meil	Wohnorte. Städte.	Märkte.	Dörfer.	Zusammen.	Häuser.	Familien.
Oesterreich u. d. Ens	344	35	239	4305	4579	160893	306411
Oesterreich ob d. Ens	333	17	114	6722	6853	127184	187238
Steiermark	390	20	96	3593	3709	162256	196129
Kärnten und Krain .	354	25	42	5927	5994	115254	157309
Küstenland	138	30	14	944	988	66247	112069
Tirol	494	22	28	1423	1473	118668	170632
Böhmen	884	286	279	12053	12618	576976	971583
Mähren u. Schlesien	476	116	184	3672	3972	308717	495442
Galizien	1561	96	193	6056	6345	687396	1,117946
Dalmazien	224	15	35	824	874	69855	65533
Summe	5198	662	1224	45519	47405	2,393446	3,780292
Lombardie	377	14	138	4132	4284	298105	507182
Venedig	411	22	239	3213	3474	363541	421426
Summe	788	36	377	7345	7758	661646	928608
Ungarn	4000	56	645	11795	12496	1,771900	2,568000
Siebenbürgen	962	29	46	2305	2380	312500	366400
Militärgrenze	683	12	23	2038	2073	140209	129911
Summe	5645	97	714	16138	16949	2,224609	3,064311
Hauptsumme	11631	795	2315	69002	72112	5,279701	7,773211

II. Bevölkerung nach dem Geschlechte, das Militär und ihre Vertheilung nach dem Flächeninhalte.

Länder.	Bevölkerung mit Anfang des Jahres 1840. Männliche.	Weibliche.	Zusammen.	Darunter v. Militär.	Auf d. Q. M. entfallen: mit Militär.	ohne Militär.
Oesterreich unter d. Ens	705861	703765	1,409626	34226	4098	3998
Oesterreich ob der Ens	420504	437064	857568	12652	2575	2537
Steiermark	480967	494342	975309	18446	2501	2453
Kärnten und Krain. .	366145	393396	759541	10257	2146	2117
Küstenland	242486	238703	481189	6409	3487	3440
Tirol	417522	422233	839755	8807	1700	1682
Böhmen	1,983834	2,190334	4,174168	62083	4722	4652
Mähren und Schlesien	1,044305	1,122333	2,166638	39359	4552	4469
Galizien	2,381581	2,415662	4,797243	78252	3073	3023
Dalmazien	206313	187715	394028	9456	1759	1717
Summe	8,249518	8,605547	16,855065	279947	3243	3189
Lombardie	1,292032	1,255944	2,547976	31556	6759	6675
Venedig	1,104181	1,064372	2,168553	30945	5276	5201
Summe	2,396213	2,320316	4,716529	62501	5985	5906
Ungarn	5,917202	6,179000	12,096202	56802	3024	3010
Siebenbürgen	1,023300	1,055700	2,079000	9400	2161	2151
Militärgrenze	616398	587207	1,203605	56322	1762	1680
Summe	7,556900	7,821907	15,378807	122524	2724	2703
Hauptsumme	18,202631	18,747770	36,950401	464972	3177	3137

III. Bevölkerung nach der Religionsverschiedenheit.

Länder.	Katholiken	Unirte (Griechen)	Nicht-unirte (Griechen)	Protestanten. Augsburger (Konfession)	Protestanten. Helvetischer (Konfession)	Protestanten. Unitarier.	Andere Sekten	Juden.
Oesterreich u. der Ens.....	1357522	536	395	11510	1893	—	18	3526
Oesterreich ob der Ens.....	829577	—	—	15266	34	—	38	1
Steiermark..	951537	—	2	5247	77	—	—	—
Kärnten und Krain.......	730829	183	199	17739	326	—	—	8
Küstenland...	468255	6	1850	446	741	—	29	3453
Tirol..........	829868	—	—	—	120	—	—	960
Böhmen......	3962652	—	7	33248	51330	—	68	64780
Mähren und Schlesien...	1983402	—	—	77626	28935	—	—	37316
Galizien......	2055566	2077995	269327	28128	1892	—	2738	283345
Dalmazien...	311295	693	71992	—	26	—	—	566
Summe	13480503	2079413	343772	189210	85374	—	2891	393955
Lombardie...	2512920	—	—	170	414	—	—	2916
Venedig......	2132574	58	385	157	45	—	—	4389
Summe	4645494	58	385	327	459	—	—	7305
Hauptsumme	18125997	2079471	344157	189537	85833	—	2891	401260
Ungarn.......	6897500	919400	1302100	858300	1800100	—	—	262000
Siebenbürg..	207400	571400	686300	215400	343200	42500	—	3400
Militärgrenze	473222	57887	568585	12950	31529	2631	—	479
Summe	7578122	1548687	2556985	1086650	2174829	45131	—	265879
Totalsumme	25704119	3628158	2901142	1276187	2260662	45131	2891	667139

IV. Geburten.

a) Eheliche und uneheliche, nach dem Geschlechte und der Religion.

Länder.	Eheliche. Männl.	Eheliche. Weibl.	Uneheliche. Männl.	Uneheliche. Weibl.	Kathol. u. unirte Griechen.	Nicht unirte Griechen.	Protestant.	Juden.
Oesterreich unter d. Ens	20669	19667	6676	6370	52945	1	297	139
Oesterreich ob der Ens	10508	10041	2387	2343	24885	1	393	—
Steiermark	12184	11287	3798	3681	30822	—	128	—
Kärnten und Krain . .	9637	9088	2113	2073	22548	—	363	—
Küstenland	8523	7944	674	652	17589	65	25	
Tirol	12859	12073	603	596	26099	—	15	17
Böhmen	71936	66900	12189	11610	158318	1	2642	1674
Mähren und Schlesien	38267	35921	5447	5333	79835	—	4092	1041
Dalmazien	5684	5540	195	216	9592	2026	—	17
Lombardie	51547	48023	2413	2298	104203	—	13	65
Venedig	41342	38750	1134	1001	82101	4	3	119
Militärgrenze	26230	24786	317	292	24374	25308	1921	22

Anmerkung. Die Nachweisungen von Galizien, Ungarn und Siebenbürgen vom Jahre 1840 über die Geburten, Trauungen und Sterbefälle sind zu unvollständig, wurden daher nicht aufgenommen.

b) Todte Geburten.

Länder.	Eheliche.		Uneheliche.		Im Ganzen.		Die Todt- zu den Lebendgebornen verhalten sich wie Eins zu
	Männl.	Weiblich	Männl.	Weiblich	Männl.	Weiblich	
Oesterreich u. der Ens	414	313	217	202	727	419	46 7/16
Oesterreich ob der Ens	188	111	49	46	299	95	394
Steiermark	262	156	95	71	418	166	53
Kärnten und Krain .	129	95	26	22	224	48	84
Küstenland	157	111	22	27	268	49	56
Tirol	66	37	11	6	103	17	217
Böhmen	1390	935	336	281	2325	617	55
Mähren und Schlesien	490	287	113	96	777	209	86
Dalmazien	11	11	5	7	22	12	342
Lombardie	675	436	55	44	1111	99	106
Venedig	438	232	9	12	670	21	119
Militärgrenze	256	192	7	7	448	14	112

c) Geburten nach dem Geschlechte und der Art, und dem gegenseitigen Verhältnisse.

Länder.	Geschlecht.		Art.		Die unehelich. zu den ehelich. verhalten sich wie Eins zu:	Summe	Todte Geburten.	Es wurden mehr geboren als starben.
	Männlich.	Weiblich.	Eheliche	Uneheliche.				
Oesterr. u. d. Ens	27345	26037	40336	13046	3 1/10	53382	1146	2207
Oesterr. ob d. Ens	12895	12384	20549	4730	4	25279	394	1497
Steiermark . . .	15982	14968	23471	7479	3 1/4	30950	584	1908
Kärnten u. Krain	11750	11161	18725	4186	4,5	22911	272	857
Küstenland . . .	9197	8596	16467	1326	12,4	17793	317	2524
Tirol	13462	12669	24932	1199	20,8	26131	120	4019
Böhmen	84447	78764	139410	23801	5,9	163211	2942	47996
Mähren u. Schles.	43714	41254	74188	10780	6,9	84968	986	24595
Dalmazien . . .	5879	5756	11224	411	27,3	11635	34	1846
Lombardie . . .	53960	50321	99570	4711	21	104281	1210	19634
Venedig.	42476	39751	80092	2135	37	82227	691	12972
Militärgrenze . .	26547	25078	51016	609	84	51625	462	2601

V. Trauungen.

a) Trauungen nach dem Stande und der Religion.

Länder.	Beide Theile ledig.	Beide Theile verwitwet.	Vermischte.	Katholische u. unirt-griech.	Nicht unirt-griechische.	Protestantische.	Vermischte.	Jüdische.	Summe aller Trauungen.
Oesterr. u. d. Ens	8591	390	2543	11159	2	21	310	9	11524
Oesterr. ob d. Ens	4407	118	1477	5884	—	86	32	--	6002
Steiermark . . .	4687	184	1888	6736	—	13	10	—	6759
Kärnten und Krain	3900	110	919	4829	—	85	15	—	4929
Küstenland	2663	186	579	3360	4	11	17	36	3428
Tirol	4041	139	807	4987	—	—	—	—	4987
Böhmen	26871	1219	6037	32928	—	454	476	269	34127
Mähren u. Schles.	13596	781	3483	16682	1	843	165	169	17860
Dalmazien. . . .	2236	158	293	2230	436	—	18	3	2687
Lombardie	15470	1753	3225	20413	—	—	3	32	20448
Venedig	13083	1264	2274	16580	—	—	4	37	16621

b) Trauungen nach dem Alter.

Länder.	Männlichen Geschlechtes.						Weiblichen Geschlechtes.					
	Bis 24	Von 24–30	Von 30–40	Von 40–50	Von 50–60	Ueber 60	Bis 20	Von 20–24	Von 24–30	Von 30–40	Von 40–50	Ueber 50
	Jahre.						Jahre.					
Oesterr. u. d. Ens	1802	4097	3571	1378	485	191	855	2612	4199	2738	890	230
Oesterr. ob d. Ens	935	1755	1979	889	327	117	416	1289	1975	1592	586	144
Steiermark	1497	1925	1998	909	319	111	708	1588	2021	1679	650	113
Kärnten und Krain	1073	1549	1490	593	163	61	690	1217	1560	1104	324	34
Küstenland	934	1178	892	309	93	22	772	1005	978	509	138	26
Tirol	757	1762	1826	553	202	87	439	1219	1627	1313	327	62
Böhmen	9097	12514	7943	2903	1201	469	5667	10597	10590	5194	1715	364
Mähren und Schlesien	4913	6745	3771	1490	651	290	2989	5666	5582	2552	877	194
Dalmazien	590	1040	745	223	65	24	675	743	775	363	107	24
Lombardie	5893	7397	4785	1556	563	254	5852	7202	4467	2034	625	268
Venedig	4760	6181	3993	1156	370	161	4655	5861	3726	1749	438	192

VI. Sterbefälle.

a) Sterbefälle nach den Todesarten und nach dem Geschlechte.

Länder.	Krankheiten.			Gewaltsame.					Geschlecht.	
	Gewöhnlich	Epidemien.	Blattern.	Selbstmord.	Hundswuth.	Ermordet.	Unglücksfälle.	Hinrichtungen.	Männl	Weibl.
Oesterreich u. d. Ens	49685	439	490	128	6	17	410	—	27087	24088
Oesterreich ob d. Ens	23244	205	32	32	4	10	254	1	11910	11872
Steiermark	28018	193	541	32	1	17	240	—	14830	14212
Kärnten und Krain	21048	723	52	12	—	42	177	—	11259	10795
Küstenland	14593	435	82	8	4	19	128	—	7880	7389
Tirol	21154	318	269	11	3	24	331	2	11228	10884
Böhmen	113177	707	699	211	3	41	685	5	57926	57602
Mähren u. Schlesien	59516	262	36	116	1	27	415	—	30960	29413
Dalmazien	9501	101	13	7	—	51	116	—	4894	4895
Lombardie	83330	197	446	48	14	83	527	2	43911	40736
Venedig	67754	416	252	30	8	47	747	1	35772	33483
Militärgrenze	48316	177	196	35	6	45	239	10	25236	23788

b) Sterbefälle nach dem Alter.

Länder.	Von der Geburt bis zu 1 Jahr.	Von 1 bis 4	Von 4 bis 20	Von 20 bis 40	Von 40 bis 60	Von 60 bis 80	Von 80 bis 100	Ueber 100
		Jahre.						
Oesterreich u. d. Ens	18638	4796	4759	7387	6060	7711	1757	67
Oesterreich ob d. Ens	7465	1719	1887	2390	3257	5680	1373	11
Steiermark	7204	2746	2903	3526	4958	6460	1227	18
Kärnten und Krain	4605	3043	2827	2264	3406	5010	886	13
Küstenland	3877	2640	1975	1749	1777	2568	675	8
Tirol	6525	2465	1721	2467	3133	4779	1020	2
Böhmen	40364	15130	10948	11944	15166	17591	4262	123
Mähren u. Schlesien	19203	8816	6616	6585	8428	8727	1960	38
Dalmazien	2209	1330	1088	1253	1306	1928	658	17
Lombardie	30269	9708	7623	10927	11356	12681	2071	12
Venedig	25456	8473	5912	8065	8555	10636	2142	16
Militärgrenze	11827	9411	8578	6906	6840	4809	638	15

c) Sterbefälle nach der Religion.

Länder.	Katholiken und unirte Griechen.	Nicht unirte Griechen	Protestanten.	Juden.	Summe aller Sterbfälle.	Mehr als im J. 1839 um
Oesterreich u. d. Ens	50400	83	594	98	51175	659
Oesterreich ob d. Ens	23391	—	390	1	23782	189
Steiermark	28876	—	166	—	29042	1548
Kärnten und Krain .	21600	4	449	1	22054	1745
Küstenland	15074	76	37	82	15269	372
Tirol	22085	—	13	14	22112	849
Böhmen	112242	6	2169	1111	115528	weniger 3016
Mähren u. Schlesien	56905	4	2690	774	60373	weniger 1782
Dalmazien	8015	1753	5	16	9789	658
Lombardie	84520	29	33	65	84647	weniger 3402
Venedig	69104	32	45	74	69255	842
Militärgrenze . . .	21559	25788	1662	15	49024	1713

§. 255. Die Sterblichkeitstafeln, welche sich auf Eine Million in Einem Jahre Gebornen beziehen, sind auch dazu geeignet, andere daraus abzuleiten, welche die Bevölkerung eines Landes angeben, in welchem jährlich Eine Million geboren werden, und in welchen sich nachweiset, wie viele Personen von jedem Alter sich unter der ganzen Anzahl der Bevölkerung vorfinden. Die beziehungsweisen Resultate sind in der Tabelle Nr. XXXVIII angegeben, und werden aus den genannten Tafeln gefunden, wenn man die Summe aller Lebensjahre für das nächstfolgende Jahr aus der Kolumne C um die halbe Anzahl der Lebenden aus der Kolumne B von dem betreffenden Jahre vermehrt. So findet man, daß sich in einem Lande, in welchem jährlich Eine Million geboren werden, die Summe aller Lebenden von allen verschiedenen Altern auf 28,263192 + 500000, oder auf 28,763192 beläuft. Eben so findet man, daß sich die Summe aller Personen, die schon älter als Ein Jahr sind, auf 27,495667 + 383763 oder auf 27,879430, und die Summe aller Personen, die schon älter als 2 Jahre sind, auf 26,823833 + 335917 oder auf 27,159750 u. s. w. beläuft. — Wollte man wissen, wie viele Personen in einem solchen Lande in dem Alter von 20 Jahren und darüber zusammen leben, so würde diese Anzahl gleich 16,954582 + 251108 = 17,205690 seyn. Die in der Tafel Nr. XXXVIII angegebenen Resultate sind genau übereinstimmend mit den Angaben in dem Annuaire pour l'an 1839, page 183.

Außerdem sind in dieser Tabelle Nr. XXXVIII die Differenzen zwischen je 2 auf einander folgende Resultate beigesetzt, welche angeben, wie viele Personen von jedem vorbezeichneten Alter sich in der ganzen Anzahl aller zusammenlebenden befinden. So findet man, daß in einem Lande, in welchem jährlich Eine Million geboren werden, sich 883762 Kinder befinden, die noch nicht Ein Jahr alt sind, und 719680, die das Alter von 2 Jahren noch nicht erreicht haben. Auf eine ähnliche Art findet man bei diesen Differenzen, daß in dem genannten Hauptfalle, welcher die Grundlage dieser Tabelle ist, 499267 Personen leben, welche 20 Jahre überschritten haben, aber noch nicht 21 Jahre alt sind.

Wollte man wissen, wie viele Personen in einem Lande, in welchem jährlich Eine Million geboren werden, in dem kräftigen Alter zwischen **18** und **58** Jahren leben, so darf man nur von der Anzahl aller, die schon **18** Jahre alt sind, d. i. von **18221498** die Anzahl jener, welche schon **58** Jahre und darüber alt sind, d. i. die Zahl **2998285** abziehen, die Differenz **15,223213** gibt das Verlangte an.

Ferner läßt sich aus dieser Tafel berechnen, wie viele Personen von einem bestimmten Alter in einem Lande zusammen leben, wenn von diesem Lande nur die Anzahl der in Einem Jahre Gebornen, ausgemittelt ist. Z. B. Wie viele Personen im Alter von **20** bis **21** Jahren leben in einem Lande, in welchem jährlich **36000** Personen geboren werden? — Man löse die Proporzion auf: **1000000 : 499267 = 36000 : x**, und man findet, daß in diesem Lande **17974** Personen des genannten Alters am Leben seyn werden.

§. **256.** Aus der erläuterten Tabelle **A**, kann man eine andere ableiten, welche bei einer gegebenen Anzahl von Individuen eines Landes nachweiset, wie viele von diesen ein gegebenes Alter und darüber haben, z. B. wie viele von einer gegebenen Bevölkerung **20** und mehr Jahre alt sind. Wollte man eine Bevölkerungstafel für ein Land aufstellen, welches **10** Millionen Einwohner hat (Tabelle **B**), so setze man für das Alter von **0** bis **1** die Proporzion:

28763192 : 883762 = 10000000 : x.

Das Resultat hieraus **307255** gibt jene Zahl an, um welche **10,000000** vermindert werden müssen, um die Anzahl **9692745** Personen anzugeben, welche in der ganzen Massa das Alter von Einem Jahre überschritten haben, oder älter als Ein Jahr sind.

Löset man weiter die Aufgabe auf: **27879430 : 719680 = 9692745 : x** so zeigt die für **x** gefundene Zahl **250208** jene Anzahl an, um welche die früher gefundene Zahl **9692745** vermindert werden muß, um die nächste Zahl in der entsprechenden Kolumne zu erhalten, oder um jene Anzahl von Personen **9442537** anzugeben, welche in der genannten Massa schon älter als **2** Jahre sind.

Überhaupt ersieht man, daß sich jede Zahl der Kolumne Tabelle **A** zur nebenstehenden Differenz verhält, wie die bei demselben Alter sich vorfindende Zahl aus der Tabelle **B** sich zur nebenstehenden Differenz, oder zu der Zahl verhält, um welche sodann die früher gefundene Anzahl vermindert werden muß, um die nächstfolgende in derselben Kolumne zu geben. So gibt für das Alter von **20** bis **21** Jahren die Aufgabe **17205690 : 499267 = 5981843 : x** zum Resultate: **173576**, welches jene Zahl ist, um welche die Zahl **5981843** vermindert werden muß, um die nächstfolgende Zahl der Kolumne, d. i. die Zahl **5808267** zu geben.

Diese Tabelle **B** ist auch ganz dazu geeignet zu berechnen, wie viele Personen von einem bestimmten Alter bei der gegebenen Bevölkerung eines Landes sich in der Gesammtmasse vorfinden. So folgt z. B. die Beantwortung der Frage:

(**1**) Wie viele Personen vom Alter von **19** bis **20** Jahren finden sich in einem Staate, dessen Gesammtbevölkerung **33** Millionen ausmacht, aus der Proporzion: **10** Millionen : **33** Millionen = **175600** : **x**. Hieraus findet man, daß sich unter den **33** Millionen Einwohnern **579480** im Alter von **19** bis **20** Jahren vorfinden; und wollte man die Anzahl der Personen des männlichen Geschlechtes allein wissen, so dürfte man der kürzeren Berechnung

wegen nur das genannte Resultat halbiren, wodurch man **289740** erhalten würde.

(2) Wie viele Personen männlichen Geschlechtes befinden sich in einem Staate, der **33** Millionen Einwohner hat, in dem kräftigen Alter von **15** bis **60** Jahren?

Die Tabelle **B** gibt bei **10** Millionen für die Anzahl Personen, welche **15** Jahre schon erreicht haben, **6878797**, unter diesen befinden sich **887646**, die über **60** Jahre alt sind, mithin bleiben für das Alter zwischen **15** und **60** Jahren **5991151**, also bei **33** Millionen **19770798**, wovon dem männlichen Geschlechte allein **9885399** angehören.

Drei und zwanzigster Abschnitt.

Von den Berechnungen der Pensionen und Renten.

§. 257. Das Bestreben der Menschen ihr Eigenthum vor Gefahren, die demselben drohen, zu schützen, ist eine allgemein bekannte Sache, und wir sehen häufig viele Personen zu dem Zwecke sich vereinigen, um sich unter einander wechselseitig zu unterstützen, daß die Folgen eines mehr oder weniger möglichen Unglücksfalles entweder ganz von ihnen entfernt werden, oder daß sie ihnen doch weniger empfindlich sind. Beispiele hiervon finden wir in den Assekuranz-Gesellschaften zu so mannigfaltigen Zwecken, wie gegen die Gefahren bei Versendung von Waaren, gegen die Gefahren des Feuers, der Elementarbeschädigungen, u. dgl.

Wichtiger als Sachen müssen dem Menschen das Schicksal seiner eigenen, und sehr oft auch noch das Schicksal von anderen Personen seyn, und er wird wünschen müssen, diesen nach Umständen ein zeitliches oder ein lebenslänglich besseres Los zu begründen.

Wenn es gleich durch ein hinreichend großes und durch ein sicher angelegtes Kapital möglich wird, diesen Zweck zu erreichen, so fehlt es doch auch für die Einzelnen an der genauen Bestimmung dieses Kapitals, zumal bei lebenslänglichen Versorgungen. Es wäre nur ein glückliches Ungefähr, wenn jemand ein genau so großes Kapital anlegen würde, als welches sammt den davon entfallenden Nutznissungen bis zum Tode genau aufgezehrt seyn sollte. Beinahe in allen Fällen wird ein zu diesem Zwecke verwendetes Kapital zu groß oder zu klein seyn. Überdieß fehlt es jedesmal an der Möglichkeit, von dem angelegten Kapitale die größtmöglichste Nutznissung zu ziehen, weil man die eingegangenen kleinen Interessenbeträge nicht für den Augenblick wieder nutzbringend zu verwenden im Stande ist; und weil man eben so wenig während der Zeit des Genusses gerade nur jenen Betrag und genau zu der Zeit aufkünden kann, den und wann man ihn eben bedarf.

§. 258. Auf eine leichtere Weise läßt sich dieser Zweck erreichen, wenn sich hierzu mehrere Personen wechselseitig unterstützen, d. h. wenn nicht mehr jeder Einzelne die Sorge für sich allein, sondern für Alle, so wie wieder Alle für jeden Einzelnen übernehmen. Auf diese Weise legt jeder Einzelne entweder gerade das Kapital ein, was er bedeutend, und zwar

jedesmal höher gesteigert zurückerhält, als er es selbst zu bewirken im Stande ist; oder er wagt zwar etwas mehr einzulegen, als er, wenn er frühzeitig vom Tode überrascht werden sollte, wieder zurück erhält; hat aber dafür die tröstende Hoffnung, daß er auch dann noch seine bedungenen Erträge fort erhält, wenn er länger lebt, und bereits schon das ganze für seine Person eingelegte Kapital sammt den davon entfallenen Nutzungen aufgezehrt hat. Der mögliche und in den meisten Fällen äußerst unbedeutende Verlust, trifft nur den, der des Vortheils nicht mehr bedarf, und der daraus erfolgende Gewinn fällt für seine Lebenszeit dem zu, der ohne demselben vielleicht darben und ein trostloses Leben führen müßte. Die Deckung der Erträgnisse für das längere Leben der letzteren findet sich aus den Ersparnissen von dem Nichtaufgezehrten der früher Verstorbenen.

Diese Kompensazion muß natürlich um so eher Statt finden, je mehrere Personen zur Erreichung desselben Zweckes sich mit einander vereinigen.

Daß die durch die Summe der kleineren Kapitale von Vielen in größerer Quantität eingehenden Interessen gleich wieder weiter nutzbringend verwendet, und daß dadurch das Bewirthschaftungsgeschäft bedeutend gesteigert werden kann, wird von selbst klar.

Nicht weniger klar kann es seyn, daß die den verschiedenen Bedingungen der Beitretenden entsprechenden Einlagen, wegen ihres verschiedenen Alters nicht gleich, sondern wieder verschieden, jedesmal aber so groß seyn müssen, als es diese Bedingungen erfordern. Tetens sagt in dieser Beziehung in der Vorrede zu seinem Werke (Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Antwartschaften, Leipzig 1785) eben so schön als wahr: „Mit wenig oder „nichts sich oder den Seinigen reichliche Versorgung verschaffen zu können, „das geht nicht an, und wer das glaubt herausgerechnet zu haben, kann sicher „seyn, daß er sich geirret. Aber mehr Versorgung sich oder den Seinigen auf „Lebens- oder Todesfälle zu versichern, als durch eigene Aufsparrung des da„zu bestimmten Geldes möglich ist, das geht an, dadurch, daß man dieses „Geld als verloren für sich selbst, für Andere hingibt, in dem Falle, daß der „Umstand nicht eintritt, bei dem man für sich oder für die Seinigen die Ver„sorgung vonnöthen hat. Dieß ist das Wohlthätige, das in der Natur dieser „Anstalt liegt. In so ferne, als jeder dabei eine Summe wagt, die am Ende „für ihn unnütz ausgegeben seyn kann, wird etwas aufs Spiel gesetzt. Aber „soll das ein Spiel heißen, so hat es das Eigene, daß nur der verliert, der „des Gewinnes nicht bedarf, und daß dagegen der gewinnt, dem der Gewinn „unentbehrlich ist. Hier ist der Verlierende der Glücklichere. Außer der Be„ruhigung, so lange der Erfolg nicht entschieden hat, gegen den Mangel auf „den schlimmeren Fall gedeckt zu seyn, hat er am Ende, wenn für ihn am „besten entschieden ist, nur zur Versorgung Anderer verloren."

§. 259. Nach den verschiedenen Verhältnissen, in welchen sich die Personen befinden, die einer derlei Gesellschaft beitreten, werden auch ihre Wünsche, sich oder andern das Recht auf zeitliche oder fortdauernde Bezüge zu begründen, verschieden seyn müssen.

Die in dieser Beziehung vorkommenden verschiedenen Fälle können der Hauptsache nach, rücksichtlich des Anfanges und des Endes der verlangten Erträge eingetheilt werden. Jeder dieser beiden Momente kann willkührlich gewählt, oder von dem Leben oder Tode bestimmter Personen abhängig seyn.

I. Es kann der Anfang und das Ende des Bezuges in Einen Moment zusammen fallen, also nur das Recht auf Einen einzigen Be-

zug begründet werden. Hier ist noch zu unterscheiden, ob die Ausfolgung des Erträgnisses bedingt oder unbedingt erfolgen muß, und im letzteren Falle, unter welcher Bedingung. Z. B.

(1) A will nach **20** Jahren eine Summe von **1000** fl. erheben, bestimmt aber, daß für den Fall, als er zu dieser Zeit nicht mehr am Leben wäre, seine damaligen Erben zur Erhebung dieses Betrages ermächtiget seyn sollen.

(2) B will nach **20** Jahren, wenn er damals noch lebt, den Betrag von **1000** fl. erhalten, wenn er aber damals nicht mehr lebt, auf seine Einzahlung Verzicht leisten.

(3) C erwirbt das Recht, eine Person zu benennen, die gleich nach seinem Tode **1000** fl. erhalten soll.

II. Es kann auf ein durch mehrere Jahre zu verabfolgendes Einkommen ein Recht begründet werden. Ein periodisch wiederkehrendes Einkommen dieser Art, heißt Rente, und zwar a) daß dieselbe nach einer im Vorhinein bestimmten Anzahl von Jahren anfängt, und nach einer andern ebenfalls im Vorhinein bestimmten Anzahl von Jahren wieder aufhört; gleichgültig, ob die das Bezugsrecht gründende Person noch lebt, oder ob irgend eine andere Person, welche die das Bezugsrecht begründende Urkunde rechtmäßig besitzt, um die Ausfolgung einschreitet.

Erträgnisse dieser Art heißen Zeitrenten:

Oder b) daß eine Person nach einer bestimmten Anzahl von Jahren sich den Anfang des Bezugs einer Rente auf ihre fernere Lebenszeit, oder auf die Lebenszeit einer dritten Person bedingt, so daß diese Rente mit dem Tode der genannten Person aufhört.

Erträgnisse nach diesen Bedingungen heißen Leibrenten.

(4) D will nach **10** Jahren eine Rente von **200** fl. beziehen, welche durch **12** Jahre nach einander an ihn selbst, oder an seinen Zessionar ausbezahlt werden soll.

(5) E will sich bis zu seinen Tod eine Leibrente von **200** fl. erkaufen, und von jetzt nach **10** Jahren dieselbe zum ersten Male beziehen.

(6) F will nach **10** Jahren eine Rente von **200** fl. so lange fort beziehen, als M noch fortleben wird.

III. Wird ein Recht auf ein jährliches Einkommen gegründet, welches mit dem Tode einer bestimmt genannten Person seinen Anfang nehmen, und in der Regel mit dem Tode einer andern bestimmt genannten Person enden soll, so heißt dieses Einkommen eine Pension, wenn auch nach den Gesellschaftsstatuten die Verpflichtung der Kassa unter andern Begingungen, als z. B. bei einer Wiederverehelīgung sistirt oder gar aufgehoben werden kann. Findet zwischen diesen beiden Personen das eheliche Verhältniß Statt, so wird dieses Einkommen insbesondere eine Witwenpension genannt.

(7) Ein Dienstgeber will seinen bestimmt genannten Diener nach seinem Tode für die ganze fernere Lebenszeit des Letzteren eine Pension von **200** fl. verschaffen.

(8) Ein Gatte will seiner Gattinn, wenn sie Witwe werden sollte, eine Witwen Pension von **200** fl. verschaffen.

IV. Ist der Anfang des Bezuges durch den Tod einer bestimmt genannten Person bedingt, und hört er nach einem im Vorhinein bestimmten Alter auf, wie dieß der Fall ist, wenn Ältern oder sonstige Wohlthäter für ihre Kinder nach ihrem Tode bis zu einem bestimmten Alter der Kinder ein

Bezugsrecht begründen, so heißt ein solches Einkommen eine Kinder oder eine Waisen-Pension, besser Kinder oder Waisen-Rente.

(9) Ein Vater will Einem seiner Kinder nach seinem Tode bis zum abgelaufenen 24sten Jahre des Kindes eine Waisenrente von 200 fl. verschaffen.

Die Person, welche derlei Erträgniß genießt oder zu erwarten hat, heißt Rentenier, Pensionist, oder Exspektant.

§. 260. Das Recht zu solchen Genüssen wird durch die den individuellen Bedingungen der Beitretenden entsprechenden Geldeinlagen erworben. Der zu erlegende Betrag heißt Mise, Kaufpreis, oder auch der bare Werth der Versorgung.

§. 261. Der Beitritt zu solchen Gesellschaften geschieht, in Beziehung auf die Einrichtung der Mise gewöhnlich auf Eine von folgenden drei Arten: Entweder auf dem Kapitalsfuße, oder auf dem Kontribuzionsfuße, oder auf dem gemischten Fuße.

Der Beitritt auf dem Kapitalsfuße findet dann Statt, wenn sogleich beim Beitritte die ganze Mise bezahlt wird, wornach in der Folge niemals mehr eine Nachzahlung zu leisten ist.

Der Beitritt auf dem Kontribuzionsfuße besteht darin, daß der Einleger durch einen bestimmt festgesetzten Zeitraum, oder durch die ganze Lebensdauer einer bestimmt genannten Person an die betreffende Kassa in festgesetzten Perioden, z. B. alle Jahre, oder alle halbe oder Vierteljahre einen bestimmten Betrag entrichtet.

Der Beitritt auf dem gemischten Fuße ist aus den Bedingungen der zwei früher genannten Beitrittsarten zusammengesetzt. Die Kassa empfängt nämlich sogleich beim Beitritte einen bestimmten Betrag, gewöhnlich Antrittsgeld genannt, und während eines bestimmten Zeitraumes, oder während der Lebensdauer einer bestimmt genannten Person in im Vorhinein bestimmten Zeitperioden, bestimmte Nachzahlungen, gewöhnlich Jahresbeiträge genannt.

§. 262. Bei der Zeitrente liegen die Angaben für den Anfang des Bezuges sowohl als für das Ende in der Willkühr des Einlegenden.

Für Leibrenten liegt die Angabe für den Anfang des Bezuges ebenfalls in der Willkühr des Einlegenden, die Angabe für das Ende desselben aber liegt, so wie beide genannten Angaben bei den Berechnungen für die Mise bei Pensionen in den Gesetzen der Natur.

Bei Kinderrenten ist der Anfang des Bezuges in den Gesetzen der Natur gegründet, und das Ende desselben von der Willkühr abhängig.

Da, wo entweder der Anfang oder das Ende eines Bezuges, oder beides zugleich von den Gesetzen der Natur abhängig ist, müssen die zur Berechnung der Mise erforderlichen Angaben auch aus diesem Gesetze, d. i. aus der früher erwähnten Sterblichkeits-Tabelle entnommen werden. — In soferne die aus den Sterblichkeitstafeln entnommenen Angaben, da sie aus einer ungeheuren Menge von Erfahrungen entnommen sind, mit voller Beruhigung benützt werden können, ohne für die einzelnen Fälle mathematische Gewißheit zu geben, ist es doch räthlich, für diese einzelnen Fälle jene Angaben auszuwählen, die dem eben vorliegenden Berechnungsfalle am ungünstigsten sind. Man wird daher, wenn für die Kassa ein späteres Absterben günstig ist, aus der Sterblichkeitstafel die mittlere oder wahrscheinliche Lebensdauer wählen, je nachdem die eine oder die andere Angabe kleiner ist. So ist es bei einer Witwenpension für die Kassa günstiger, wenn der Gatte län-

ger lebt; daher wähle man als Angabe für den Anfang des Bezuges die kleinere der beiden in den Kolumnen D und E (Tabelle 35 und 36) vorkommenden Angaben, und lasse zur noch mehreren Beruhigung den beistehenden Dezimalbruch weg. So wollen wir bei einem Gatten von 30 bis 31 Jahren den Anfang des Bezuges auf 28 Jahre nach dem Beitritte, bei einem Gatten von 55 bis 56 Jahren auf 13 Jahre nach dem Beitritte rechnen. — Wenn aber für die Kassa ein früheres Absterben günstig ist, so wähle man aus der Sterblichkeitstafel die mittlere oder die wahrscheinliche künftige Lebensdauer, je nachdem die eine oder die andere Angabe größer ist. So ist es bei einer Witwenpension für die Kassa günstiger, wenn die Witwe früher stirbt; daher wähle man als Angabe für das Ende des Bezuges die größere der beiden in den Kolumnen D und E vorkommenden Angaben, und nehme zur noch mehreren Beruhigung statt des beistehenden Dezimalbruches Ein Ganzes. So wollen wir für eine Gattinn von 30 bis 31 Jahren annehmen, daß sie noch 30 Jahre, für eine Gattinn von 55 bis 56 Jahren, daß sie noch 15 Jahre leben werde.

Anmerkung. Es wurden bei diesen Bestimmungen die Duvillard'schen Sterblichkeitstafeln zum Grunde gelegt. Wollte man sich der Süßmilch Baumann'schen Tafeln bedienen, so würden die Resultate mit den vorerwähnten zusammenstimmen. Es ergibt sich hieraus, daß man sich bei den vorerwähnten, der Sicherheit für die Kassa wegen, nothwendigen Korrekturen, was immer für einer dieser beiden Sterblichkeitstafeln bedienen kann, und man wird in den meisten Fällen dieselben Resultate erhalten. Sollten aber die Resultate nach den verschiedenen Tafeln für einzelne Fälle wirklich von einander abweichen, so ist diese Abweichung, zumal wegen des im folgenden Paragraphe zu erörternden Diskontirungs-Geschäftes, für die Kassa so unbedeutend, daß es klar wird; jede dieser beiden Tafeln ist für die diesem Zwecke entsprechenden Berechnungen anpassend.

Nichts desto weniger wird es immer wünschenswerth bleiben, diese Sterblichkeitstafeln noch immer durch die fortgesetzten Erfahrungen nach Möglichkeit mehr und mehr zu berichtigen, und die vaterländischen mehr und mehr zu vervollkommnen.

§. 263. Alle Berechnungen, welche sich auf solche Lebensversicherungsfälle beziehen, erfordern zunächst a) die Bestimmung der Deckungssumme, und sodann b) die Bestimmung der vollständigen Einlage.

Deckungssumme wollen wir jenen bestimmten Betrag nennen, welchen die betreffende Kassa schon vor dem Anfange des ersten Bezuges von dem Einleger erhalten haben muß, um bis zum bedungenen Erlöschen des Bezuges ihre übernommenen Verpflichtungen auf das genaueste erfüllen zu können. Diese Deckungssumme soll aber auch nicht größer seyn, sondern bei der Erfüllung der letzten Verpflichtung von Seite der Kassa gänzlich erschöpft werden. — Vollständige Einlage wollen wir jenen Betrag nennen, mittelst welchem der Einleger einige Zeit vor dem ersten Bezuge die Kassa in den Besitz der Deckungssumme bringt, oder jenen Betrag, welcher sammt Zinsen und Zinseszinsen von dem Tage der Leistung bis zum Anfange des Bezuges zur Deckungssumme anwächst.

Um für die einzelnen Fälle die Deckungssummen, und aus diesen wieder die vollständigen Einlagen zu berechnen, sind gewisse Angaben erforderlich, welche sich im Wesentlichen auf folgende Punkte zurückführen lassen. Man muß wissen:

a) den Betrag, der entweder nur Einmal oder auch mehrmal zu verabfolgen ist;
b) den Zinsfuß;
c) die Kapitalisazionsart;
d) die Zeit, und bei öfter wiederkehrenden Bezügen den Anfang und das Ende des Bezuges;
e) die Art des Beitrittes.

Für alle vorkommenden Berechnungen wollen wir den Zinsfuß zu **4 %** und die ganzjährige Kapitalisazion wählen, wenn hierüber nicht insbesondere etwas anders erinnert werden sollte.

§. **264.** Verrechnungen wegen Einmaliger Erträgnisse.

Für diesen Fall ist die Deckungssumme (welche wir hier wie künftighin mit $\mathfrak{D}$ bezeichnen wollen) mit dem zu leistenden Betrage übereinstimmend. Ist dieser gegeben, so handelt es sich blos um die Ausmittlung der vollständigen Einlage.

Wird diese gleich beim Eintritte auf Einmal (nach dem Kapitalsfuße) entrichtet, so dient zur Bestimmung derselben die Formel $S = K(1+p)^N$. (Siehe §. **199**), wo **S** die Deckungssumme, **K** die vollständige Einlage, **N** die Anzahl der Jahre vom Tage des Beitrittes bis zum Bezuge bedeutet, und wo $p = 0{\cdot}04$ ist.

Geschieht der Beitritt auf dem Kontribuzionsfuße, so dient zur Bestimmung der Deckungssumme die Formel $\Sigma_N = K(1+p)^N + B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$, (Siehe §. **205**), für welche Fälle Σ die Deckungssumme, **K** das Antrittsgeld, (welches wir mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen wollen), **B** den Jahresbeitrag ($\mathfrak{B}$) bedeutet, u. s. w. Somit erhält man die Formel:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right).$$

Offenbar muß bei dem Beitritte auf dem Kontribuzionsfuße, wenn der Jahresbetrag anticipando entrichtet wird, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ gesetzt werden; würde aber der Beitrag erst verfallen geleistet, so wäre $\mathfrak{A} = 0$ zu setzen.

(1) **A** will nach **20** Jahren eine Summe von **1000** fl. erheben, bestimmt aber, daß für den Fall, als er zu dieser Zeit nicht mehr am Leben wäre, seine damaligen Erben zum Bezuge berechtigt seyn sollen. Was beträgt die Mise?

$\mathfrak{D} = 1000$, $N = 20$, $p = 0{\cdot}04$, $(1+p) = 1{\cdot}04$. Aus der Formel $\mathfrak{D} = K(1+p)^N$ folgt: $\log K = \log \mathfrak{D} - N \log (1+p)$
$\log K = 3 - 0{\cdot}0170333 \times 20 = 3 - 0{\cdot}340666 = 2{\cdot}6593340$; also ist $K = 456{\cdot}39$.

Es beträgt sonach die Mise oder die vollständige Einlage **456** fl. **24** Kr.

Eben dasselbe Resultat erhält man aber auch aus der Tabelle (**14**), wenn man den Werth Eines Guldens vor **20** Jahren mit **1000** multiplizirt. Bei einer **5 %** Verzinsung würde die Mise **376** fl. **54** Kr., bei **6 %** **311** fl. **48** Kr. betragen.

(2) **B** will nach **20** Jahren, wenn er damals noch lebt, den Betrag von **1000** fl. erhalten, wenn er damals nicht mehr lebt, auf seine Einzahlung

Verzicht leisten. Nun ist **B** zur Zeit des Beitrittes **45** Jahre alt, was beträgt die Mise?

Die Auflösung der vorigen Aufgabe zeigt, daß die Mise für den Fall, als die Bezahlung gewiß eintreffen muß, **456·39** fl. beträgt. Da aber der Fall eintreten kann, daß **B** früher stirbt, als die **20** Jahre abgelaufen sind, so muß die Mise offenbar geringer entfallen. Berücksichtiget man die Sterblichkeitstafeln, so findet man, daß von **334072** Personen im Alter von **45** Jahren nach **20** Jahren nur mehr **166377** am Leben sind. Es wird somit die entsprechende Mise aus der Proporzion $334072 : 166377 = 456{\cdot}39 : x$ gefunden, oder man erhält die Mise oder die vollständige Einlage gleich **227** fl. **18** Kr.; bei **5** % Verzinsung **187** fl. **42** Kr.; bei **6** %tiger **155** fl. **17** Kr.

(**3**) **C** ist **45** Jahre alt, und wünscht, daß seine nächsten Erben gleich nach seinem Tode **1000** fl. erhalten sollen. Was beträgt die vollständige Einlage?

Da es in diesem Falle vortheilhafter ist, wenn **C** recht lange lebt, so wähle man aus der Tafel die kleinere Angabe bei **E** mit der vorerwähnten Korrektur, und man hat die Aufgabe zu lösen: Was beträgt die vollständige Einlage, um nach **19** Jahren **1000** fl. zu erhalten? deren Auflösung wie bei (**1**) gemacht wird.

Antwort: bei **4** % **474** fl. **39** Kr.; bei **5** % **395** fl. **44** Kr.; bei **6** % **330** fl. **31** Kr.

Geschieht der Beitritt nicht auf dem Kapitals-, sondern auf dem Kontribuzionsfuße, so hat man Σ gleich dem bedungenem zu verabfolgenden Betrage, und $K = B = \mathfrak{B}$, weil gewiß sogleich beim Beitritte auch der erste Jahresbeitrag zu entrichten kommt. Man braucht sonach die Gleichung blos für $\mathfrak{B}$ aufzulösen. Aus der Gleichung

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right) \text{ folgt}$$

$$\mathfrak{D}p = \mathfrak{B}p\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\,(1+p)^N - \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D}p = \mathfrak{B}\,(1+p)^N\,(1+p) - \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D}p = \mathfrak{B}\,[(1+p)^{N+1} - 1]$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{D}p}{(1+p)^{N+1} - 1}$$

Wird in Beziehung auf die Aufgabe (**1**) gefragt, was beträgt unter diesen Bedingungen der Jahresbetrag $\mathfrak{B}$? so ist $\Sigma = \mathfrak{D} = 1000$; folglich

$$\mathfrak{B} = \frac{1000 \times 0{\cdot}04}{1{\cdot}278768}, \text{ d. i. } 31 \text{ fl. } 17 \text{ Kr.}$$

Wenn also jemand von der Zeit des Beitrittes jährlich **31** fl. **17** Kr. durch **20** Jahre bezahlt, so haben er selbst oder seine Erben nach Ablauf des zwanzigsten Jahres **1000** fl. von der Kassa zu fordern. Jedoch muß auch nach Ablauf des zwanzigsten Jahres der Jahresbeitrag nochmals entrichtet werden.

Geschieht der Beitritt auf dem gemischten Fuße, so dient dieselbe Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$ zur Auflösung, nur muß ent-

weder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ wirklich gegeben, oder daß Verhältniß bekannt seyn, in welchem diese zu einander stehen.

(4) Jemand will nach **20** Jahren entweder selbst oder durch seine Erben **1000** fl. bei einer Kassa beheben. Er gibt ein Antrittsgeld von **100** fl., was wird der Jahresbeitrag durch diese **20** Jahre betragen?

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$$

$$1000 = 100\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right);\ \text{also ist}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{[1000 - 100\,(1+p)^N]\,p}{(1+p)^N - 1}.$$

Es ist aber für diesen Fall $(1+p)^N = (1\cdot04)^{20} = 2\cdot191123$ folglich

$$\mathfrak{B} = \frac{[1000 - 100\,(1+p)^N]\,p}{(1+p)^N - 1},\ \text{oder}\ \mathfrak{B} = 26\cdot23.$$

Der durch volle **20** Jahre zu entrichtende Jahresbeitrag ist **26** fl. **14** Kr.

(5) Jemand will nach **25** Jahren **1200** fl. bei einer Kassa beheben, oder durch seine Erben beheben lassen. Er bezahlt nach Ablauf eines jeden Jahres **25** fl. Wie groß wird das Antrittsgeld seyn müssen?

Aus der Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$ erhält man

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{B}\,[(1+p)^N - 1]}{p(1+p)^N}.$$

Für diesen Fall ist aber $\mathfrak{D} = 1200$, $\mathfrak{B} = 25$, $N = 25$, $(1+p)^N = 2\cdot665836$, folglich

$$\mathfrak{A} = \frac{1200 \times 0\cdot04 - 25 \times 1\cdot665836}{0\cdot04 \times 2\cdot665836} = \frac{48 - 41\cdot6459}{0\cdot10663344}$$

$$= \frac{6\cdot3541}{0\cdot10663344} = 59\cdot59.$$

Antwort: Das Antrittsgeld beträgt sonach **59** fl. **36** Kr.

(6) Jemand ist verflichtet nach einer Reihe von Jahren an irgend einen Fond **1417** fl. **32** Kr. zu bezahlen. Er entledigt sich dieser Verpflichtung dadurch, daß er an diesen Fond ein Antrittsgeld von **120** fl. entrichtet, und jährlich **60** fl. nachzahlt. Wie viele Jahre sind diese Nachzahlungen zu leisten?

Aus der Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$ folgt:

$$\mathfrak{D}p + \mathfrak{B} = (1+p)^N(\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}),\ \text{oder}\ (1+p)^N = \frac{\mathfrak{D}p + \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}p + \mathfrak{B}}.$$

Für diesen Fall ist $\mathfrak{D} = 1417\cdot53$, $\mathfrak{A} = 120$, $\mathfrak{B} = 60$; folglich ist

$$(1+p)^N = (1\cdot04)^N = \frac{1417\cdot53 \times 0\cdot04 + 60}{120 \times 0\cdot04 + 60} = 1\cdot80095.$$

$$N \log (1{\cdot}04) = \log (1{\cdot}80095)\text{, also}$$

$$N = \frac{\log 1{\cdot}80095}{\log 1{\cdot}04} = \frac{0{\cdot}2554869}{0{\cdot}017033} = 15.$$

Also war dieser Betrag nach **15** Jahren zu bezahlen.

Ist $(1+p)^N$ berechnet, und p bekannt, so suche man diesen Betrag in der betreffenden Tabelle auf, und die nebenstehende Zahl wird die Anzahl der Perioden angeben.

So findet man für diesen Fall in der Tabelle **XIV** die Zahl **1·800944** bei $N = 15$, also ist dieser Betrag **15** Jahre zu bezahlen.

§. 265. Berechnungen wegen der Zeitrenten.

Da bei den Zeitrenten sowohl der Anfang als das Ende willkührlich gewählt werden können, so sind die in dieser Beziehung vorkommenden Angaben vollkommen genau und mathematisch gewiß, folglich müssen auch die Resultate mathematisch gewiß seyn, und es handelt sich daher bei allen Fällen dieser Art nur um die Auflösung einer zur Zinseszinsenrechnung gehörigen Aufgabe.

a) Beitritt auf dem Kapitalsfuße.

(7) Jemand will nach **10** Jahren von der Zeit des Beitrittes an, eine Rente von **200** fl. beziehen, welche von Seite der Kassa durch **12** auf einander folgende Jahre in demselben Betrage entweder an ihn selbst, oder an seinen Zessionar verabfolget werden soll. Was beträgt die Mise?

Diese Aufgabe hat auch folgenden Sinn: Welche vollständige Einlage muß man jetzt machen, damit diese nach **10** Jahren bei **4 %** Zinseszinsen und ganzjähriger Kapitalisazion diejenige Deckungssumme gibt, durch welche während **12** Jahren jährlich **200** fl. ausbezahlt werden können, so daß nach dem zwölften Jahre alle Einzahlungen sammt den davon entfallenen Nutznissungen aufgezehrt sind? Es versteht sich von selbst, daß der jeweilige Rest aus der Deckungssumme immerfort nach demselben Prinzipe bewirthschaftet wird.

Zuerst ist es nothwendig die Deckungssumme zu bestimmen, welche diese mehrmals wiederholte Auslage erfordert. Berücksichtigen wir wieder die im §. **205** aufgestellte Formel $\Sigma = K\,(1+p)^N + B\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$, so zeigt sich, daß sie auch hier wieder benützt werden kann. In diesem Falle wird zur Deckungssumme, welche durch Σ vorgestellt ist, keineswegs jährlich ein Betrag **B** zugelegt, sondern davon die fällige Rente weggenommen, was offenbar dadurch ausgedrückt werden kann, wenn man **B** negativ setzt. Auch wollen wir fernerhin, so oft es sich um die Berechnung einer Rente handelt, statt **B** den Buchstaben $\mathfrak{R}$ setzen. Ferner folgt, weil nach Vollendung des ganzen Geschäftes nichts mehr übrig bleiben soll, daß Σ gleich **0** zu setzen kommt, wornach sich die genannte Formel in nachstehende verwandelt:

$$0 = \mathfrak{D}\,(1+p)^N - \mathfrak{R}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)\text{, aus welcher man}$$

$$\mathfrak{D}\,(1+p)^N = \mathfrak{R}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)\text{ erhält.}$$

Es ist somit $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p\,(1+p)^N}\right) = \mathfrak{R}.\,\mathfrak{S}.$ (Sieh §. 209).

Was die Ausführung der Rechnung anbelangt, so wäre blos der Ausdruck $(1+p)^N$ logarithmisch zu entwickeln, wornach nur mehr sehr einfache weitere Zusammenstellungen erforderlich sind. Aber auch hierzu braucht man keine Logarithmen, indem man $(1+p)^N$ in den Tabellen I bis XVIII schon berechnet auffindet.

Dem gegebenen Falle gemäß ist $\mathfrak{R} = 200$, $N = 12$, $p = 0{\cdot}04$, $(1+p)^N = 1{\cdot}601032$; folglich wird $\mathfrak{D} = 200\left(\frac{1{\cdot}601032 - 1}{0{\cdot}04 \times 1{\cdot}601032}\right)$, d. i. 1877 fl. 1 Kr.; oder kürzer: $\mathfrak{D} = \mathfrak{R}.\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D} = 200 \times 9{\cdot}385081$

$\mathfrak{D} = 1877{\cdot}0162.$

Ist die Deckungssumme auf diese Weise ausgemittelt, so handelt es sich nur noch um die Bestimmung der vollständigen Einlage, welche nach der verschiedenen Art des Beitrittes auf die drei früher erwähnten Arten aufgefunden werden kann.

a) Was beträgt im vorliegenden Falle die Mise nach dem Beitritte auf dem Kapitalsfuße?

Für diesen Fall dient die Formel $\mathfrak{D} = K\,(1+p)^N$, woraus $K = \mathfrak{D} \times \frac{1}{(1+p)^N}$ gefunden wird. Da hier $\mathfrak{D} = 1877{\cdot}016$, $N = 9$, $\frac{1}{(1+p)^N} = 0{\cdot}702587$ ist, so erhält man für die vollständige Einlage $K = 1877{\cdot}016 \times 0{\cdot}702587$, oder 1318 fl. 46 Kr.

b) Was beträgt in dieser Aufgabe der Jahresbeitrag bei dem Beitritte auf dem Kontribuzionsfuße?

Die Formel $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{D}p}{(1+p)^{N+1} - 1}$ gibt $\mathfrak{B} = \frac{1877{\cdot}016 \times 0{\cdot}04}{1{\cdot}539454}$ $= 139{\cdot}179$ oder 139 fl. 11 Kr.

c) Was beträgt in dieser Aufgabe bei dem Beitritte auf dem gemischten Fuße das Antrittsgeld, wenn der Jahresbeitrag mit 100 geleistet wird?

Die Formel $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{B}\left[(1+p)^N - 1\right]}{p\,(1+p)^N}$ gibt:

$$\mathfrak{A} = \frac{1877{\cdot}016 \times 0{\cdot}04 - 100\,(1{\cdot}480244 - 1)}{0{\cdot}04 \times 1{\cdot}480244} = 456{\cdot}96 \text{ oder } 456 \text{ fl. } 58 \text{ Kr.}$$

d) Was beträgt im vorliegenden Falle bei dem Beitritte auf dem gemischten Fuße der Jahresbeitrag, wenn das Antrittsgeld auf 500 fl. festgesetzt ist.

Die Formel $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{A}p\,(1+p)^N}{(1+p)^N - 1}$ gibt:

$$\mathfrak{B} = \frac{1877{\cdot}016 \times 004 - 500 \times 0{\cdot}04 \times 1{\cdot}480244}{1{\cdot}480244 - 1} = 94{\cdot}693 \text{ oder}$$

94 fl. 42 Kr.

(8) Wie groß wird eine durch 15 auf einander folgende Jahre zahlbare Rente entfallen, wenn diese 8 Jahre nach dem Beitritte zum ersten Male bezogen werden soll?

a) Wenn der Beitritt auf dem Kapitalsfuße geschieht, und die Mise mit **2000** fl. bezahlt wird?

Zuerst wird es sich hier wieder darum handeln, die Deckungssumme zu bestimmen. Soll der erste Bezug nach dem achten Jahre beginnen, so wird die Deckungssumme der aus der Mise **2000** fl. während dieser Zeit durch die Bewirthschaftung angewachsene Betrag seyn, es ist daher $\mathfrak{D} = 2000\,(1{\cdot}04)^8 = 2000 \times 1{\cdot}368569 = 2737{\cdot}138$ oder **2737** fl. **8** Kr.

Um ferner den Rentenbetrag auszumitteln, bediene man sich der Formel:

$$\mathfrak{D}\,(1+p)^N = \mathfrak{R}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right),$$ aus welcher man

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}p\,(1+p)^N}{(1+p)^N - 1}$$ findet.

Hiernach wird $\mathfrak{R} = \dfrac{2737{\cdot}138 \times 0{\cdot}04 \times 1{\cdot}800943}{0{\cdot}800943} = 246{\cdot}181$ oder **246** fl. **11** Kr.

Noch kürzer löset sich diese Aufgabe durch Anwendung der Formel

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}};\ \mathfrak{R} = \frac{2737{\cdot}138}{11{\cdot}118397} = 246{\cdot}181.$$

Dieses Resultat kann, unserer Formel gemäß, nur dann richtig seyn, wenn die erste Rentenzahlung nach Ablauf des **9**ten Jahres nach dem Tage des Betrittes erfolgt, weil zur Darstellung der Grundformel im §. **205** der Beitrag **B** erst am Ende einer Zeitperiode dem vorhergefundenen Ausdrucke beigefügt wird. Soll der erste Bezug der Rente nach dem abgelaufenen achten Jahre alsogleich erfolgen, so müßte die Deckungssumme aus den nach **7** Jahren aus **2000** fl. angewachsenen Betrage bestehen, und man würde für diesen Fall $\mathfrak{D} = 2000 \times 1{\cdot}315931 = 2631{\cdot}862$ oder **2631** fl. **52** Kr. auffinden.

Wird der Betrag der Rente aus dieser Deckungssumme gesucht, so findet man $\mathfrak{R} = \dfrac{2631{\cdot}86 \times 0{\cdot}04 \times 1{\cdot}800943}{0{\cdot}800943} = 236{\cdot}71$ oder **236** fl. **43** Kr.,

oder $\mathfrak{R} = \dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}} = \dfrac{2631{\cdot}862}{11{\cdot}118397} = 236{\cdot}712.$

b) Wenn für dieselbe Aufgabe der Beitritt auf dem Kontribuzionsfuße geschieht, und der Jahresbeitrag mit **275** fl. entrichtet wird, wie hoch wird sich die Rente belaufen?

Wird sogleich beim Beitritte Ein Jahresbetrag entrichtet, und nach Ablauf eines jeden Jahres bis nach dem *siebenten* wieder, so gibt die hieraus angewachsene Summe die Deckungssumme an, aus welcher sonach fernerfort die Rente ausgemittelt werden kann.

Benützt man die Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\dfrac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$, so ist in derselben $\mathfrak{A} = 0$, also $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\left(\dfrac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$. Für diesen Fall aber

ist $\mathfrak{B} = 275$, $N = 8$, und $(1+p)^N = 1{\cdot}368569$, folglich ist

$$\mathfrak{D} = \frac{275 \times 0{\cdot}368569}{0{\cdot}04} = 2533{\cdot}912 \text{ oder } 2533 \text{ fl. } 55 \text{ Kr.}$$

Aus dieser Deckungssumme findet man mit Hülfe der Formel

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}p\,(1+p)^N}{(1+p)^N - 1},\ \mathfrak{R} = \frac{2533{\cdot}912 \times 0{\cdot}04 \times 1{\cdot}800943}{1{\cdot}800943 - 1} = 227{\cdot}9 \text{ oder}$$

227 fl. 54 Kr.

Kürzer findet man das Resultat mittelst der Formel $\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}}$

$$= \frac{2533{\cdot}912}{11{\cdot}118397} = 227{\cdot}902.$$

c) Wenn der Beitritt auf dem gemischten Fuße geschieht, und ein Antrittsgeld von **600** fl., ferner ein Jahresbeitrag von **250** fl. zugesagt und geleistet wird.

Was beträgt die Rente unter den vorerwähnten Bedingungen?

Da der erste Bezug der Rente nach Ablauf des achten Jahres anfängt, so kann die Bewirthschaftung des Antrittsgeldes, so wie die Kapitalisazion der Jahresbeiträge nur für 7 Jahre gerechnet werden, um die Deckungssumme zu erhalten. Zur Bestimmung derselben dient die Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$, für welchen Fall $\mathfrak{A} = 600$, $\mathfrak{B} = 250$, $N = 7$, $(1+p)^N = 1{\cdot}315931$ ist. Es wird sonach $\mathfrak{D} = 600 \times 1{\cdot}315931$

$$+ \frac{250 \times 0{\cdot}315931}{0{\cdot}04} = 2764{\cdot}13 \text{ fl.}$$

Aus dieser Deckungssumme findet man die Rente, und zwar auf dem kürzesten Wege mittelst der Formel $\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}} = \frac{2764{\cdot}13}{11{\cdot}118397} = 248{\cdot}6$ oder

248 fl. 36 Kr.

§. 266. Berechnungen wegen der Leibrenten.

Die Leibrenten haben mit den Zeitrenten das Gemeinsame, daß der Anfang des Bezuges willkührlich gewählt wird, also ganz genau bestimmt ist; sie sind aber von diesen darin unterschieden, daß das Ende des Bezuges nicht in der Zahl angegeben werden kann, indem es von der unbewußten Lebensdauer desjenigen abhängt, während dessen Lebenszeit die Rente bezogen werden soll. Es muß daher die Angabe für die Dauer des Bezuges der Leibrente aus der Sterblichkeitstafel entnommen werden. — Da es für die Kassa günstiger ist, wenn der Rentenier früher stirbt, so muß man aus den Kolumnen **D** und **E** bei dem gegebenen Alter beim Beitritte jene Angabe nehmen, die die größere ist.

Es wäre zu Gunsten der Kassa zwar vortheilhafter, für die Dauer des Bezuges jene Angabe zu wählen, die dem Alter des Rentenier beim Anfange des Bezuges entspricht, und bedeutend größer seyn würde. Wenn man aber erwägt, daß der Rentenier sich der Gefahr unterzieht, für den Fall des früheren Sterbens, bevor er in den Bezug kommt, alle Einzahlungen zu verlieren, und weiter fort auch früher sterben kann, als die Vermuthung für sein Abster-

ben entscheidet, so wird es einleuchtend, daß man zur Bestimmung der Deckungssumme seine fernere Lebenszeit von seinem Alter am Tage des Beitrittes, nicht aber von seinem Alter beim Anfange des Bezuges zu nehmen habe.

(9) Eine **45**jährige Person will vom **10**ten Jahre nach ihrem Beitritte eine Leibrente von **200** fl. beziehen. Was beträgt die Mise?

a) Was beträgt diese beim Beitritte auf dem Kapitalsfuße?

Bei dem Alter von **45** bis **46** Jahren finden wir in der Tabelle die mittlere Lebensdauer **20·05**, die wahrscheinliche künftige **19·9**, wofür wir nach gehörig vorgenommener Korrektur **21** nehmen. Diese Person wird sonach, weil sie in den neun ersten Jahren nichts erhält, nur **12** Jahre im Genusse der Leibrente vermuthet. Daher kommt die Aufgabe zu lösen: Was beträgt bei dem Beitritte auf dem Kapitalsfuße die Mise für eine **12**jährige Rente, wofür die Einlage um **9** Jahre früher gemacht wird?

Bestimmt man zuerst die Deckungssumme mittelst der Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$, so erhält man $\mathfrak{D} = 200 \times 9{\cdot}385081 = 1877{\cdot}0162 =$ **1877** fl. **1** Kr.

Diese Deckungssumme soll durch die um **9** Jahre früher eingezahlte Mise verschafft werden. Da aber die Mise gleich $\frac{\mathfrak{D}}{(1+p)^N}$ ist, so findet man dafür den Betrag $1877{\cdot}0162 \times 0{\cdot}702587 = 1318{\cdot}77$ oder **1318** fl. **46** Kr.

b) Was beträgt im vorliegenden Falle beim Beitritte auf dem Kontribuzionsfuße der Jahresbeitrag?

Nach §. **264** ist $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{D}p}{(1+p)^{N+1} - 1}$. Hier ist $\mathfrak{D} = 1877{\cdot}016$, $p = 0{\cdot}04$, $N = 9$, $(1+p)^{N+1} = 1{\cdot}480244$, folglich $\mathfrak{B} = \frac{75{\cdot}0806}{0{\cdot}480244}$ $= 156{\cdot}34 =$ **156** fl. **21** K.; d. h. diese Person hat beim Beitritte selbst und so fort durch **9** Jahre von der Zeit des Beitrittes jährlich den Betrag von **156** fl. **21** Kr. zu leisten, um nach dem **10**ten Jahre und so fort noch eilf Jahre nach einander, im Ganzen also **12** Jahre, die Rente von **200** fl. beziehen zu können, bis nach welcher Zeit der Tod des Rentenier vermuthet wird. Stirbt er vor Ablauf dieser **21** Jahre, so ist die Kassa ihrer aufhabenden Verpflichtung enthoben, und zieht den noch vorhandenen Betrag als Gewinn ein. Hingegen ist die Kassa auch verpflichtet, dem Rentenier seine Rente noch fort und fort bis zu seinem Tode ausbezahlen, wenn er länger als die vermutheten **21** Jahre seit dem Beitritte noch leben sollte.

c) Was beträgt in eben diesem Falle beim Beitritte auf dem gemischten Fuße das Antrittsgeld, wenn die Jahresbeiträge mit **150** fl. entrichtet werden?

Die Deckungssumme ist wieder $1877{\cdot}016$, $\mathfrak{B} = 150$, $N = 9$, $(1+p)^N = 1{\cdot}423311$.

Da das Antrittsgeld $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{B}\,[(1+p)^N - 1]}{p\,(1+p)^N}$ ist, so findet man

$$\mathfrak{A} = \frac{1877{\cdot}016 \times 0{\cdot}04 - 150 \times 0{\cdot}423311}{0{\cdot}04 \times 1{\cdot}423311} = 203{\cdot}48 \text{ oder } 203 \text{ fl. } 28 \text{ Kr.}$$

d) Was beträgt in eben diesem Falle bei dem Beitritte auf dem gemischten Fuße der Jahresbeitrag, wenn das Antrittsgeld **250** fl. ist.

Da der Jahresbeitrag $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{A}p\ (1+p)^N}{(1+p)^N - 1}$, und $\mathfrak{D} = 1877{\cdot}016$, $\mathfrak{A} = 250$ u. s. w. ist, so findet man

$$\mathfrak{B} = \frac{1877{\cdot}016 \times 0{\cdot}04 - 250 \times 0{\cdot}04 \times 1{\cdot}423311}{0{\cdot}423311} = 143{\cdot}74,$$ oder 143 fl. 45 Kr.

c) Wie hoch beläuft sich in dem genannten Falle die Leibrente, wenn ein Antrittsgeld von 300 fl., und ein Jahresbeitrag von 150 fl. bezahlt wird?

Mittelst der Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\ (1+p)^N + \mathfrak{B} \left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right)$

findet man $\mathfrak{D} = 2014{\cdot}4103$.

Mittelst der Formel $\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}}$ erhält man: 214·64, oder 214 fl. 38 Kr.

§. 267. Berechnungen wegen der Pensionen.

Bei den Pensionen sind die Angaben sowohl für den Anfang als für das Ende des Bezuges aus der Sterblichkeitstafel zu entnehmen. Da es für die Kassa besser ist, wenn der Bezug später anfängt, so nehme man die bei dem Alter der Person, nach deren Tod die Pension ihren Anfang nehmen soll, in der Kolumne **D** oder **E** vorkommende kleinere Zahl. Soll z. B. der Bezugsanfang nach dem Tode einer 35jährigen Person erfolgen, so nehme man von den zwei Angaben 25·71 und 26·2 die kleinere mit der betreffenden Korrektur, d. h. man nehme an, daß der Bezug nach 25 Jahren anfängt. — Da es ferner für die Kassa besser ist, wenn der Bezug früher endet, so nehme man die bei dem Alter der Person, nach deren Tod die Pension aufhören soll in der Kolumne **D** oder **E** vorkommende größere Zahl mit der entsprechenden Korrektur. Soll z. B. die Pension mit dem Tode einer Person erlöschen, die beim Beitritte 24 bis 25 Jahre alt ist, so nehme man, weil die Tabellen 31·91 und 33·2 nachweisen, die Zahl 34, d. h. man nehme an, daß der Bezug 34 Jahre nach dem Beitritte aufhöre. Aus diesen beiden gewählten Zahlen findet man die Bezugsdauer 34 — 25, oder für den vorliegenden Fall die Zahl 9.

Zu Gunsten der Kassa ist es besser die Dauer des Bezuges aus dem Alter des Pensionisten beim Anfange des Bezuges, als aus dem Alter desselben beim Beitritte zu entnehmen. Im genannten Falle ist der Pensionist beim Bezugsanfange 49 Jahre alt, für welches Alter die fernere Hoffnung des Lebens oder die Bezugsdauer der Pension gleich 18 Jahre gefunden wird. Ob die Bezugsdauer auf die eine oder die andere Weise bestimmt werden soll, wollen wir bei den folgenden Aufgaben jedesmal insbesondere angeben.

(9) Ein Dienstgeber im Alter von 35 bis 36 Jahren gründet für seinen Diener, welcher zwischen 24 und 25 Jahre alt ist, eine Pension von jährlich 100 fl.

a) Was beträgt die Mise, wenn der Beitritt auf dem Kapitalsfuße geschieht, und die Pensionsdauer nach dem Alter des Pensionisten beim Anfange des Bezuges berechnet wird?

Da der Dienstgeber noch 25 Jahre zu leben Hoffnung hat, so ist das Alter des Pensionisten zu dieser Zeit 49 Jahre, und er hat sonach die Hoffnung, durch 18 Jahre die Pension zu genießen. Man hat daher

vorläufig die Deckungssumme für die Summe aller Bezugsraten auszumitteln.

Drücken wir den Pensionsbetrag mit $\mathfrak{P}$ aus, so muß es für sich klar seyn, daß alle bei der Leibrente aufgefundenen Formeln auch hier gebraucht werden können, sobald man für $\mathfrak{R}$ den Buchstaben $\mathfrak{P}$ setzt, und es ist sonach wegen $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{S}$, wo $\mathfrak{S}$ aus der Tabelle gleich **12·659309** gefunden wird, $\mathfrak{D} = 100 \times 12{\cdot}659309$, d. i. **1265** fl. **56** Kr. Diese Deckungssumme um **25** Jahre früher entrichtet, gibt die vollständige Einlage gleich

$$1265{\cdot}9309 \times 0{\cdot}375117 = 474{\cdot}873, \text{ d. i. } 474 \text{ fl. } 52 \text{ Kr.}$$

b) Was beträgt unter denselben Bedingungen der Jahresbeitrag bei dem Beitritte auf dem Kontribuzionsfuße?

Da $\mathfrak{B} = \dfrac{\mathfrak{D}p}{(1+p)^{N+1} - 1}$ ist, so erhält man hieraus

$$\mathfrak{B} = \frac{1265{\cdot}9309 \times 0{\cdot}04}{1{\cdot}772469} = 28{\cdot}57, \text{ d. i. } 28 \text{ fl. } 34 \text{ Kr.}$$

c) Was beträgt unter denselben Bedingungen beim Beitritte auf dem gemischten Fuße das Antrittsgeld, wenn der Jahresbeitrag mit **24** fl. entrichtet wird?

Aus der Formel $\mathfrak{A} = \dfrac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{B}\,[(1+p)^N - 1]}{p\,(1+p)^N}$

$$= \frac{1265{\cdot}9309 \times 0{\cdot}04 - 24 \times 1{\cdot}665836}{0{\cdot}04 \times 2{\cdot}665836},$$ findet man dieses Antrittsgeld gleich **109·32**, d. i. **109** fl. **20** Kr.

d) Was beträgt unter denselben Bedingungen beim Beitritte auf dem gemischten Fuße der Jahresbeitrag, wenn ein Antrittsgeld von **150** fl. gegeben wird?

Aus der Formel $\mathfrak{B} = \dfrac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{A}p\,[1+p]^N}{(1+p)^N - 1}$ findet man

$$\mathfrak{B} = \frac{1265{\cdot}9309 \times 0{\cdot}04 - 150 \times 0{\cdot}04 \times 2{\cdot}665836}{1{\cdot}665836}, \text{ oder } \mathfrak{B} = 20{\cdot}795,$$

d. i. **20** fl. **48** Kr.

(10) Eine **45**jährige Person **A** legt für eine **24**jährige Person **B** in eine Witwenkassa **1200** fl. ein. Welche Pension kann der Person **B** zugesichert werden?

a) Wenn man die Bezugsdauer nach dem Alter der Person **B** beim Anfange des Bezuges rechnet?

A hat noch Hoffnung **19** Jahre zu leben. Es wird mithin die Deckungssumme jener Betrag seyn, zu welchem die **1200** fl. durch die **19**jährige Bewirthschaftung anwachsen, d. i. **1200** × **2·106849**, oder **2528·2188**, d. i. **2528** fl. **13** Kr.

B ist beim Anfange des Bezuges **24** + **19**, d. i. **43** Jahre alt, die Hoffnung für ihre weitere Lebensdauer ist daher auf **22** Jahre zu rechnen.

Die Formel $\mathfrak{P} = \dfrac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}} = \dfrac{2528{\cdot}2188}{14{\cdot}451129}$ gibt die Pension zu **174·949**, d. i. zu **174** fl. **56** Kr. an.

b) Wenn die Pensionsdauer nach dem Alter der Person **B** beim Beitritte berechnet wird?

B ist beim Beitritte **24** Jahre alt, hat also noch die Hoffnung **34** Jahre zu leben, oder ein Alter von **58** Jahren zu erreichen. Beim muthmaßlichen Tode des **A** ist **B** **43** Jahre alt, die Vermuthung ist daher, daß **B** noch **15** Jahre im Pensionsgenuße verbleiben werde.

Aus der Formel $\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}}$ findet man die Pension gleich **227·39** oder **227** fl. **24** Kr.

(11) Eine **40**jährige Person **A** legt für eine **30**jährige Person **B** in eine Witwenkassa **30** fl. ein, und wiederholt diese Einlage jährlich mit demselben Betrage bis zu ihrem Tod.

a) Was beträgt die Pension, wenn die Bezugsdauer nach dem Alter der Person **B** beim Bezugsanfange, b) nach dem Alter von **B** beim Beitritte berechnet wird.

Wegen (a). **A** hat noch Hoffuung **22** Jahre zu leben; **B** ist nach **22** Jahren **52** Jahre alt, er hat folglich Hoffnung nach dem Tode des **A** noch **17** Jahre zu leben.

Die Deckungssumme besteht in der aus dem Jahresbeitrage zu **30** fl. durch **22**jährige fernere Lebenszeit der Person **A** angewachsenen Summe.

Aus der Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^{N+1} - 1}{p}\right)$ findet man

$\mathfrak{D} = 1098{\cdot}53625$, oder **1098** fl. **32** Kr.

Um aus dieser Summe den Pensionsbetrag auszumitteln, dient die Formel: $\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}}$. Da für diesen Fall $N = 17$ ist, so folgt

$$\mathfrak{P} = \frac{1098{\cdot}53625}{12{\cdot}16568} = 90{\cdot}298 \text{ oder } 90 \text{ fl. } 16 \text{ Kr.}$$

Wegen b). Die beim Beitritte **30** Jahre alte Person **B** hat noch Hoffnung **30** Jahre zu leben, also nach dem Tode der Person **A** noch **8** Jahre. Es ist daher $\mathfrak{P} = \frac{1098{\cdot}53625}{6{\cdot}732750} = 163{\cdot}163$ oder **163** fl. **9** Kr.

(12) Eine Person **A** im Alter von **40** bis **41** Jahren tritt einer Witwenkassa zu Gunsten einer Person **B** im Alter von **20** bis **21** Jahren bei. Er bedingt für **B** eine Pension von **200** fl., und gibt **300** fl. als Antrittsgeld. Was beträgt der Jahresbeitrag?

a) Wenn die Bezugsdauer nach dem Alter der Person **B** beim Tode der Person **A**, b) von dem Alter der Person **B** beim Beitritte gerechnet wird?

Wegen (a). Für **A** ist die Hoffnung des weiteren Lebens **22** Jahre, es ist also **B** beim muthmaßlichen Tode des **A** **42** Jahre alt, und hat sonach die Hoffnung auf eine weitere Lebensdauer von **22** Jahren. Die Deckung für die vermutheten Bezüge der Person **B** findet man mittelst der Formel

$\mathfrak{D} = \mathfrak{P} . \mathfrak{S}$, also $\mathfrak{D} = 200 \times 14{\cdot}451129 = 2890{\cdot}2258$ oder **2890** fl. **14** Kr.

Da ferner $= \frac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{A}p\,(1+p)^N}{(1+p)^N - 1}$ ist, so findet man

$$\mathfrak{B} = \frac{2890\cdot2258 \times 0\cdot04 - 300 \times 0\cdot04 \times 2\cdot369918}{1\cdot369918}$$; folglich ist

$\mathfrak{B} = 63\cdot6315$ oder 63 fl. 38 Kr.

Wegen b). Da **B** beim Beitritte 20 Jahre alt ist, so ist die Hoffnung für sein ferneres Leben 36 Jahre, folglich nach dem Tode des **A** noch auf 14 Jahre. Für diesen Fall wird die Deckungssumme wieder aus der Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{S}$ gefunden. Es ist daher $\mathfrak{D} = 200 \times 10\cdot563132 = 2112\cdot6262$ oder 2112 fl. 38 Kr. Also ist $\mathfrak{B} = \frac{2112\cdot6262 \times 0\cdot04 - 300 \times 0\cdot04 \times 2\cdot369918}{1\cdot369918}$

oder $\mathfrak{B} = 40\cdot98$ d. i. 40 fl. 58 Kr.

(13) Eine Person **A** im Alter von 50 bis 51 Jahren tritt eine Witwen-Kassa zu Gunsten seiner Gattinn **B** im Alter von 30 bis 31 Jahren bei, und bedingt für **B** eine Pension von 300 fl. Was beträgt das **Antrittsgeld**, wenn der Jahresbeitrag mit 50 fl. entrichtet wird?

a) Wenn die Bezugsdauer nach dem Alter von **B** beim Bezugsanfange, b) von dem Alter beim Beitritte gerechnet wird?

Wegen a) ist für **A** die Hoffnung des weiteren Lebens 16 Jahre, **B** ist bis dorthin 46 Jahre alt, und hat die weitere Hoffnung auf 20 Jahre. Die Deckungssumme ergibt sich hier wieder aus der Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{S}$, und ist daher $300 \times 13\cdot590339 = 4077\cdot1017$ oder 4077 fl. 6 Kr.

Das Antrittsgeld bestimmt sich sofort aus der Formel

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{B}\,[(1+p)^N - 1]}{p(1+p)^N}$$, folglich ist

$$\mathfrak{A} = \frac{4077\cdot1017 \times 0\cdot04 - 50 \times 0\cdot872981}{0\cdot04 \times 1\cdot872981}$$, oder das Antrittsgeld beträgt:

$1594\cdot183$; d. i. 1594 fl. 11 Kr.

Wegen b). **B** ist beim Beitritte 30 Jahre alt, und hat daher die noch weitere Hoffnung auf ein 30jähriges Leben: es ist also zu vermuthen, daß **B** noch 30 — 16 d. i. 14 Jahre, im Genuße der Pension verbleiben werde.

Man suche wieder mittelst der Formel $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\,.\,\mathfrak{S}$ die Deckungssumme, und man findet $\mathfrak{D} = 300 \times 10\cdot563132 = 3168\cdot9396$ oder 3168 fl. 57 Kr.

Das Antrittsgeld bestimmt sich aus der Formel

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{D}p - \mathfrak{B}\,[(1+p)^N - 1]}{p\,(1+p)^N}$$, oder es ist

$$\mathfrak{A} = \frac{3168\cdot9396 \times 0\cdot04 - 50 \times 0\cdot872981}{0\cdot04 \times 1\cdot872981} = 1109\cdot31$$, d. i. 1109 fl. 19 Kr.

(14) Eine 48jährige Person **A** will nach ihrem Tode einer 32jährigen Person **B** eine Pension verschaffen, und gibt aus der Ursache ein Antrittsgeld von 100 fl., und durch ihre fernere Lebenszeit einen Jahresbeitrag von 60 fl. Wie groß wird die Pension entfallen?

a) wenn das Alter des Pensionisten **B** beim Tode der Person **A**, b) wenn die Zeit des Beitrittes die Pensionsdauer bestimmen soll.

A hat die Hoffnung noch 18 Jahre zu leben. Wegen a) ist **B** damals 50 Jahre alt, und wird vermuthet, daß sie noch 18 Jahre leben werde. Die Deckungssumme ergibt sich aus der Formel:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\,(1+p)^N + \mathfrak{B}\left(\frac{(1+p)^N - 1}{p}\right).$$ Hieraus ist

$$\mathfrak{D} = 100 \times 2025816 + \frac{60 \times 1{\cdot}025816}{0{\cdot}04} = 1741{\cdot}3056$$ d. i. **1741** fl. **19** Kr.

Die Formel $\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}}$ gibt für diesen Fall $\frac{1741{\cdot}3056}{12{\cdot}659309} = 137{\cdot}55$, d. i. **137** fl. **33** Kr.

Wegen **b)**. **B** ist beim Beitritte **32** Jahre alt, und hat sonach die Hoffnung noch **29** Jahre zu leben. Da die Hoffnung von **A** **18** Jahre ist, so ist die Vermuthung auf eine Pensionsdauer von **11** Jahren.

Die Deckungssumme ist lediglich von der Lebensdauer der Person **A** abhängig, also wie früher **1741·3056**. Sonach ergibt sich dieser Bedingung gemäß das Pensionsquantum aus der Formel $\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{S}}$ mit **198·76**, d. i. die Pension beträgt **198** fl. **45** Kr.

Anmerkung. Was die Berechnungen für ganze Gesellschaften, Institute, Vereine u. dgl. anbelangt, um Witwen und Waisenkassen, Rentenkassen u. s. w. zu errichten, für welche Fälle außer dem Angeführten noch mehrere und bedeutende Nebenrücksichten zu beobachten sind, verweisen wir auf mehrere der eigens für diesen Zweck erschienenen besseren Werke, aus welchen man sich die in dieser Beziehung erforderlichen Kenntnisse verschaffen kann, als auf:

1. Wenz. Johann Gustav Karstens Theorie der Witwen-Kassen ohne Gebrauch algebraischer Rechnungen. Halle 1784.
2. Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst von Karl Chassot de Florencourt. Altenburg 1781.
3. Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Antwartschaften von Johann Nikolaus Tetens. Leipzig 1785.
4. Berechnung der Lebensrenten und Antwartschaften von Ernst Wilhelm Brune. Lamgo 1820.
5. Philipp Peter Guden's Witwenkassen, und der dabei zu vermuthenden höchsten Witwen-Zahl. Hannover 1771.
6. Philipp Peter Guden's gründliche Theorie und praktische Vorschläge zu Witwen-Kassen. Braunschweig und Hildesheim 1782.
7. Neue Theorie zur Berechnung zusammengesetzter Zinsen der Jahrrenten, Leibrenten und des Ankaufes derselben, von J. J. Gremilliet, aus dem Französischen übersetzt von C. F. Deyhle, Ulm 1825.
8. Sistematische Abhandlung der juristisch-politisch-kameralistischen u. s. w. Rechnung von Dr. Anton Müller, Heidelberg 1833, und
9. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf das wissenschaftliche und praktische Leben vom Dr. Gustav Adolph Jahn, Leipzig 1839.

Tabellen.

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·0025	0·997506	1·0025	0·997506
2	1·005006	0·995019	2·007506	1·992525
3	1·007519	0·992537	3·015025	2·985062
4	1·010038	0·990062	4·025063	3·975124
5	1·012563	0·987593	5·037626	4·962717
6	1·015094	0·985130	6·052720	5·947847
7	1·017632	0·982674	7·070352	6·930521
8	1·020176	0·980223	8·090528	7·910744
9	1·022726	0·977779	9·113254	8·888523
10	1·025283	0·975340	10·138537	9·863863
11	1·027846	0·972908	11·166383	10·836771
12	1·030416	0·970482	12·196799	11·807253
13	1·032992	0·968062	13·229791	12·775315
14	1·035574	0·965648	14·265365	13·740963
15	1·038163	0·963239	15·303528	14·704202
16	1·040759	0·960837	16·344287	15·665039
17	1·043361	0·958441	17·387648	16·623480
18	1·045969	0·956051	18·433617	17·579531
19	1·048584	0·953667	19·482201	18·533198
20	1·051206	0·951289	20·533407	19·484487
21	1·053834	0·948917	21·587241	20·433404
22	1·056468	0·946550	22·643709	21·379954
23	1·059109	0·944190	23·702818	22·324144
24	1·061757	0·941835	24·764575	23·265979
25	1·064411	0·939486	25·828986	24·205465
26	1·067072	0·937144	26·896058	25·142609
27	1·069740	0·934806	27·965798	26·077415
28	1·072415	0·932475	29·038213	27·009890
29	1·075096	0·930150	30·113309	27·940040
30	1·077783	0·927830	31·191092	28·867870
31	1·080478	0·925517	32·271570	29·793387
32	1·083179	0·923209	33·354749	30·716596
33	1·085887	0·920906	34·440636	31·637502
34	1·088602	0·918610	35·529238	32·556112
35	1·091323	0·916319	36·620561	33·472431
36	1·094051	0·914034	37·714612	34·386465
37	1·096787	0·911754	38·811399	35·298219
38	1·099528	0·909481	39·910927	36·207700
39	1·102277	0·907213	41·013204	37·114913
40	1·105033	0·904950	42·118237	38·019863
41	1·107796	0·902694	43·226033	38·922557
42	1·110565	0·900443	44·336598	39·823000
43	1·113341	0·898197	45·449939	40·721197
44	1·116125	0·895957	46·566064	41·617154
45	1·118915	0·893723	47·684979	42·510877
46	1·121712	0·891494	48·806691	43·402371
47	1·124517	0·889271	49·931208	44·291642
48	1·127328	0·887053	51·058536	45·178695
49	1·130146	0·884841	52·188682	46·063536
50	1·132972	0·882635	53·321654	46·946171

bei ¼ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{(1+p)^N-1}{p(1+p)^N}$
51	1·135804	0·880434	54·457458	47·826605
52	1·138644	0·878238	55·596102	48·704843
53	1·141490	0·876048	56·737592	49·580891
54	1·144344	0·873863	57·881936	50·454754
55	1·147205	0·871684	59·029141	51·326438
56	1·150073	0·869510	60·179214	52·195948
57	1·152948	0·867342	61·332162	53·063290
58	1·155830	0·865179	62·487992	53·928469
59	1·158720	0·863021	63·646712	54·791490
60	1·161617	0·860869	64·808329	55·652359
61	1·164521	0·858722	65·972850	56·511081
62	1·167432	0·856581	67·140282	57·367662
63	1·170351	0·854445	68·310633	58·222107
64	1·173277	0·852314	69·483910	59·074421
65	1·176210	0·850188	70·660120	59·924609
66	1·179150	0·848068	71·839270	60·772677
67	1·182098	0·845953	73·021368	61·618630
68	1·185053	0·843844	74·206421	62·462474
69	1·188016	0·841740	75·394437	63·304214
70	1·190986	0·839640	76·585423	64·143854
71	1·193964	0·837547	77·779387	64·981401
72	1·196949	0·835458	78·976336	65·816859
73	1·199941	0·833375	80·176277	66·650234
74	1·202941	0·831296	81·379218	67·481530
75	1·205948	0·829223	82·585166	68·310753
76	1·208963	0·827155	83·794129	69·137908
77	1·211985	0·825093	85·006114	69·963001
78	1·215015	0·823035	86·221129	70·786036
79	1·218053	0·820983	87·439182	71·607019
80	1·221098	0·818935	88·660280	72·425954
81	1·224151	0·816893	89·884431	73·242847
82	1·227211	0·814856	91·111642	74·057703
83	1·230279	0·812824	92·341921	74·870527
84	1·233355	0·810797	93·575276	75·681324
85	1·236438	0·808775	94·811714	76·490099
86	1·239529	0·806758	96·051243	77·296857
87	1·242628	0·804746	97·293871	78·101603
88	1·245735	0·802739	98·539606	78·904342
89	1·248849	0·800737	99·788455	79·705079
90	1·251971	0·798741	101·040426	80·503820
91	1·255101	0·796749	102·295527	81·300569
92	1·258239	0·794762	103·553766	82·095331
93	1·261384	0·792780	104·815150	82·888111
94	1·264538	0·790803	106·079688	83·678914
95	1·267699	0·788831	107·347387	84·467745
96	1·270869	0·786864	108·618256	85·254609
97	1·274046	0·784901	109·892302	86·039510
98	1·277231	0·782944	111·169533	86·822454
99	1·280424	0·780991	112·449957	87·603445
100	1·283625	0·779044	113·733582	88·382489

Tabelle

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·005	0·995025	1·005	0·995025
2	1·010025	0·990075	2·015025	1·985100
3	1·015075	0·985149	3·030100	2·970249
4	1·020151	0·980248	4·050251	3·950497
5	1·025251	0·975371	5·075502	4·925868
6	1·030378	0·970518	6·105880	5·896386
7	1·035529	0·965690	7·141409	6·862076
8	1·040707	0·960885	8·182116	7·822961
9	1·045911	0·956105	9·228027	8·779066
10	1·051140	0·951348	10·279167	9·730414
11	1·056396	0·946615	11·335563	10·677029
12	1·061678	0·941905	12·397241	11·618934
13	1·066986	0·937219	13·464227	12·556153
14	1·072321	0·932556	14·536548	13·488709
15	1·077683	0·927917	15·614231	14·416626
16	1·083071	0·923300	16·697302	15·339926
17	1·088487	0·918707	17·785789	16·258633
18	1·093929	0·914136	18·879718	17·172769
19	1·099399	0·909588	19·979117	18·082357
20	1·104896	0·905063	21·084013	18·987420
21	1·110420	0·900560	22·194433	19·887980
22	1·115972	0·896080	23·310405	20·784060
23	1·121552	0·891622	24·431957	21·675682
24	1·127160	0·887186	25·559117	22·562868
25	1·132796	0·882772	26·691913	23·445640
26	1·138460	0·878380	27·830373	24·324020
27	1·144152	0·874010	28·974525	25·198030
28	1·149873	0·869662	30·124398	26·067692
29	1·155622	0·865335	31·280020	26·933027
30	1·161400	0·861030	32·441420	27·794057
31	1·167207	0·856746	33·608627	28·650803
32	1·173043	0·852484	34·781670	29·503287
33	1·178908	0·848242	35·960578	30·351529
34	1·184803	0·844022	37·145381	31·195551
35	1·190727	0·839823	38·336108	32·035374
36	1·196681	0·835645	39·532789	32·871019
37	1·202664	0·831487	40·735453	33·702506
38	1·208677	0·827351	41·944130	34·529857
39	1·214721	0·823235	43·158851	35·353092
40	1·220794	0·819139	44·379645	36·172231
41	1·226898	0·815064	45·606543	36·987295
42	1·233033	0·811009	46·839576	37·798304
43	1·239198	0·806974	48·078774	38·605278
44	1·245394	0·802959	49·324168	39·408237
45	1·251621	0·798964	50·575789	40·207201
46	1·257879	0·794989	51·833668	41·002190
47	1·264168	0·791034	53·097836	41·793224
48	1·270489	0·787098	54·368325	42·580322
49	1·276842	0·783182	55·645167	43·363504
50	1·283226	0·779286	56·928393	44·142790

bei ½ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	1·289642	0·775409	58·218035	44·918199
52	1·296090	0·771551	59·514125	45·689750
53	1·302571	0·767713	60·816696	46·457463
54	1·309083	0·763893	62·125779	47·221356
55	1·315629	0·760093	63·441408	47·981449
56	1·322207	0·756311	64·763615	48·737760
57	1·328818	0·752548	66·092433	49·490308
58	1·335462	0·748804	67·427895	50·239112
59	1·342139	0·745079	68·770034	50·984191
60	1·348850	0·741372	70·118884	51·725563
61	1·355594	0·737684	71·474478	52·463247
62	1·362372	0·734014	72·836850	53·197261
63	1·369184	0·730362	74·206034	53·927623
64	1·376030	0·726728	75·582064	54·654351
65	1·382910	0·723113	76·964974	55·377464
66	1·389825	0·719515	78·354799	56·096979
67	1·396774	0·715935	79·751573	56·812914
68	1·403758	0·712374	81·155331	57·525288
69	1·410777	0·708829	82·566108	58·234117
70	1·417831	0·705303	83·983939	58·939420
71	1·424920	0·701794	85·408859	59·641214
72	1·432044	0·698302	86·840903	60·339516
73	1·439204	0·694828	88·280107	61·034344
74	1·446401	0·691371	89·726508	61·725715
75	1·453633	0·687932	91·180141	62·413647
76	1·460901	0·684509	92·641042	63·098156
77	1·468205	0·681104	94·109247	63·779260
78	1·475546	0·677715	95·584793	64·456975
79	1·482924	0·674343	97·067717	65·131318
80	1·490339	0·670988	98·558056	65·802306
81	1·497790	0·667650	100·055846	66·469956
82	1·505279	0·664329	101·561125	67·134285
83	1·512806	0·661023	103·073931	67·795308
84	1·520370	0·657735	104·594301	68·453043
85	1·527971	0·654462	106·122272	69·107505
86	1·535611	0·651206	107·657883	69·758711
87	1·543289	0·647967	109·201172	70·406678
88	1·551006	0·644743	110·752178	71·051421
89	1·558761	0·641535	112·310939	71·692956
90	1·566555	0·638344	113·877494	72·331300
91	1·574387	0·635168	115·451881	72·966468
92	1·582259	0·632008	117·034140	73·598476
93	1·590171	0·628863	118·624311	74·227339
94	1·598122	0·625735	120·222433	74·853074
95	1·606112	0·622622	121·828545	75·475696
96	1·614143	0·619524	123·442688	76·095220
97	1·622213	0·616442	125·064901	76·711662
98	1·630324	0·613375	126·695225	77·325037
99	1·638476	0·610323	128·333701	77·935360
100	1·646668	0·607287	129·980369	78·542647

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·0075	0·992556	1·0075	0·992556
2	1·015056	0·985167	2·022556	1·977723
3	1·022669	0·977833	3·045225	2·955556
4	1·030339	0·970554	4·075564	3·926110
5	1·038067	0·963329	5·113631	4·889439
6	1·045852	0·956158	6·159483	5·845597
7	1·053696	0·949040	7·213179	6·794637
8	1·061599	0·941975	8·274778	7·736612
9	1·069561	0·934963	9·344339	8·671575
10	1·077583	0·928003	10·421922	9·599578
11	1·085664	0·921095	11·507586	10·520673
12	1·093807	0·914238	12·601393	11·434911
13	1·102010	0·907432	13·703403	12·342343
14	1·110276	0·900677	14·813679	13·243020
15	1·118603	0·893973	15·932282	14·136993
16	1·126992	0·887318	17·059274	15·024311
17	1·135445	0·880712	18·194719	15·905023
18	1·143960	0·874156	19·338679	16·779179
19	1·152540	0·867649	20·491219	17·646828
20	1·161184	0·861189	21·652403	18·508017
21	1·169893	0·854779	22·822296	19·362796
22	1·178667	0·841589	24·000963	20·204385
23	1·187507	0·842100	25·188470	21·046485
24	1·196414	0·835831	26·384884	21·882316
25	1·205387	0·829609	27·590271	22·711925
26	1·214427	0·823434	28·804698	23·535359
27	1·223535	0·817304	30·028233	24·352663
28	1·232712	0·811220	31·260945	25·163883
29	1·241957	0·805181	32·502902	25·969064
30	1·251272	0·799187	33·754174	26·768251
31	1·260656	0·793238	35·014830	27·561489
32	1·270111	0·787333	36·284941	28·348822
33	1·279637	0·781472	37·564578	29·130294
34	1·289234	0·775654	38·853812	29·905948
35	1·298904	0·769880	40·152716	30·675828
36	1·308645	0·764149	41·461361	31·439977
37	1·318460	0·758461	42·779821	32·198438
38	1·328349	0·752814	44·108170	32·951252
39	1·338311	0·747210	45·446481	33·698462
40	1·348349	0·741648	46·794830	34·440110
41	1·358461	0·736127	48·153291	35·176237
42	1·368650	0·730647	49·521941	35·906884
43	1·378915	0·725208	50·900856	36·632092
44	1·389256	0·719810	52·290112	37·351902
45	1·399676	0·714451	53·689788	38·066353
46	1·410173	0·709133	55·099961	38·775486
47	1·420750	0·703854	56·520711	39·479340
48	1·431405	0·698614	57·952116	40·177954
49	1·442141	0·693414	59·394257	40·871368
50	1·452957	0·688252	60·847214	41·559620

bei 3/4 pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p(1+p)^N}$
51	1·463854	0·683128	62·311068	42·242748
52	1·474833	0·678043	63·785901	42·920791
53	1·485894	0·672995	65·271795	43·593786
54	1·497038	0·667986	66·768833	44·261772
55	1·508266	0·663013	68·277099	44·924785
56	1·519578	0·658077	69·796677	45·582862
57	1·530975	0·653179	71·327652	46·236041
58	1·542457	0·648316	72·870109	46·884357
59	1·554026	0·643490	74·424135	47·527847
60	1·565681	0·638700	75·989816	48·166547
61	1·577424	0·633945	77·567240	48·800492
62	1·589254	0·629226	79·156494	49·429718
63	1·601174	0·624542	80·757668	50·054260
64	1·613183	0·619893	82·370851	50·674153
65	1·625281	0·615278	83·996132	51·289431
66	1·637471	0·610698	85·633603	51·900129
67	1·649752	0·606152	87·283355	52·506281
68	1·662125	0·601639	88·945480	53·107920
69	1·674591	0·597161	90·620071	53·705081
70	1·687151	0·592715	92·307222	54·297796
71	1·699804	0·588303	94·007026	54·886099
72	1·712553	0·583924	95·719579	55·470023
73	1·725397	0·579577	97·444976	56·049600
74	1·738337	0·575262	99·183313	56·624862
75	1·751375	0·570980	100·934688	57·195842
76	1·764510	0·566730	102·699198	57·762572
77	1·777744	0·562511	104·476942	58·325083
78	1·791077	0·558323	106·268019	58·883406
79	1·804510	0·554167	108·072529	59·437573
80	1·818044	0·550042	109·890573	59·987615
81	1·831679	0·545947	111·722252	60·533562
82	1·845417	0·541883	113·567669	61·075445
83	1·859258	0·537849	115·426927	61·613294
84	1·873202	0·533845	117·300129	62·147139
85	1·887251	0·529871	119·187380	62·677010
86	1·901405	0·525927	121·088785	63·202937
87	1·915666	0·522012	123·004451	63·724949
88	1·930033	0·518126	124·934484	64·243075
89	1·944509	0·514269	126·878993	64·757344
90	1·959092	0·510440	128·838085	65·267784
91	1·973786	0·506641	130·811871	65·774425
92	1·988589	0·502869	132·800460	66·277294
93	2·003503	0·499126	134·803963	66·776420
94	2·018530	0·495410	136·822493	67·271830
95	2·033669	0·491722	138·856162	67·763552
96	2·048921	0·488062	140·905083	68·251614
97	2·064288	0·484428	142·969371	68·736042
98	2·079770	0·480822	145·049141	69·216864
99	2·095369	0·477243	147·144510	69·694107
100	2·111084	0·473690	149·255594	70·167797

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·01	0·990099	1·01	0·990099
2	1·0201	0·980296	2·0301	1·970395
3	1·030301	0·970590	3·060401	2·940985
4	1·040604	0·960980	4·101005	3·901965
5	1·051010	0·951466	5·152015	4·853431
6	1·061520	0·942045	6·213535	5·795476
7	1·072135	0·932718	7·285670	6·728194
8	1·082857	0·923483	8·368527	7·651677
9	1·093685	0·914340	9·462213	8·566017
10	1·104622	0·905287	10·566835	9·471304
11	1·115668	0·896324	11·682503	10·367628
12	1·126825	0·887449	12·809328	11·255077
13	1·138093	0·878663	13·947421	12·133740
14	1·149474	0·869963	15·096895	13·003703
15	1·160969	0·861350	16·257864	13·865053
16	1·172579	0·852821	17·430443	14·717874
17	1·184304	0·844378	18·614748	15·562251
18	1·196147	0·836017	19·810895	16·398268
19	1·208109	0·827740	21·019004	17·226008
20	1·220190	0·819545	22·239194	18·045553
21	1·232392	0·811430	23·471586	18·856983
22	1·244716	0·803396	24·716302	19·660379
23	1·257163	0·795442	25·973465	20·455821
24	1·269735	0·787566	27·243200	21·243387
25	1·282432	0·779768	28·525632	22·023155
26	1·295256	0·772048	29·820888	22·795203
27	1·308209	0·764404	31·129097	23·559607
28	1·321291	0·756836	32·450388	24·316443
29	1·334504	0·749342	33·784892	25·065785
30	1·347849	0·741923	35·132741	25·807708
31	1·361327	0·734577	36·494068	26·542285
32	1·374941	0·727304	37·869009	27·269589
33	1·388690	0·720103	39·257699	27·989692
34	1·402577	0·712973	40·660276	28·702665
35	1·416603	0·705914	42·076879	29·408580
36	1·430769	0·698925	43·507648	30·107505
37	1·445076	0·692005	44·952724	30·799510
38	1·459527	0·685153	46·412251	31·484663
39	1·474123	0·678370	47·886374	32·163033
40	1·488864	0·671653	49·375237	32·834686
41	1·503752	0·665003	50·878989	33·499689
42	1·518790	0·658419	52·397779	34·158108
43	1·533978	0·651900	53·931757	34·810008
44	1·549318	0·645446	55·481075	35·455453
45	1·564811	0·639055	57·045886	36·094508
46	1·580459	0·632728	58·626345	36·727236
47	1·596263	0·626463	60·222608	37·353699
48	1·612226	0·620260	61·834834	37·973959
49	1·628348	0·614119	63·463182	38·588078
50	1·644632	0·608039	65·107814	39·196117

bei 1 pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	1·661078	0·602019	66·768892	39·798136
52	1·677689	0·596058	68·446581	40·394194
53	1·694466	0·590157	70·141047	40·984351
54	1·711410	0·584313	,71·852457	41·568664
55	1·728525	0·578528	73·580982	42·147192
56	1·745810	0·572800	75·326792	42·719992
57	1·763268	0·567129	77·090060	43·287121
58	1·780901	0·561514	78·870961	43·848635
59	1·798710	0·555954	80·669671	44·404589
60	1·816697	0·550450	82·486368	44·955039
61	1 834864	0·545000	84·321232	45·500039
62	1·853212	0·539604	86·174444	46·039642
63	1·871744	0·534261	88·046188	46·573903
64	1·890462	0·528971	89·936650	47·102874
65	1·909366	0·523734	91·846016	47·626608
66	1·928460	0·518548	93·774476	48·145156
67	1·947745	0·513414	95·722221	48·658570
68	1·967222	0·508331	97·689443	49·166901
69	1·986894	0·503298	99·676337	49·670199
70	2·006763	0·498315	101·683100	50·168514
71	2·026831	0·493381	103·709931	50·661895
72	2·047099	0·488496	105·757030	51·150391
73	2·067570	0·483660	107·824600	51·634051
74	2·088246	0·478871	109·912846	52·112922
75	2·109128	0·474130	112·021974	52·587052
76	2·130220	0·469435	114·152194	53·056487
77	2·151522	0·464787	116·303716	53·521274
78	2·173037	0·460185	118·476753	53·981459
79	2·194768	0·455629	120·671521	54·437088
80	2·216715	0·451118	122·888236	54·888206
81	2·238882	0·446651	125·127118	55·334857
82	2·261271	0·442229	127·388389	55·777086
83	2·283884	0·437851	129·672273	56·214937
84	2·306723	0·433516	131·978996	56·648453
85	2·329790	0·429223	134·308786	57·077676
86	2·353088	0·424974	136·661874	57·502650
87	2·376619	0·420766	139·038493	57·923416
88	2·400385	0·416600	141·438878	58·340016
89	2·424389	0·412475	143·863267	58·752491
90	2·448633	0·408391	146·311900	59·160882
91	2·473119	0·404348	148·785019	59·565230
92	2·497850	0·400344	151·282869	59·965574
93	2·522829	0·396381	153·805698	60·361955
94	2·548057	0‘392456	156·353755	60·754411
95	2·573538	0·388570	158·927293	61·142981
96	2·599273	0·384723	161·526566	61·527704
97	2·625266	0·380914	164·151832	61·908618
98	2·651518	0·377142	166·803350	62·285760
99	2·678033	0·373408	169·481383	62·659168
100	2·704814	0·369711	172·186197	63·028879

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·0125	0·987654	1·0125	0·987654
2	1·025156	0·975461	2·037656	1·963115
3	1·037971	0·963418	3·075627	2·926533
4	1·050945	0·951524	4·126572	3·878057
5	1·064082	0·939777	5·190654	4·817834
6	1·077383	0·928175	6·268037	5·746009
7	1·090850	0·916716	7·358887	6·662725
8	1·104486	0·905398	8·463373	7·568123
9	1·118292	0·894221	9·581665	8·462344
10	1·132271	0·883181	10·713936	9·345525
11	1·146424	0·872277	11·860360	10·217802
12	1·160755	0·861509	13·021115	11·079311
13	1·175264	0·850873	14·196379	11·930184
14	1·189955	0·840368	15·386334	12·770552
15	1·204829	0·829993	16·591163	13·600545
16	1·219890	0·819746	17·811053	14·420291
17	1·235138	0·809626	19·046191	15·229917
18	1·250577	0·799631	20·296768	16·029548
19	1·266210	0·789759	21·562978	16·819307
20	1·282037	0·780009	22·845015	17·599316
21	1·298063	0·770379	24·143078	18·369695
22	1·314288	0·760868	25·457366	19·130563
23	1·330717	0·751474	26·788083	19·882037
24	1·347351	0·742197	28·135434	20·624234
25	1·364193	0·733034	29·499627	21·357268
26	1·381245	0·723984	30·880872	22·081252
27	1·398511	0·715046	32·279383	22·796298
28	1·415992	0·706219	33·695375	23·502517
29	1·433692	0·697500	35·129067	24·200017
30	1·451613	0·688889	36·580680	24·888906
31	1·469759	0·680384	38·050439	25·569290
32	1·488131	0·671984	39·538570	26·241274
33	1·506732	0·663688	41·045302	26·904962
34	1·525566	0·655494	42·570868	27·560456
35	1·544636	0·647402	44·115504	28·207858
36	1·563944	0·639409	45·679448	28·847267
37	1·583493	0·631515	47·262941	29·478782
38	1·603287	0·623719	48·866228	30·102501
39	1·623328	0·616019	50·489556	30·718520
40	1·643619	0·608413	52·133175	31·326933
41	1·664165	0·600902	53·797340	31·927835
42	1·684967	0·593484	55·482307	32·521319
43	1·706029	0·586157	57·188336	33·107476
44	1·727354	0·578920	58·915690	33·686396
45	1·748946	0·571773	60·664636	34·258169
46	1·770808	0·564714	62·435444	34·822883
47	1·792943	0·557742	64·228387	35·380625
48	1·815355	0·550856	66·043742	35·931481
49	1·838047	0·544056	67·881789	36·475537
50	1·861022	0·537339	69·742811	37·012876

bei 1 ¼ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N - 1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	1·884285	0·530705	71·627096	37·543581
52	1·907839	0·524153	73·534935	38·067734
53	1·931687	0·517682	75·466622	38·585416
54	1·955833	0·511291	77·422455	39·096707
55	1·980281	0·504979	79·402736	39·601686
56	2·005034	0·498745	81·407770	40·100431
57	2·030097	0·492587	83·437867	40·593018
58	2·055473	0·486506	85·493340	41·079524
59	2·081167	0·480500	87·574507	41·560024
60	2·107181	0·474568	89·681688	42·034592
61	2·133521	0·468709	91·815209	42·503301
62	2·160190	0·462922	93·975399	42·966223
63	2·187193	0·457207	96·162592	43·423430
64	2·214532	0·451563	98·377124	43·874993
65	2·242214	0·445988	100·619338	44·320981
66	2·270242	0·440482	102·889580	44·761463
67	2·298620	0·435044	105·188200	45·196507
68	2·327353	0·429673	107·515553	45·626180
69	2·356444	0·424368	109·871997	46·050548
70	2·385900	0·419129	112·257897	46·469677
71	2·415724	0·413955	114·673621	46·883632
72	2·445920	0·408844	117·119541	47·292476
73	2·476494	0·403797	119·596035	47·696273
74	2·567450	0·398811	122·103485	48·095084
75	2·538794	0·393888	124·642279	48·488972
76	2·570529	0·389025	127·212808	48·877997
77	2·602660	0·384222	129·815468	49·262219
78	2·635193	0·379479	132·450661	49·641698
79	2·668133	0·374794	135·118794	50·016492
80	2·701485	0·370167	137·820279	50·386659
81	2·735253	0·365597	140·555532	50·752256
82	2·769444	0·361083	143·324976	51·113339
83	2·804062	0·356625	146·129038	51·469964
84	2·839113	0·352223	148·968151	51·822187
85	2·874602	0·347874	151·842753	52·170061
86	2·910534	0·343580	154·753287	52·513641
87	2·946916	0·339338	157·700203	52·852979
88	2·983753	0·335148	160·683956	53·188127
89	3·021049	0·331011	163·705005	53·519138
90	3·058813	0·326924	166·763818	53·846062
91	3·097048	0·322888	169·860866	54·168950
92	3·135761	0·318902	172·996627	54·487852
93	3·174958	0·314965	176·171585	54·802817
94	3·214645	0·311076	179·386230	55·113893
95	3·254828	0·307236	182·641058	55·421129
96	3·295513	0·303443	185·936571	55·724572
97	3·336707	0·299697	189·273278	56·024269
98	3·378416	0·295997	192·651694	56·320266
99	3·420646	0·292342	196·072340	56·612608
100	3·463404	0·288733	199·535744	56·901341

Tabelle

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·015	0·985222	1·015	0·985222
2	1·030225	0·970662	2·045225	1·955884
3	1·046678	0·956317	3·091903	2·912201
4	1·061364	0·942184	4·153267	3·854385
5	1·077284	0·928260	5·230551	4·782645
6	1·093443	0·914542	6·323994	5·697187
7	1·109845	0·901027	7·433839	6·598214
8	1·126493	0·887711	8·560332	7·485925
9	1·143390	0·874592	9·703722	8·360517
10	1·160541	0·861667	10·864263	9·222184
11	1·177949	0·848933	12·042212	10·071117
12	1·195618	0·836387	13·237830	10·907504
13	1·213552	0·824027	14·451382	11·731531
14	1·231756	0·811849	15·683138	12·543380
15	1·250232	0·799852	16·933370	13·343232
16	1·268986	0·788031	18·202356	14·131263
17	1·288020	0·776385	19·490376	14·907648
18	1·307341	0·764912	20·797717	15·672560
19	1·326951	0·753607	22·124668	16·426167
20	1·346855	0·742470	23·471523	17·168637
21	1·367058	0·731498	24·838581	17·900135
22	1·387564	0·720688	26·226145	18·620823
23	1·408377	0·710037	27·634522	19·330860
24	1·429503	0·699544	29·064025	20·030404
25	1·450945	0·689206	30·514970	20·719610
26	1·472710	0·679021	31·987680	21·398631
27	1·494800	0·668986	33·482480	22·067617
28	1·517222	0·659099	34·999702	22·726716
29	1·539981	0·649359	36·539683	23·376075
30	1·563080	0·639762	38·102763	24·015837
31	1·586526	0·630308	39·689289	24·646145
32	1·610324	0·620993	41·299613	25·267138
33	1·634479	0·611816	42·934092	25·878954
34	1·658996	0·602774	44·593088	26·481728
35	1·683881	0·593866	46·276969	27·075594
36	1·709140	0·585090	47·986109	27·660684
37	1·734777	0·576443	49·720886	28·237127
38	1·760798	0·567924	51·481684	28·805051
39	1·787210	0·559531	53·268894	29·364582
40	1·814018	0·551262	55·082912	29·915844
41	1·841229	0·543116	56·924141	30·458960
42	1·868847	0·535089	58·792988	30·994049
43	1·896880	0·527182	60·689868	31·521231
44	1·925333	0·519391	62·615201	32·040622
45	1·954213	0·511715	64·569414	32·552337
46	1·983526	0·504153	66·552940	33·056490
47	2·013279	0·496702	68·566219	33·553192
48	2·043478	0·489362	70·609697	34·042554
49	2·074130	0·482130	72·683827	34·524684
50	2·105242	0·475005	74·789069	34·999689

bei 1½ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	2·136821	0·467985	76·925890	35·467674
52	2·168873	0·461069	79·094763	35·928743
53	2·201406	0·454255	81·296169	36·382998
54	2·234428	0·447542	83·530597	36·830540
55	2·267944	0·440928	85·798541	37·271468
56	2·301963	0·434412	88·100504	37·705880
57	2·336493	0·427992	90·436997	38·133872
58	2·371540	0·421667	92·808537	38·555539
59	2·407113	0·415435	95·215650	38·970974
60	2·443220	0·409296	97·658870	39·380270
61	2·479868	0·403247	100·138738	39·783517
62	2·517066	0·397288	102·655804	40·180805
63	2·554822	0·391417	105·210626	40·572222
64	2·593144	0·385632	107·803770	40·957854
65	2·632042	0·379933	110·435812	41·337787
66	2·671522	0·374318	113·107334	41·712105
67	2·711595	0·368787	115·818929	42·080892
68	2·752269	0·363337	118·571198	42·444229
69	2·793553	0·357967	121·364751	42·802196
70	2·835456	0·352677	124·200207	43·154873
71	2·877988	0·347465	127·078195	43·502338
72	2·921158	0·342330	129·999353	43·844668
73	2·964975	0·337271	132·964328	44·181939
74	3·009450	0·332287	135·973778	44·514226
75	3·054592	0·327376	139·028370	44·841602
76	3·100411	0·322538	142·128781	45·164140
77	3·146917	0·317771	145·275698	45·481911
78	3·194120	0·313075	148·469818	45·794986
79	3·242032	0·308448	151·711850	46·103434
80	3·290663	0·303890	155·002513	46·407324
81	3·340023	0·299399	158·342536	46·706723
82	3·390123	0·294975	161·732659	47·001698
83	3·440975	0·290615	165·173634	47·292313
84	3·492590	0·286321	168·666224	47·578634
85	3·544978	0·282089	172·211202	47·860723
86	3·598153	0·277920	175·809355	48·138643
87	3·652125	0·273813	179·461480	48·412456
88	3·706907	0·269767	183·168387	48·682223
89	3·762511	0·265780	186·930898	48·948003
90	3·818949	0·261852	190·749847	49·209855
91	3·876233	0·257982	194·626080	49·467837
92	3·934376	0·254170	198·560456	49·722007
93	3·993392	0·250414	202·553848	49·972421
94	4·053293	0·246713	206·607141	50·219134
95	4·114092	0·243067	210·721233	50·462201
96	4·175804	0·239475	214·897037	50·701676
97	4·238441	0·235936	219·135478	50·937612
98	4·302017	0·232449	223·437495	51·170061
99	4·366547	0·229014	227·804042	51·399075
100	4·432046	0·225629	232·236088	51·624704

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·0175	0·982801	1·0175	0·982801
2	1·035306	0·965898	2·052806	1·948699
3	1·053424	0·949285	3·106230	2·897984
4	1·071859	0·932959	4·178089	3·830943
5	1·090617	0·916913	5·268706	4·747856
6	1·109702	0·901143	6·378408	5·648999
7	1·129122	0·885644	7·507530	6·534643
8	1·148882	0·870412	8·656412	7·405055
9	1·168987	0·855441	9·825399	8·260496
10	1·189444	0·840729	11·014843	9·101225
11	1·210260	0·826269	12·225103	9·927494
12	1·231439	0·812058	13·456542	10·739552
13	1·252990	0·798091	14·709532	11·537643
14	1·274917	0·784365	15·984449	12·322008
15	1·297228	0·770875	17·281677	13·092883
16	1·319929	0·757616	18·601606	13·850499
17	1·343028	0·744586	19·944634	14·595085
18	1·366531	0·731780	21·311165	15·326865
19	1·390445	0·719194	22·701610	16·046059
20	1·414778	0·706825	24·116388	16·752884
21	1·439537	0·694668	25·555925	17·447552
22	1·464729	0·682720	27·020654	18·130272
23	1·490361	0·670978	28·511015	18·801250
24	1·516443	0·659438	30·027458	19·460688
25	1·542981	0·648096	31·570439	20·108784
26	1·569983	0·636950	33·140422	20·745734
27	1·597457	0·625995	34·737879	21·371729
28	1·625413	0·615228	36·363292	21·986957
29	1·653858	0·604647	38·017150	22·591604
30	1·682800	0·594248	39·699950	23·185852
31	1·712249	0·584027	41·412199	23·769879
32	1·742213	0·573982	43·154412	24·343861
33	1·772702	0 564111	44·927114	24·907972
34	1·803725	0·554408	46·730839	25·462380
35	1·835290	0·544873	48·566129	26·007253
36	1·867407	0·535502	50·433536	26·542755
37	1·900087	0·526292	52·333623	27·069047
38	1·933338	0·517240	54·266961	27·586287
39	1·967172	0·508344	56·234133	28·094631
40	2·001597	0·499601	58·235730	28·594232
41	2·036625	0·491008	60·272355	29·085240
42	2·072266	0·482563	62·344621	29·567803
43	2·108531	0 474264	64·453152	30·042067
44	2·145430	0·466107	66·598582	30·508174
45	2·182975	0·458090	68·781557	30·966264
46	2·221177	0·450212	71·002734	31·416476
47	2·260048	0·442469	73·262782	31·858945
48	2·299599	0·434858	75·562381	32·293803
49	2·339842	0·427379	77·902223	32·721182
50	2·380789	0·420029	80·283012	33·141211

bei 1¾ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	2·422453	0·412805	82·705465	33·554016
52	2·464846	0·405705	85·170311	33·959721
53	2·507980	0·398727	87·678291	34·358448
54	2·551870	0·391869	90·230161	34·750317
55	2·596528	0·385130	92·826689	35·135447
56	2·641967	0·378506	95·468656	35·513953
57	2·688202	0·371996	98·156858	35·885949
58	2·735245	0·365598	100·892103	36·251547
59	2·783112	0·359310	103·675215	36·610857
60	2·831816	0·353130	106·507031	36·963987
61	2·881373	0·347057	109·388404	37·311044
62	2·931797	0·341088	112·320201	37·652132
63	2·983104	0·335221	115·303305	37·987353
64	3·035308	0·329456	118·338613	38·316809
65	3·088426	0·323790	121·427039	38·640599
66	3·142473	0·318221	124·569512	38·958820
67	3·197466	0·312748	127·766978	39·271568
68	3·253422	0·307369	131·020400	39·578937
69	3·310357	0·302082	134·330757	39·881019
70	3·368288	0·296887	137·699045	40·177906
71	3·427233	0·291781	141·126278	40·469687
72	3·487210	0·286762	144·613488	40·756449
73	3·548236	0·281830	148·161724	41·038279
74	3·610330	0·276983	151·772054	41·315262
75	3·673511	0·272219	155·445565	41·587481
76	3·737797	0·267537	159·183362	41·855018
77	3·803209	0·262936	162·986571	42·117954
78	3·869765	0·258414	166·856336	42·376368
79	3·937486	0·253969	170·793822	42·630337
80	4·006392	0·249601	174·800214	42·879938
81	4·076504	0·245308	178·876718	43·125246
82	4·147843	0·241089	183·024561	43·366335
83	4·220430	0·236943	187·244991	43·603278
84	4·294287	0·232868	191·539278	43·836146
85	4·369437	0·228862	195·908715	44·065008
86	4·445903	0·224926	200·354618	44·289934
87	4·523706	0·221058	204·878324	44·510992
88	4·602871	0·217256	209·481195	44·728248
89	4·683421	0·213519	214·164616	44·941767
90	4·765381	0·209847	218·929997	45·151614
91	4·848775	0·206238	223·778772	45·357852
92	4·933629	0·202691	228·712401	45·560543
93	5·019967	0·199204	233·732368	45·759747
94	5·107816	0·195778	238·840184	45·955525
95	5·197203	0·192411	244·037387	46·147936
96	5·288154	0·189102	249·325541	46·337038
97	5·380697	0·185850	254·706238	46·522888
98	5·474859	0·182653	260·181097	46·705541
99	5·570669	0·179512	265·751766	46·885053
100	5·668156	0·176424	271·419922	47·061477

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·02	0·980392	1·02	0·980392
2	1·0404	0·961169	2·0604	1·941561
3	1·061208	0·942322	3·121608	2·883883
4	1·082432	0·923845	4·204040	3·807728
5	1·104081	0·905731	5·308121	4·713459
6	1·126162	0·887971	6·434283	5·601430
7	1·148686	0·870560	7·582969	6·471990
8	1·171659	0·853491	8·754628	7·325481
9	1·195093	0·836755	9·949721	8·162236
10	1·218994	0·820349	11·168715	8·982585
11	1·243374	0·804263	12·412089	9·786848
12	1·268242	0·788493	13·680331	10·575341
13	1·293607	0·773033	14·973938	11·348374
14	1·319479	0·757875	16·293417	12·106249
15	1·345869	0·743015	17·639286	12·849264
16	1·372786	0·728446	19·012072	13·577710
17	1·400241	0·714162	20·412313	14·291872
18	1·428246	0·700159	21·840559	14·992031
19	1·456811	0·686431	23·297370	15·678462
20	1·485947	0·672971	24·783317	16·351433
21	1·515666	0·659776	26·298983	17·011209
22	1·545980	0·646839	27·844963	17·658048
23	1·576899	0·634156	29·421862	18·292204
24	1·608437	0·621722	31·030299	18·913926
25	1·640606	0·609531	32·670905	19·523457
26	1·673418	0·597579	34·344323	20·121036
27	1·706886	0·585862	36·051209	20·706898
28	1·741024	0·574375	37·792233	21·281273
29	1·775845	0·563112	39·568078	21·844385
30	1·811362	0·552071	41·379440	22·396456
31	1·847589	0·541246	43·227029	22·937702
32	1·884541	0·530633	45·111570	23·468335
33	1·922231	0·520229	47·033801	23·988564
34	1·960676	0·510028	48·994477	24·498592
35	1·999890	0·500028	50·994367	24·998620
36	2·039887	0·490223	53·034254	25·488843
37	2·080685	0·480611	55·114939	25·969454
38	2·122299	0·471187	57·237238	26·440641
39	2·164745	0·461948	59·401983	26·902589
40	2·208040	0·452890	61·610023	27·355479
41	2·252200	0·444010	63·862223	27·799489
42	2·297245	0·435304	66·159468	28·234793
43	2·343189	0·426769	68·502657	28·661562
44	2·390053	0·418401	70·892710	29·079963
45	2·437854	0·410197	73·330564	29·490160
46	2·486611	0·402154	75·817175	29·892314
47	2·536344	0·394268	78·353519	30·286582
48	2·587070	0·386538	80·940589	30·673120
49	2·638812	0·378958	83·579401	31·052078
50	2·691588	0·371528	86·270989	31·423606

bei 2 pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N - 1]$	$\frac{[(1+p)^N - 1]}{p\,(1+p)^N}$
51	2·745420	0·364243	89·016409	31·787849
52	2·800328	0·357101	91·816738	32·144950
53	2·856335	0·350099	94·673074	32·495049
54	2·913461	0·343234	97·586535	32·838283
55	2·971731	0·336504	100·558266	33·174787
56	3·031165	0·329906	103·589431	33·504693
57	3·091789	0·323438	106·681220	33·828131
58	3·153624	0·317096	109·834844	34·145227
59	3·216697	0·310878	113·051541	34·456105
60	3·281031	0·304782	116·332572	34·760887
61	3·346651	0·298806	119·679223	35·059693
62	3·413584	0·292947	123·092807	35·352640
63	3·481856	0·287203	126·574663	35·639843
64	3·551493	0·281572	130·126156	35·921415
65	3·622523	0·276051	133·748679	36·197466
66	3·694974	0·270638	137·443653	36·468104
67	3·768873	0·265331	141·212526	36·733435
68	3·844251	0·260129	145·056777	36·993564
69	3·921136	0·255028	148·977913	37·248592
70	3·999558	0·250028	152·977471	37·498620
71	4·079549	0·245125	157·057020	37·743745
72	4·161140	0·240319	161·218160	37·984064
73	4·244363	0·235607	165·462523	38·219671
74	4·329250	0·230987	169·791773	38·450658
75	4·415835	0·226458	174·207608	38·677116
76	4·504152	0·222017	178·711760	38·899133
77	4·594235	0·217664	183·305995	39·116797
78	4·686120	0·213396	187·992115	39·330193
79	4·779842	0·209212	192·771957	39·539405
80	4·875439	0·205110	197·647396	39·744515
81	4·972948	0·201088	202·620344	39·945603
82	5·072407	0·197145	207·692751	40·142748
83	5·173855	0·193280	212·866606	40·336028
84	5·277332	0·189490	218·143938	40·525518
85	5·382879	0·185774	223·526817	40·711292
86	5·490536	0·182132	229·017353	40·893424
87	5·600347	0·178560	234·617700	41·071984
88	5·712354	0·175059	240·330054	41·247043
89	5·826601	0·171627	246·156655	41·418670
90	5·943133	0·168261	252·099788	41·586931
91	6·061996	0·164962	258·161784	41·751893
92	6·183236	0·161728	264·345020	41·913621
93	6·306900	0·158557	270·651920	42·072178
94	6·433038	0·155448	277·084958	42·227626
95	6·561699	0·152400	283·646657	42·380026
96	6·692933	0·149411	290·339590	42·529437
97	6·826792	0·146482	297·166382	42·675919
98	6·963328	0·143609	304·129710	42·819528
99	7·102594	0·140794	311·232304	42·960322
100	7·244646	0·138033	318·476950	43·098355

Tabelle

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·0225	0·977995	1·0225	0·977995
2	1·045506	0·956474	2·068006	1·934469
3	1·069030	0·935427	3·137036	2·869896
4	1·093083	0·914843	4·230119	3·784739
5	1·117678	0·894712	5·347797	4·679451
6	1·142825	0·875024	6·490622	5·554475
7	1·168539	0·855769	7·659161	6·410244
8	1·194831	0·836938	8·853992	7·247182
9	1·221715	0·818522	10·075707	8·065704
10	1·249203	0·800510	11·324910	8·866214
11	1·277311	0·782895	12·602221	9·649109
12	1·306050	0·765667	13·908271	10·414776
13	1·335436	0·748819	15·243707	11·163595
14	1·365483	0·732341	16·609190	11·895936
15	1·396207	0·716226	18·005397	12·612162
16	1·427621	0·700466	19·433018	13·312628
17	1·459743	0·685052	20·892761	13·997680
18	1·492587	0·669978	22·385348	14·667658
19	1·526170	0·655235	23·911518	15·322893
20	1·560509	0·640816	25·472027	15·963709
21	1·595621	0·626715	27·067648	16·590424
22	1·631522	0·612925	28·699170	17·203349
23	1·668232	0·599437	30·367402	17·802786
24	1·705767	0·586247	32·073169	18·389033
25	1·744146	0·573346	33·817315	18·962379
26	1·783390	0·560730	35·600705	19·523109
27	1·823516	0·548391	37·424221	20·071500
28	1·864545	0·536324	39·288766	20·607824
29	1·906497	0·524522	41·195263	21·132346
30	1·949393	0·512980	43·144656	21·645326
31	1·993255	0·501692	45·137911	22·147018
32	2·038103	0·490652	47·176014	22·637670
33	2·083960	0·479856	49·259974	23·117526
34	2·130849	0·469296	51·390823	23·586822
35	2·178794	0·458970	53·569617	24·045792
36	2·227816	0·448870	55·797433	24·494662
37	2·277942	0·438993	58·075375	24·933655
38	2·329196	0·429333	60·404571	25·362988
39	2·381603	0·419885	62·786174	25·782873
40	2·435189	0·410646	65·221363	26·193519
41	2·489981	0·401610	67·711344	26·595129
42	2·546005	0·392772	70·257349	26·987901
43	2·603290	0·384129	72·860639	27·372030
44	2·661864	0·375677	75·522503	27·747707
45	2·721756	0·367410	78·244259	28·115117
46	2·782300	0·359325	81·026559	28·474442
47	2·845613	0·351418	83·872172	28·825860
48	2·909640	0·343685	86·781812	29·169545
49	2·975107	0·336122	89·756919	29·505667
50	3·042046	6·328726	92·798965	29·834393

bei 2¼ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p(1+p)^N}$
51	3·110492	0·321493	95·909457	30·155886
52	3·180479	0·314418	99·089936	30·470304
53	3·252039	0·307499	102·341975	30·777803
54	3·325210	0·300733	105·667185	31·078536
55	3·400027	0·294115	109·067212	31·372651
56	3·476528	0·287643	112·543740	31·660294
57	3·554750	0·281314	116·098490	31·941608
58	3·634732	0·275123	119·733222	32·216731
59	3·716513	0·269069	123·449735	32·485800
60	3·800135	0·263149	127·249870	32·748949
61	3·885638	0·257358	131·135508	33·006307
62	3·973065	0·251695	135·108573	33·258002
63	4·062459	0·246156	139·171032	33·504158
64	4·153864	0·240740	143·324896	33·744898
65	4·247326	0·235442	147·572222	33·980340
66	4·342891	0·230261	151·915113	34·210601
67	4·440606	0·225195	156·355719	34·435796
68	4·540519	0·220239	160·896238	34·656035
69	4·642681	0·215393	165·538919	34·871428
70	4·747141	0·210653	170·286060	35·082081
71	4·853952	0·206018	175·140012	35·288099
72	4·963166	0·201484	180·103178	35·489583
73	5·074837	0·197051	185·178015	35·686634
74	5·189021	0·192715	190·367036	35·879349
75	5·305774	0·188474	195·672810	36·067823
76	5·425154	0·184327	201·097964	36·252150
77	5·547220	0·180270	206·645184	36·432420
78	5·672032	0·176304	212·317216	36·608724
79	5·799653	0·172424	218·116869	36·781148
80	5·930145	0·168630	224·047014	36·949778
81	6·063574	0·164919	230·110588	37·114697
82	6·200004	0·161290	236·310592	37·275987
83	6·339504	0·157741	242·650096	37·433728
84	6·482143	0·154270	249·132239	37·587998
85	6·627991	0·150875	255·760230	37·738873
86	6·777121	0·147555	262·537351	37·886428
87	6·929606	0·144308	269·466957	38·030736
88	7·085522	0·141133	276·552479	38·171869
89	7·244947	0·138027	283·797426	38·309896
90	7·407958	0·134990	291·205384	38·444886
91	7·574637	0·132020	298·780021	38·576906
92	7·745066	0·129114	306·525087	38·706020
93	7·919330	0·126273	314·444417	38·832293
94	8·097515	0·123495	322·541932	38·955788
95	8·279709	0·120777	330·821641	39·076565
96	8·466003	0·118119	339·287644	39·194684
97	8·656488	0·115520	347·944132	39·310204
98	8·851259	0·112978	356·795391	39·423182
99	9·050412	0·110492	365·845803	39·533674
100	9·254046	0·108061	375·099849	39·641735

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·025	0·975610	1·025	0·975610
2	1·050625	0·951814	2·075625	1·927424
3	1·076891	0·928599	3·152516	2·856023
4	1·103813	0·905951	4·256329	3·761974
5	1·131408	0·883854	5·387737	4·645828
6	1·159693	0·862297	6·547430	5·508125
7	1·188686	0·841265	7·736116	6·349390
8	1·218403	0·820747	8·954519	7·170137
9	1·248863	0·800728	10·203382	7·970865
10	1·280085	0·781199	11·483467	8·752064
11	1·312087	0·762145	12·795554	9·514209
12	1·344889	0·743556	14·140443	10·257765
13	1·378511	0·725420	15·518954	10·983185
14	1·412974	0·707727	16·931928	11·690912
15	1·448298	0·690466	18·380226	12·381378
16	1·484506	0·673625	19·864732	13·055003
17	1·521618	0·657195	21·386350	13·712198
18	1·559659	0·641166	22·946009	14·353364
19	1·598650	0·625528	24·544659	14·978892
20	1·638616	0·610271	26·183275	15·589163
21	1·679582	0·595386	27·862857	16·184549
22	1·721571	0·580865	29·584428	16·765414
23	1·764611	0·566697	31·349039	17·332111
24	1·808726	0·552875	33·157765	17·884986
25	1·853944	0·539391	35·011709	18·424377
26	1·900293	0·526235	36·912002	18·950612
27	1·947800	0·513400	38·859802	19·464012
28	1·996495	0·500878	40·856297	19·964890
29	2·046407	0·488661	42·902704	20·453551
30	2·097568	0·476743	45·000272	20·930294
31	2·150007	0·465115	47·150279	21·395409
32	2·203757	0·453771	49·354036	21·849180
33	2·258851	0·442703	51·612887	22·291883
34	2·315322	0·431905	53·928209	22·723788
35	2·373205	0·421371	56·301414	23·145159
36	2·432535	0·411094	58·733949	23·556253
37	2·493349	0·401067	61·227298	23·957320
38	2·555682	0·391285	63·782980	24·348605
39	2·619574	0·381741	66·402554	24·730346
40	2·685064	0·372431	69·087618	25·102777
41	2·752190	0·363347	71·839808	25·466124
42	2·820995	0·354485	74·660803	25·820609
43	2·891520	0·345839	77·552323	26·166448
44	2·963808	0·337403	80·516131	26·503851
45	3·037903	0·329174	83·554034	26·833025
46	3·113851	0·321146	86·667885	27·154171
47	3·191697	0·313313	89·859582	27·467484
48	3·271490	0·305671	93·131072	27·773155
49	3·353277	0·298216	96·484349	28·071371
50	3·437109	0·290942	99·921458	28·362313

bei 2½ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	3·523036	0·283846	103·444494	28·646159
52	3·611112	0·276923	107·055606	28·923082
53	3·701390	0·270169	110·756996	29·193251
54	3·793925	0·263579	114·550921	29·456830
55	3·888773	0·257150	118·439694	29·713980
56	3·985992	0·250879	122·425686	29·964859
57	4·085642	0·244760	126·511328	30·209619
58	4·187783	0·238790	130·699111	30·448409
59	4·292478	0·232966	134·991589	30·681375
60	4·399790	0·227283	139·391379	30·908658
61	4·509784	0·221740	143·901163	31·130398
62	4·622529	0·216332	148·523692	31·346730
63	4·738092	0·211055	153·261784	31·557785
64	4·856545	0·205908	158·118329	31·763693
65	4·977958	0·200885	163·096287	31·964578
66	5·102407	0·195986	168·198694	32·160564
67	5·229967	0·191206	173·428661	32·351770
68	5·360717	0·186542	178·789378	32·538312
69	5·494734	0·181992	184·284112	32·720304
70	5·632103	0·177554	189·916215	32·897858
71	5·772905	0·173223	195·689120	33·071081
72	5·917228	0·168998	201·606348	33·240079
73	6·065159	0·164876	207·671507	33·404955
74	6·216788	0·160855	213·888295	33·565810
75	6·372207	0·156931	220·260502	33·722741
76	6·531513	0·153104	226·792015	33·875845
77	6·694800	0·149370	233·486815	34·025215
78	6·862170	0·145726	240·348985	34·170941
79	7·033725	0·142172	247·382710	34·313113
80	7·209568	0·138705	254·592278	34·451818
81	7·389807	0·135321	261·982085	34·587139
82	7·574552	0·132021	269·556637	34·719160
83	7·763916	0·128801	277·320553	34·847961
84	7·958014	0·125659	285·278567	34·973620
85	8·156964	0·122595	293·435531	35·096215
86	8·360888	0·119605	301·796419	35·215820
87	8·569911	0·116687	310·366330	35·332507
88	8·784158	0·113841	319·150488	35·446348
89	9·003762	0·111065	328·154250	35·557413
90	9·228856	0·108356	337·383106	35·665769
91	9·459578	0·105713	346·842684	35·771482
92	9·696067	0·103135	356·538751	35·874617
93	9·938469	0·100619	366·477220	35·975236
94	10·186931	0·098165	376·664151	36·073401
95	10·441604	0·095771	387·105755	36·169172
96	10·702644	0·093435	397·808399	36·262607
97	10·970210	0·091156	408·778609	36·353763
98	11·244465	0·088933	420·023074	36·442696
99	11·525577	0·086764	431·548651	36·529460
100	11·813716	0·084647	443·362367	36·614107

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·0275	0·973236	1·0275	0·973236
2	1·055756	0·947188	2·083256	1·920424
3	1·084790	0·921838	3·168046	2·842262
4	1·114621	0·897166	4·282667	3·739428
5	1·145273	0·873154	5·427940	4·612582
6	1·176768	0·849785	6·604708	5·462367
7	1·209129	0·827041	7·813837	6·289408
8	1·242381	0·804906	9·056218	7·094314
9	1·276546	0·783364	10·332764	7·877678
10	1·311651	0·762398	11·644415	8·640076
11	1·347721	0·741993	12·992136	9·382069
12	1·384784	0·722134	14·376920	10·104203
13	1·422865	0·702807	15·799785	10·807010
14	1·461994	0·683997	17·261779	11·491007
15	1·502199	0·665691	18·763978	12·156698
16	1·543509	0·647874	20·307487	12·804572
17	1·585956	0·630535	21·893443	13·435107
18	1·629570	0·613659	23·523013	14·048766
19	1·674383	0·597235	25·197396	14·646001
20	1·720428	0·581251	26·917824	15·227252
21	1·767740	0·565694	28·685564	15·792946
22	1·816353	0·550554	30·501917	16·343500
23	1·866303	0·535819	32·368220	16·879319
24	1·917626	0·521478	34·285846	17·400797
25	1·970361	0·507521	36·256207	17·908318
26	2·024546	0·493938	38·280753	18·402256
27	2·080221	0·480718	40·360974	18·882974
28	2·137427	0·467852	42·498401	19·350826
29	2·196206	0·455331	44·694607	19·806157
30	2·256602	0·443144	46·951209	20·249301
31	2·318658	0·431284	49·269867	20·680585
32	2·382421	0·419741	51·652288	21·100326
33	2·447938	0·408507	54·100226	21·508833
34	2·515256	0·397574	56·615482	21·906407
35	2·584426	0·386933	59·199908	22·293340
36	2·655498	0·376577	61·855406	22·669917
37	2·728524	0·366499	64·583930	23·036416
38	2·803558	0·356690	67·387488	23·393106
39	2·880656	0·347143	70·268144	23·740249
40	2·959874	0·337852	73·228018	24·078101
41	3·041271	0·328810	76·269289	24·406911
42	3·124905	0·320010	79·394194	24·726921
43	3·210840	0·311445	82·605034	25·038366
44	3·299138	0·303109	85·904172	25·341475
45	3·389865	0·294997	89·294037	25·636472
46	3·483086	0·287102	92·777123	25·923574
47	3·578871	0·279418	96·355994	26·202992
48	3·677290	0·271939	100·033284	26·474931
49	3·778415	0·264661	103·811699	26·739592
50	3·882322	0·257578	107·694021	26·997170

bei 2¾ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	3·989086	0·250684	111·683107	27·247854
52	4·098785	0·243975	115·781892	27·491829
53	4·211502	0·237445	119·993394	27·729274
54	4·327318	0·231090	124·320712	27·960364
55	4·446320	0·224905	128·767032	28·185269
56	4·568593	0·218886	133·335625	28·404155
57	4·694230	0·213028	138·029855	28·617183
58	4·823321	0·207326	142·853176	28·824509
59	4·955962	0·201777	147·809138	29·026286
60	5·092251	0·196377	152·901389	29·222663
61	5·232288	0·191120	158·133677	29·413783
62	5·376176	0·186006	163·509853	29·599789
63	5·524021	0·181028	169·033874	29·780817
64	5·675932	0·176183	174·709806	29·957000
65	5·832020	0·171467	180·541826	30·128467
66	5·992400	0·166878	186·534226	30·295345
67	6·157191	0·162412	192·691417	30·457757
68	6·326514	0·158065	199·017931	30·615822
69	6·500493	0·153835	205·518424	30·769657
70	6·679257	0·149717	212·197681	30·919374
71	6·862936	0·145710	219·060617	31·065084
72	7·051667	0·141810	226·112284	31·206894
73	7·245588	0·138015	233·357872	31·344909
74	7·444842	0·134321	240·802714	31·479230
75	7·649575	0·130726	248·452289	31·609956
76	7·859938	0·127228	256·312227	31·737184
77	8·076086	0·123822	264·388313	31·861006
78	8·298179	0·120508	272·686492	31·981514
79	8·526379	0·117283	281·212871	32·098797
80	8·760854	0·114144	289·973725	32·212941
81	9·001778	0·111089	298·975503	32·324030
82	9·249326	0·108116	308·224829	32·432146
83	9·503683	0·105222	317·728512	32·537368
84	9·765034	0·102406	327·493546	32·639774
85	10·033573	0·099665	337·527119	32·739439
86	10·309496	0·096998	347·836615	32·836437
87	10·593007	0·094402	358·429622	32·930839
88	10·884315	0·091875	369·313937	33·022714
89	11·183633	0·089416	380·497570	33·112130
90	11·491183	0·087023	391·988753	33·199153
91	11·807191	0·084694	403·795944	33·283847
92	12·131889	0·082427	415·927833	33·366274
93	12·465515	0·080221	428·393348	33·446495
94	12·808317	0·078074	441·201665	33·524569
95	13·160546	0·075985	454·362211	33·600554
96	13·522461	0·073951	467·884672	33·674505
97	13·894329	0·071972	481·779001	33·746477
98	14·276423	0·070046	496·055424	33·816523
99	14·669024	0·068171	510·724448	33·884694
100	15·072422	0·066346	525·796870	33·951040

Tabelle

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·03	0·970874	1·03	0·970874
2	1·0609	0·942596	2·0909	1·913470
3	1·092727	0·915142	3·183627	2·828612
4	1·125509	0·888487	4·309136	3·717099
5	1·159274	0·862609	5·468410	4·579708
6	1·194052	0·837484	6·662462	5·417192
7	1·229874	0·813092	7·892336	6·230284
8	1·266770	0·789409	9·159106	7·019693
9	1·304773	0·766417	10·463879	7·786110
10	1·343916	0·744094	11·807795	8·530204
11	1·384234	0·722421	13·192029	9·252625
12	1·425761	0·701380	14·617790	9·954005
13	1·468534	0·680951	16·086324	10·634956
14	1·512590	0·661118	17·598914	11·296074
15	1·557967	0·641862	19·156881	11·937936
16	1·604706	0·623167	20·761587	12·561103
17	1·652848	0·605016	22·414435	13·166119
18	1·702433	0·587395	24·116868	13·753514
19	1·753506	0·570286	25·870374	14·323800
20	1·806111	0·553676	27·676485	14·877476
21	1·860295	0·537549	29·536780	15·415025
22	1·916103	0·521893	31·452883	15·936918
23	1·973587	0·506692	33·426470	16·443610
24	2·032794	0·491934	35·459264	16·935544
25	2·093778	0·477606	37·553042	17·413150
26	2·156591	0·463695	39·709633	17·876845
27	2·221289	0·450189	41·930922	18·327034
28	2·287928	0·437077	44·218850	18·764111
29	2·356566	0·424346	46·575416	19·188457
30	2·427262	0·411987	49·002678	19·600444
31	2·500080	0·399987	51·502758	20·000431
32	2·575083	0·388337	54·077841	20·388768
33	2·652335	0·377026	56·730176	20·765794
34	2·731905	0·366045	59·462081	21·131839
35	2·813862	0·355383	62·275943	21·487222
36	2·898278	0·345032	65·174221	21·832254
37	2·985227	0·334983	68·159448	22·167237
38	3·074783	0·325226	71·234231	22·492463
39	3·167027	0·315753	74·401258	22·808216
40	3·262038	0·306557	77·663296	23·114773
41	3·359899	0·297628	81·023195	23·412401
42	3·460696	0·288959	84·483891	23·701360
43	3·564517	0·280543	88·048408	23·981903
44	3·671452	0·272372	91·719860	24·254275
45	3·781596	0·264439	95·501456	24·518714
46	3·895044	0·256736	99·396500	24·775450
47	4·011895	0·249259	103·408395	25·024709
48	4·132252	0·241999	107·540647	25·266708
49	4·256219	0·234950	111·796866	25·501658
50	4·383906	0·228107	116·180772	25·729765

bei 3 pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	4·515423	0·221463	120·696195	25·951228
52	4·650886	0·215013	125·347081	26·166241
53	4·790412	0·208750	130·137493	26·374991
54	4·934125	0·202670	135·071618	26·577661
55	5·082149	0·196767	140·153767	26·774428
56	5·234613	0·191036	145·388380	26·965464
57	5·391651	0·185472	150·780031	27·150936
58	5·553401	0·180070	156·333432	27·331006
59	5·720003	0·174825	162·053435	27·505831
60	5·891603	0·169733	167·945038	27·675564
61	6·068351	0·164789	174·013389	27·840353
62	6·250402	0·159990	180·263791	28·000343
63	6·437914	0·155330	186·701705	28·155673
64	6·631051	0·150806	193·332756	28·306479
65	6·829983	0·146413	200·162739	28·452892
66	7·034882	0·142149	207·197621	28·595041
67	7·245929	0·138008	214·443550	28·733049
68	7·463307	0·133989	221·906857	28·867038
69	7·687206	0·130086	229·594063	28·997124
70	7·917822	0·126297	237·511885	29·123421
71	8·155357	0·122619	245·667242	29·246040
72	8·400017	0·119047	254·067259	29·365087
73	8·652018	0·115580	262·719277	29·480667
74	8·911578	0·112214	271·630855	29·592881
75	9·178926	0·108945	280·809781	29·701826
76	9·454293	0·105772	290·264074	29·807598
77	9·737922	0·102691	300·001996	29·910289
78	10·030066	0·099700	310·032062	30·009989
79	10·330962	0·096796	320·363024	30·106785
80	10·640891	0·093977	331·003915	30·200762
81	10·960117	0·091240	341·964032	30·292002
82	11·288921	0·088582	353·252953	30·380584
83	11·627588	0·086002	364·880541	30·466586
84	11·976416	0·083497	376·856957	30·550083
85	12·335709	0·081066	389·192666	30·631149
86	12·705780	0·078704	401·898446	30·709853
87	13·086953	0·076412	414·985399	30·786265
88	13·479562	0·074186	428·464961	30·860451
89	13·883949	0·072026	442·348910	30·932477
90	14·300467	0·069928	456·649377	31·002405
91	14·729481	0·067891	471·378858	31·070296
92	15·171366	0·065914	486·550224	31·136210
93	15·626507	0·063994	502·176731	31·200204
94	16·095302	0·062130	518·272033	31·262334
95	16·578161	0·060320	534·850194	31·322654
96	17·075506	0·058563	551·925700	31·381217
97	17·587771	0·056858	569·513471	31·438075
98	18·115404	0·055202	587·628875	31·493277
99	18·658866	0·053594	606·287741	31·546871
100	19·218632	0·052033	625·506373	31·598904

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·035	0·966184	1·035	0·966184
2	1·071225	0·933511	2·106225	1·899695
3	1·108718	0·901943	3·214943	2·801638
4	1·147523	0·871442	4·362466	3·673080
5	1·187686	0·841973	5·550152	4·515053
6	1·229255	0·813501	6·779407	5·328554
7	1·272279	0·785991	8·051686	6·114545
8	1·316809	0·759412	9·368495	6·873957
9	1·362897	0·733731	10·731392	7·607688
10	1·410599	0·708919	12·141991	8·316607
11	1·459970	0·684946	13·601961	9·001553
12	1·511069	0·661783	15·113030	9·663336
13	1·573956	0·639404	16·676986	10·302740
14	1·618695	0·617782	18·295681	10·920522
15	1·675349	0·596891	19·971030	11·517413
16	1·733986	0·576706	21·705016	12·094119
17	1·794676	0·557204	23·499692	12·651323
18	1·857489	0·538361	25·357181	13·189684
19	1·922501	0·520156	27·279682	13·709840
20	1·989789	0·502566	29·269471	14·212406
21	2·059431	0·485571	31·328902	14·697977
22	2·131512	0·469151	33·460414	15·167128
23	2·206114	0·453286	35·666528	15·620414
24	2·283328	0·437957	37·949856	16·058371
25	2·363245	0·423147	40·313101	16·481518
26	2·445959	0·408838	42·759060	16·890356
27	2·531567	0·395012	45·290627	17·285368
28	2·620172	0·381654	47·910799	17·667022
29	2·711878	0·368748	50·622677	18·035770
30	2·806794	0·356278	53·429471	18·392048
31	2·905031	0·344230	56·334502	18·736278
32	3·006708	0·332590	59·341210	19·068868
33	3·111942	0·321343	62·453152	19·390211
34	3·220860	0·310476	65·674012	19·700687
35	3·333590	0·299977	69·007602	20·000664
36	3·450266	0·289833	72·457868	20·290497
37	3·571025	0·280032	76·028893	20·570529
38	3·696011	0·270562	79·724904	20·841091
39	3·825372	0·261412	83·550276	21·102503
40	3·959260	0·252572	87·509536	21·355075
41	4·097834	0·244031	91·607370	21·599106
42	4·241258	0·235779	95·848628	21·834885
43	4·389702	0·227806	100·238330	22·062691
44	4·543342	0·220102	104·781672	22·282793
45	4·702359	0·212659	109·484031	22·495452
46	4·866941	0·205468	114·350972	22·700920
47	5·037284	0·198520	119·388256	22·899440
48	5·213589	0·191806	124·601845	23·091246
49	5·396065	0·185320	129·997910	23·276566
50	5·584927	0·179053	135·582837	23·455619

XIII.

bei 3½ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	5·780399	0·172998	141·363236	23·628617
52	5·982713	0·167148	147·345949	23·795765
53	6·192108	0·161496	153·538057	23·957261
54	6·408832	0·156035	159·946889	24·113296
55	6·633141	0·150758	166·580030	24·264054
56	6·865301	0·145660	173·445331	24·409714
57	7·105587	0·140734	180·550918	24·550448
58	7·354282	0·135975	187·905200	24·686423
59	7·911682	0·131377	195·516882	24·817800
60	7·878091	0·126934	203·394973	24·944734
61	8·153824	0·122642	211·548797	25·067376
62	8·439208	0·118495	219·988005	25·185871
63	8·734580	0·114488	228·722585	25·300359
64	9·040291	0·110616	237·762876	25·410975
65	9·356701	0·106875	247·119577	25·517850
66	9·684185	0·103261	256·803762	25·621111
67	10·023132	0·099769	266·826894	25·720880
68	10·373941	0·096395	277·200835	25·817275
69	10·737029	0·093136	287·937864	25·910411
70	11·112825	0·089986	299·050689	26·000397
71	11·501774	0·086943	310·552463	26·087340
72	11·904336	0·084003	322·456799	26·171343
73	12·320988	0·081162	334·777787	26·252505
74	12·752223	0·078418	347·530010	26·330923
75	13·198550	0·075766	360·728560	26·406689
76	13·660500	0·073204	374·389060	26·479893
77	14·138617	0·070728	388·527677	26·550621
78	14·633469	0·068337	403·161146	26·618958
79	15·145640	0·066026	418·306786	26·684984
80	15·675738	0·063793	433·982524	26·748777
81	16·224388	0·061635	450·206912	26·810412
82	16·792242	0·059551	466·999154	26·869963
83	17·379970	0·057538	484·379124	26·927501
84	17·988269	0·055592	502·367393	26·983093
85	18·617859	0·053712	520·985252	27·036805
86	19·269484	0·051895	540·254736	27·088700
87	19·943916	0·050141	560·198652	27·138841
88	20·641953	0·048445	580·840605	27·187286
89	21·364421	0·046807	602·205026	27·234093
90	22·112176	0·045224	624·317202	27·279317
91	22·886102	0·043695	647·203304	27·323012
92	23·687116	0·042217	670·890420	27·365229
93	24·516165	0·040789	695·406585	27·406018
94	25·374230	0·039410	720·780815	27·445428
95	26·262329	0·038077	747·043144	27·483505
96	27·181510	0·036790	774·224654	27·520295
97	28·132863	0·035546	802·357517	27·555841
98	29·117513	0·034344	831·475030	27·590185
99	30·136626	0·033182	861·611656	27·623367
100	31·191408	0·032060	892·803064	27·655427

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·04	0·961539	1·04	0·961539
2	1·0816	0·924556	2·1216	1·886095
3	1·124864	0·888996	3·246464	2·775091
4	1·169859	0·854804	4·416323	3·629895
5	1·216653	0·821927	5·632976	4·451822
6	1·265319	0·790315	6·898295	5·242137
7	1·315932	0·759918	8·214227	6·002055
8	1·368569	0·730690	9·582796	6·732745
9	1·423312	0·702587	11·006108	7·435332
10	1·480244	0·675564	12·486352	8·110896
11	1·539454	0·649581	14·025806	8·760477
12	1·601032	0·624597	15·626838	9·385074
13	1·665074	0·600574	17·291912	9·985648
14	1·731676	0·577475	19·023588	10·563123
15	1·800944	0·555265	20·824532	11·118388
16	1·872981	0·533908	22·697513	11·652296
17	1·947900	0·513373	24·645413	12·165669
18	2·025817	0·493628	26·671230	12·659297
19	2·106849	0·474642	28·778079	13·133939
20	2·191123	0·456387	30·969202	13·590326
21	2·278768	0·438834	33·247970	14·029160
22	2·369919	0·421955	35·617889	14·451115
23	2·464716	0·405726	38·082605	14·856841
24	2·563304	0·390122	40·645909	15·246963
25	2·665836	0·375117	43·311745	15·622080
26	2·772470	0·360689	46·084215	15·982769
27	2·883369	0·346817	48·967584	16·329586
28	2·998703	0·333478	51·966287	16·663064
29	3·118651	0·320651	55·084938	16·983715
30	3·243398	0·308319	58·328336	17·292034
31	3·373133	0·296460	61·701469	17·588494
32	3·508059	0·285058	65·209528	17·873552
33	3·648381	0·274094	68·857909	18·147646
34	3·794316	0·263552	72·652225	18·411198
35	3·946089	0·253415	76·598314	18·664613
36	4·103933	0·243669	80·702247	18·908282
37	4·268090	0·234297	84·970337	19·142579
38	4·438813	0·225285	89·409150	19·367864
39	4·616366	0·216621	94·025516	19·584485
40	4·801021	0·208289	98·826537	19·792774
41	4·993061	0·200278	103·819598	19·993052
42	5·192784	0·192575	109·012382	20·185627
43	5·400495	0·185168	114·412877	20·370795
44	5·616515	0·178046	120·029392	20·548841
45	5·841176	0·171198	125·870568	20·720039
46	6·074823	0·164614	131·945391	20·884653
47	6·317816	0·158283	138·263207	21·042936
48	6·570528	0·152195	144·833735	21·195131
49	6·833349	0·146341	151·667084	21·341472
50	7·106683	0·140713	158·773767	21·482185

bei 4 pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p(1+p)^N}$
51	7·390951	0·135301	166·164718	21·617486
52	7·686589	0·130097	173·851307	21·747583
53	7·994052	0·125093	181·845359	21·872676
54	8·313814	0·120282	190·159173	21·992958
55	8·646367	0·115655	198·805540	22·108613
56	8·992222	0·111207	207·797762	22·219820
57	9·351910	0·106930	217·149672	22·326750
58	9·725987	0·102817	226·875659	22·429567
59	10·115026	0·098863	236·990685	22·528430
60	10·519627	0·095060	247·510312	22·623490
61	10·940413	0·091404	258·450725	22·714894
62	11·378029	0·087889	269·828754	22·802783
63	11·833150	0·084508	281·661904	22·887291
64	12·306476	0·081258	293·968380	22·968549
65	12·798735	0·078133	306·767115	23·046682
66	13·310685	0·075128	320·077799	23·121810
67	13·843112	0·072238	333·920911	23·194048
68	14·396836	0·069460	348·317746	23·263508
69	14·972710	0·066788	363·290455	23·330296
70	15·571618	0·064219	378·862073	23·394515
71	16·194483	0·061749	395·056556	23·456264
72	16·842262	0·059374	411·898818	23·515638
73	17·515953	0·057091	429·414771	23·572729
74	18·216591	0·054895	447·631362	23·627624
75	18·945255	0·052784	466·576617	23·680408
76	19·703065	0·050754	486·279682	23·731162
77	20·491187	0·048802	506·770869	23·779964
78	21·310835	0·046924	528·081704	23·826888
79	22·163268	0·045120	550·244972	23·872008
80	23·049799	0·043384	573·294771	23·915392
81	23·971791	0·041716	597·266562	23·957108
82	24·930663	0·040111	622·197225	23·997219
83	25·927889	0·038569	648·125114	24·035788
84	26·965005	0·037085	675·090119	24·072873
85	28·043605	0·035659	703·133724	24·108532
86	29·165349	0·034287	732·299073	24·142819
87	30·331963	0·032969	762·631036	24·175788
88	31·545242	0·031700	794·176278	24·207488
89	32·807051	0·030481	826·983329	24·237969
90	34·119333	0·029309	861·102662	24·267278
91	35·484107	0·028182	896·586769	24·295460
92	36·903471	0·027098	933·490240	24·322558
93	38·379610	0·026055	971·869850	24·348613
94	39·914794	0·025053	1011·784644	24·373666
95	41·511386	0·024090	1053·296030	24·397756
96	43·171841	0·023163	1096·467871	24·420919
97	44·898715	0·022272	1141·366586	24·443191
98	46·694664	0·021416	1188·061250	24·464607
99	48·562450	0·020592	1236·623700	24·485199
100	50·504948	0·019800	1287·128648	24·504999

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·045	0·956938	1·045	0·956938
2	1·092025	0·915730	2·137025	1·872668
3	1·141166	0·876297	3·278191	2·748965
4	1·192519	0·838561	4·470710	3·587526
5	1·246182	0·802451	5·716892	4·389977
6	1·302260	0·767896	7·019152	5·157873
7	1·360862	0·734829	8·380014	5·892702
8	1·422101	0·703185	9·802115	6·595887
9	1·486095	0·672904	11·288210	7·268791
10	1·552969	0·643928	12·841179	7·912719
11	1·622853	0·616199	14·464032	8·528918
12	1·695881	0·589664	16·159913	9·118582
13	1·772196	0·564272	17·932109	9·682854
14	1·851945	0·539973	19·784054	10·222827
15	1·935282	0·516720	21·719336	10·739547
16	2·022370	0·494469	23·741706	11·234016
17	2·113377	0·473176	25·855083	11·707192
18	2·208479	0·452800	28·063562	12·159992
19	2·307860	0·433302	30·371422	12·593294
20	2·411714	0·414643	32·783136	13·007937
21	2·520241	0·396787	35·303377	13·404724
22	2·633652	0·379701	37·937029	13·784425
23	2·752166	0·363350	40·689195	14·147775
24	2·876014	0·347704	43·565209	14·495479
25	3·005434	0·332730	46·570643	14·828209
26	3·140679	0·318403	49·711322	15·146612
27	3·282010	0·304691	52·993332	15·451303
28	3·429700	0·291571	56·423032	15·742874
29	3·584036	0·279015	60·007068	16·021889
30	3·745318	0·267000	63·752386	16·288889
31	3·913857	0·255502	67·666243	16·544391
32	4·089981	0·244500	71·756224	16·788891
33	4·274030	0·233971	76·030254	17·022862
34	4·466362	0·223896	80·496616	17·246758
35	4·667348	0·214254	85·163964	17·461012
36	4·877378	0·205028	90·041342	17·666040
37	5·096860	0·196199	95·138202	17·862239
38	5·326219	0·187751	100·464421	18·049990
39	5·565899	0·179666	106·030320	18·229656
40	5·816365	0·171929	111·846685	18·401585
41	6·078101	0·164525	117·924786	18·566110
42	6·351615	0·157440	124·276401	18·723550
43	6·637438	0·150661	130·913839	18·874211
44	6·936123	0·144173	137·849962	19·018384
45	7·248248	0·137964	145·098210	19·156348
46	7·574420	0·132023	152·672630	19·288371
47	8·915268	0·126338	160·587898	19·414709
48	8·271456	0·120898	168·859354	19·535607
49	8·643671	0·115691	177·503025	19·651298
50	9·032636	0·110710	186·535661	19·762008

bei 4 ½ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	9·439105	0·105942	195·974766	19·867950
52	9·863865	0·101380	205·838631	19·969330
53	10·307739	0·097015	216·146370	20·066345
54	10·771587	0·092837	226·917957	20·159182
55	11·256308	0·088839	238·174265	20·248021
56	11·762842	0·085014	249·937107	20·333035
57	12·292170	0·081353	262·229277	20·414388
58	12·845318	0·077849	275·074595	20·492237
59	13·423357	0·074497	288·497952	20·566734
60	14·027408	0·071289	302·525360	20·638023
61	14·658641	0·068219	317·184001	20·706242
62	15·318280	0·065282	332·502281	20·771524
63	16·007603	0·062470	348·509884	20·833994
64	16·727945	0·059780	365·237829	20·893774
65	17·480702	0·057206	382·718531	20·950980
66	18·267334	0·054743	400·985865	21·005723
67	19·089364	0·052385	420·075229	21·058108
68	19·948385	0·050129	440·023614	21·108237
69	20·846063	0·047971	460·869677	21·156208
70	21·784136	0·045905	482·653813	21·202113
71	22·764422	0·043928	505·418235	21·246041
72	23·788821	0·042037	529·207056	21·288078
73	24·859318	0·040226	554·066374	21·328304
74	25·977987	0·038494	580·044361	21·366798
75	27·146996	0·036836	607·191357	21·403634
76	28·368611	0·035250	635·559968	21·438884
77	29·645199	0·033732	665·205167	21·472616
78	30·979233	0·032280	696·184400	21·504896
79	32·373298	0·030890	728·557698	21·535786
80	33·830096	0·029560	762·387794	21·565346
81	35·352451	0·028286	797·740245	21·593632
82	36·943311	0·027068	834·683556	21·620700
83	38·605760	0·025903	873·289316	21·646603
84	40·343019	0·024787	913·632335	21·671390
85	42·158455	0·023720	955·790790	21·695110
86	44·055586	0·022699	999·846376	21·717809
87	46·038087	0·021721	1045·884463	21·739530
88	48·108801	0·020786	1093·994264	21·760316
89	50·274742	0·019891	1144·269006	21·780207
90	52·537105	0·019034	1196·806111	21·799241
91	54·901275	0·018215	1251·707386	21·817456
92	57·371832	0·017430	1309·079218	21·834886
93	59·953565	0·016680	1369·032783	21·851566
94	62·651475	0·015961	1431·684258	21·867527
95	65·470792	0·015274	1497·155050	21·882801
96	68·416977	9·014616	1565·572027	21·897417
97	71·495741	0·013987	1637·067768	21·911404
98	74·713050	0·013385	1711·780818	21·924789
99	78·075137	0·012808	1789·855955	21·937597
100	81·588518	0·012257	1871·444473	21·949854

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·05	0·952381	1·05	0·952381
2	1·1025	0·907030	2·1525	1·859411
3	1·157625	0·863838	3·310125	2·723249
4	1·215506	0·822703	4·525631	3·545952
5	1·276282	0·783526	5·801913	4·329478
6	1·340096	0·746215	7·142009	5·075693
7	1·407100	0·710681	8·549109	5·786374
8	1·477455	0·676839	10·026564	6·463213
9	1·551328	0·644609	11·577892	7·107822
10	1·628895	0·613913	13·206787	7·721735
11	1·710339	0·584679	14·917126	8·306414
12	1·795856	0·556837	16·712982	8·863251
13	1·885649	0·530321	18·598631	9·393572
14	1·979932	0·505068	20·578563	9·898640
15	2·078928	0·481017	22·657491	10·379657
16	2·182875	0·458112	24·840366	10·837769
17	2·292018	0·436297	27·132384	11·274066
18	2·406619	0·415521	29·539003	11·689587
19	2·526950	0·395734	32·065953	12·085321
20	2·653298	0·376890	34·719251	12·462211
21	2·785963	0·358942	37·505214	12·821153
22	2·925261	0·341850	40·430475	13·163003
23	3·071524	0·325571	43·501999	13·488574
24	3·225100	0·310068	46·727099	13·798642
25	3·386355	0·295303	50·113454	14·093945
26	3·555673	0·281241	53·669127	14·375186
27	3·733456	0·267848	57·402583	14·643034
28	3·920129	0·255094	61·322712	14·898128
29	4·116136	0·242946	65·438848	15·141074
30	4·321942	0·231377	69·760790	15·372451
31	4·538039	0·220360	74·298829	15·592811
32	4·764941	0·209866	79·063770	15·802677
33	5·003189	0·199873	84·066959	16·002550
34	5·253348	0·190355	89·320307	16·192905
35	5·516015	0·181290	94·836322	16·374195
36	5·791816	0·172657	100·628138	16·546852
37	6·081407	0·164436	106·709545	16·711288
38	6·385477	0·156605	113·095022	16·867893
39	6·704751	0·149148	119·799773	17·017041
40	7·039989	0·142046	126·839762	17·159087
41	7·391988	0·135282	134·231750	17·294369
42	7·761588	0·128840	141·993338	17·423209
43	8·149667	0·122704	150·143005	17·545913
44	8·557150	0·116861	158·700155	17·662774
45	8·985008	0·111297	167·685163	17·774071
46	9·434258	0·105997	177·119421	17·880068
47	9·905971	0·100940	187·025392	17·981008
48	10·401270	0·096142	197·426662	18·077150
49	10·921333	0·091564	208·347995	18·168714
50	11·467400	0·087204	219·815395	18·255918

bei 5 pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{(1+p)^N-1}{p\,(1+p)^N}$
51	12·040770	0·083051	231·856165	18·338969
52	12·642808	0·079096	244·498973	18·418065
53	13·274949	0·075330	257·773922	18·493395
54	13·938696	0·071743	271·712618	18·565138
55	14·635631	0·068327	286·348249	18·633465
56	15·367412	0·065073	301·715661	18·698538
57	16·135783	0·061974	317·851444	18·760512
58	16·942572	0·059023	334·794016	18·819535
59	17·789701	0·056212	352·583717	18·875747
60	18·679186	0·053536	371·262903	18·929283
61	19·613145	0·050986	390·876048	18·980269
62	20·593802	0·048558	411·469850	19·028827
63	21·623493	0·046246	433·093343	19·075073
64	22·704667	0·044044	455·798010	19·119117
65	23·839901	0·041947	479·637911	19·161064
66	25·031896	0·039949	504·669807	19·201013
67	26·283490	0·038047	530·953297	19·239060
68	27·597665	0·036235	558·550962	19·275295
69	28·977548	0·034510	587·528510	19·309805
70	30·426426	0·032866	617·954936	19·342671
71	31·947747	0·031301	649·902689	19·373972
72	33·545134	0·029811	683·447823	19·403783
73	35·222391	0·028391	718·670214	19·432174
74	36·983510	0·027039	755·653724	19·459213
75	38·832686	0·025752	794·486410	19·484965
76	40·774320	0·024525	835·260730	19·509490
77	42·813036	0·023358	878·073766	19·532848
78	44·953688	0·022245	923·027454	19·555093
79	47·201372	0·021186	970·228826	19·576279
80	49·561441	0·020177	1019·790267	19·596456
81	52·039513	0·019216	1071·829780	19·615672
82	54·641489	0·018301	1126·471269	19·633973
83	57·373563	0·017430	1183·844832	19·651403
84	60·242241	0·016600	1244·087073	19·668003
85	63·254353	0·015809	1307·341426	19·683812
86	66·417071	0·015057	1373 758497	19·698869
87	69·737925	0·014340	1443·496422	19·713209
88	73·224821	0·013657	1516·721243	19·726866
89	76·886062	0·013006	1593·607305	19·739872
90	80·730365	0·012387	1674·337670	19·752259
91	84·766883	0·011797	1759·104553	19·764056
92	89·005227	0·011235	1848·109780	19·775291
93	93·455489	0·010700	1941·565269	19·785991
94	98·128263	0·010191	2039·693532	19·796182
95	103·034676	0·009706	2142·728208	19·805888
96	108·186410	0·009243	2250·914618	19·815131
97	113·595731	0·008803	2364·510349	19·823934
98	119·275517	0·008384	2483·785866	19·832318
99	125·239293	0·007985	2609·025159	19·840303
100	131·501258	0·007605	2740·526417	19·847908

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·055	0·947867	1·055	0·947867
2	1·113025	0·898452	2·168025	1·846319
3	1·174241	0·851614	3·342266	2·697933
4	1·238825	0·807217	4·581091	3·505150
5	1·306960	0·765134	5·888051	4·270284
6	1·378843	0·725246	7·266894	4·995530
7	1·454679	0·687437	8·721573	5·682967
8	1·534687	0·651599	10·256260	6·334566
9	1·619094	0·617629	11·875354	6·952195
10	1·708144	0·585431	13·583498	7·537626
11	1·802092	0·554911	15·385590	8·092537
12	1·901207	0·525982	17·286797	8·618519
13	2·005774	0·498561	19·292571	9·117080
14	2·116091	0·472569	21·408662	9·589649
15	2·232476	0·447933	23·641138	10·037582
16	2·355263	0·424581	25·996401	10·462163
17	2·484802	0·402447	28·481203	10·864610
18	2·621466	0·381466	31·102669	11·246076
19	2·765647	0·361579	33·868316	11·607655
20	2·917757	0·342729	36·786073	11·950384
21	3·078234	0·324862	39·864307	12·275246
22	3·247537	0·307926	43·111844	12·583172
23	3·426152	0·291873	46·537996	12·875045
24	3·614590	0·276657	50·152586	13·151702
25	3·813392	0·262234	53·965978	13·413936
26	4·023129	0·248563	57·989107	13·662499
27	4·244401	0·235605	62·233508	13·898104
28	4·477843	0·223322	66·711351	14·121426
29	4·724124	0·211679	71·435475	14·333105
30	4·983951	0·200644	76·419426	14·533749
31	5·258069	0·190184	81·677495	14·723933
32	5·547262	0·180269	87·224757	14·904202
33	5·852362	0·170871	93·077119	15·075073
34	6·174242	0·161963	99·251361	15·237036
35	6·513825	0·153520	105·765186	15·390556
36	6·872085	0·145516	112·637271	15·536072
37	7·250050	0·137930	119·887321	15·674002
38	7·648802	0·130739	127·536123	15·804741
39	8·069487	0·123924	135·605610	15·928665
40	8·513309	0·117463	144·118919	16·046128
41	8·981541	0·111339	153·100460	16·157467
42	9·475525	0·105535	162·575985	16·263002
43	9·996679	0·100033	172·572664	16·363035
44	10·546497	0·094818	183·119161	16·457853
45	11·126554	0·089875	194·245715	16·547728
46	11·738515	0·085190	205·984230	16·632918
47	12·384133	0·080748	218·368363	16·713666
48	13·065260	0·076539	231·433623	16·790205
49	13·783849	0·072549	245·217472	16·862754
50	14·541961	0·068767	259·759433	16·931521

bei 5½ pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p(1+p)^N}$
51	15·341769	0·065182	275·101202	16·996703
52	16·185566	0·061783	291·286768	17·058486
53	17·075773	0·058563	308·362541	17·117049
54	18·014940	0·055509	326·377481	17·172558
55	19·005762	0·052616	345·383243	17·225174
56	20·051079	0·049873	365·434322	17·275047
57	21·153888	0·047273	386·588210	17·322320
58	22·317352	0·044808	408·905562	17·367128
59	23·544806	0·042472	432·450368	17·409600
60	24·839770	0·040258	457·290138	17·449858
61	26·205958	0·038159	483·496096	17·488017
62	27·647285	0·036170	511·143381	17·524187
63	29·167886	0·034284	540·311267	17·558471
64	30·772120	0·032497	571·083387	17·590968
65	32·464587	0·030803	603·547974	17·621771
66	34·250139	0·029197	637·798113	17·650968
67	36·133896	0·027675	673·932009	17·678643
68	38·121261	0·026232	712·053270	17·704875
69	40·217930	0·024865	752·271200	17·729740
70	42·429916	0·023568	794·701116	17·753308
71	44·763562	0·022340	839·464678	17·775648
72	47·225558	0·021175	886·690236	17·796823
73	49·822963	0·020071	936·513199	17·816894
74	52·563226	0·019025	989·076425	17·835919
75	55·454204	0·018033	1044·530629	17·853952
76	58·504185	0·017093	1103·034814	17·871045
77	61·721915	0·016202	1164·756729	17·887247
78	65·116620	0·015357	1229·873349	17·902604
79	68·698034	0·014556	1298·571383	17·917160
80	72·476426	0·013798	1371·047809	17·930958
81	76·462630	0·013078	1447·510439	17·944036
82	80·668074	0·012396	1528·178513	17·956432
83	85·104818	0·011750	1613·283331	17·968182
84	89·785583	0·011138	1703·068914	17·979320
85	94·723791	0·010557	1797·792705	17·989877
86	99·933599	0·010007	1897·726304	17·999884
87	105·429947	0·009485	2003·156251	18·009369
88	111·228594	0·008990	2114·384845	18·018359
89	117·346167	0·008522	2231·731012	18·026881
90	123·800206	0·008078	2355·531218	18·034959
91	130·609217	0·007656	2486·140435	18·042615
92	137·792724	0·007257	2623·933159	18·049872
93	145·371324	0·006879	2769·304483	18·056751
94	153·366747	0·006520	2922·671230	18·063271
95	161·801918	0·006180	3084·473148	18·069451
96	170·701023	0·005858	3255·174171	18·075309
97	180·089580	0·005553	3435·263751	18·080862
98	189·994507	0·005263	3625·258258	18·086125
99	200·444204	0·004989	3825·702462	18·091114
100	211·468636	0·004729	4037·171098	18·095843

Kapital: Ein Gulden

Perioden	Werth nach N Perioden	Werth vor N Perioden	Werth der periodischen Einlage nach N Perioden	Werth einer Rente für N Perioden
1	1·06	0·943396	1·06	0·943396
2	1·1236	0·889996	2·1836	1·833392
3	1·191016	0·839619	3·374616	2·673011
4	1·262477	0·792094	4·637093	3·465105
5	1·338226	0·747258	5·975319	4·212363
6	1·418519	0·704961	7·393838	4·917324
7	1·503630	0·665057	8·897468	5·582381
8	1·593848	0·627413	10·491316	6·209794
9	1·689479	0·591899	12·180795	6·801693
10	1·790848	0·558395	13·971643	7·360088
11	1·898299	0·526787	15·869942	7·886875
12	2·012196	0·496969	17·882138	8·383844
13	2·132928	0·468839	20·015066	8·852683
14	2·260904	0·442301	22·275970	9·294984
15	2·396558	0·417265	24·672528	9·712249
16	2·540352	0·393646	27·212880	10·105895
17	2·692773	0·371365	29·905653	10·477260
18	2·854339	0·350344	32·759992	10·827604
19	3·025600	0·330513	35·785592	11·158117
20	3·207135	0·311805	38·992727	11·469922
21	3·399564	0·294155	42·392291	11·764077
22	3·603537	0·277505	45·995828	12·041582
23	3·819750	0·261797	49·815578	12·303379
24	4·048935	0·246979	53·864513	12·550358
25	4·291871	0·232999	58·156384	12·783357
26	4·549383	0·219810	62·705767	13·003167
27	4·822346	0·207368	67·528113	13·210535
28	5·111687	0·195630	72·639800	13·406165
29	5·418388	0·184557	78·058188	13·590722
30	5·743491	0·174110	83·801679	13·764832
31	6·088101	0·164255	89·889780	13·929087
32	6·453387	0·154957	96·343167	14·084044
33	6·840590	0·146186	103·183757	14·230230
34	7·251025	0·137911	110·434782	14·368141
35	7·686087	0·130105	118·120869	14·498246
36	8·147252	0·122741	126·268121	14·620987
37	8·636087	0·115793	134·904208	14·736780
38	9·154252	0·109239	144·058460	14·846019
39	9·703507	0·103056	153·761967	14·949075
40	10·285718	0·097222	164·047685	15·046297
41	10·902861	0·091719	174·950546	15·138016
42	11·557033	0·086527	186·507579	15·224543
43	12·250455	0·081630	198·758034	15·306173
44	12·985482	0·077009	211·743516	15·383182
45	13·764611	0·072650	225·508127	15·455832
46	14·590487	0·068538	240·098614	15·524370
47	15·465917	0·064658	255·564531	15·589028
48	16·393872	0·060999	271·958403	15·650027
49	17·377504	0·057546	289·335907	15·707573
50	18·420154	0·054288	307·756061	15·761861

bei 6 pCt. Verzinsung.

N	$(1+p)^N$	$\frac{1}{(1+p)^N}$	$\left(\frac{1+p}{p}\right)[(1+p)^N-1]$	$\frac{[(1+p)^N-1]}{p\,(1+p)^N}$
51	19·525364	0·051215	327·281425	15·813076
52	20·696885	0·048316	347·978310	15·861392
53	21·938698	0·045581	369·917008	15·906973
54	23·255020	0·043002	393·172028	15·949975
55	24·650322	0·040568	417·822350	15·990543
56	26·129341	0·038271	443·951691	16·028814
57	27·697101	0·036105	471·648792	16·064919
58	29·358927	0·034061	501·007719	16·098980
59	31·120463	0·032133	532·128182	16·131113
60	32·987691	0·030314	565·115873	16·161427
61	34·966952	0·028599	600·082825	16·190026
62	37·064969	0·026980	637·147794	16·217006
63	39·288868	0·025452	676·436662	16·242458
64	41·646200	0·024012	718·082862	16·266470
65	44·144972	0·022653	762·227834	16·289123
66	46·793670	0·021370	809·021504	16·310493
67	49·601290	0·020161	858·622794	16·330654
68	52·577368	0·019020	911·200162	16·349674
69	55·732010	0·017943	966·932172	16·367617
70	59·075930	0·016927	1026·008102	16·384544
71	62·620486	0·015969	1088·628588	16·400513
72	66·377715	0·015065	1155·006303	16·415578
73	70·360378	0·014213	1225·366681	16·429791
74	74·582001	0·013408	1299·948682	16·443199
75	79·056921	0·012649	1379·005603	16·455848
76	83·800336	0·011933	1462·805939	16·467781
77	88·828356	0·011258	1551·634295	16·479039
78	94·158058	0·010620	1645·792353	16·489659
79	99·807541	0·010019	1745·599894	16·499678
80	105·795993	0·009452	1851·395887	16·509130
81	112·143753	0·008917	1963·539640	16·518047
82	118·874378	0·008413	2082·412018	16·526460
83	126·004721	0·007936	2208·416739	16·534396
84	133·565004	0·007487	2341·981743	16·541883
85	141·578904	0·007063	2483·560647	16·548946
86	150·073639	0·006664	2633·634286	16·555610
87	159·078057	0·006286	2792·712343	16·561896
88	168·622741	0·005931	2961·335084	16·567827
89	178·740105	0·005595	3140·075189	16·573422
90	189·464511	0·005278	3329·539700	16·578700
91	200·832382	0·004979	3530·372082	16·583679
92	212·882325	0·004697	3743·254407	16·588376
93	225·655264	0·004432	3968·909671	16·592808
94	239·194580	0·004181	4208·104251	16·596989
95	253·546255	0·003944	4461·650506	16·600933
96	268·759030	0·003721	4730·409536	16·604654
97	284·884572	0·003510	5015·294108	16·608164
98	301·977646	0·003312	5317·271754	16·611476
99	320·096305	0·003124	5637·368059	16·614600
100	339·302084	0·002947	5976·670143	16·617547

Tabelle

Vergleichung der am meisten im Gebrauche

Aus Einer feinen Köllnischen

		20 fl. Konvenzions-Fuß	14 Thaler 21 fl. Fuß	24 fl. Rheinischer Fuß	24 1/2 fl.	24 3/8 fl. Amsterdamer Kourant
Oesterreich		**1 fl. KM.**	0·7	1·2	1·225	1·21875
Preußen, Sachsen	Nördliche Zoll-Vereins-Länder	1·428571	**Thaler Preuß.**	1·714286	1·75	1·741071
Baiern	Südliche Zoll-Vereins-Länder	0·833333	0·583333	**1 fl. Rheinisch**	1·020833	1·015628
	Südliche Zoll-Vereins-Länder	0·816327	0·571429	0·979592	**1 fl.**	0·994898
Amsterdam		0·820513	0·574359	0·984615	1·005128	**1 fl. Holländ.**
Hamburg		0·723982	0·506787	0·868778	0·886878	0·882353
London		9·411765	6·588235	11·294118	11·529411	11·470588
Neapel		1·622323	1·135626	1·946788	1·987346	1·977206
Frankreich		0·385106	0·269574	0·462127	0·471754	0·469348
Rußland		1·538461	1·076923	1·846154	1·884615	1·875

Anmerkung. Eine ausgedehnte und erschöpfende Belehrung über das Europäi
Siegf. Becher: Das Oesterreichische Münzwesen von 1524 bis 1838
mission bei Mösle's sel. Witwe und Braumüller.

Tabelle

Vergleichung verschie

Frankreich: Meter französ. Linien 443·2959	Frankreich: Aune französ. Linien 531·955	England Yard französ. Linien 405·3425	Preußen, Dänemark Elle = französ. Lin. 295·65125	Baiern Elle = franz. Lin. 369·27	Hannover Elle = franz. Lin. 258·966
100	83·3333	109·3633	149·9388	120·0466	171·1792
120·0000	**100**	131·2359	179·9265	144·0559	205·4150
91·4384	76·1987	**100**	137·1016	109·7687	156·5234
66·6939	55·5782	72·9386	**100**	80·0637	114·1660
83·3010	69·4175	91·1007	124·9006	**100**	142·5941
58·4184	48·6820	63·8882	87·5917	70·1292	**100**
56·6380	47·1983	61·9412	84·9223	67·9920	96·9525
57·0725	47·5604	62·4164	85·5738	68·5135	97·6963
61·4235	51·1863	67·1748	92·0978	73·7374	105·1442
60·0000	50·0000	65·6180	89·9632	72·0279	102·7075
77·9215	64·9346	85·2174	116·8344	93·5420	133·3851
71·1187	59·2656	77·7778	106·6346	85·3756	121·7404

XIX.

vorkommenden Münzen nach ihrem Pari.

Mark werden geprägt:

27 5/8 Mark	2 5/8 Liv. Sterling	12·328 Ducati di Regno	Franks 51·933789	Rubel 13
1·38125	0·10625	0·6164	2·596689	0·65
1·973214	0·151785	0·880571	3·709556	0·928571
1·151042	0·088542	0·513667	2·163908	0·541667
1·127551	0·086735	0·544	2·119746	0·530612
1·133333	0·087180	0·505764	2·130617	0·533333
1 Mark Banko	0·076923	0·446262	1·879956	0·470588
13·000000	**1 Liv. Sterling**	5·801412	24·439430	6·117647
2·240834	0·172372	1 Ducato di Regno	4·212670	1·054510
0·531927	0·040917	0·237379	**1 Frank**	0·250319
2·125	0·163462	0·948308	3·994907	**1 Rubel**

sche Münzwesen, kann man sich verschaffen aus dem verdienstvollen Werke des Dr.
in historischer, statistischer und legislativer Hinsicht, 2 Bände, Wien 1838 in Kom=

XX.

dener Ellenmaße.

Sachsen Elle = franz. Lin. 251·074	Braunschweig Elle = franz. Lin. 253	Würtemberg Elle = franz. Lin. 272·288	Baden Elle = franz. Lin. 265·9775	Oesterreich Wiener Elle = franz. Lin. 345·4224	Rußland Arschine = franz. Lin. 315·2664
176·5598	175·2157	162·8014	166·6667	128·3344	140·61
211·8718	210·2589	195·3649	200·0000	154·0013	168·732
161·4435	160·2144	148·8655	152·3973	117·3469	128·5714
117·7546	116·8582	108·5803	111·1565	85·5912	93·7785
147·0761	145·9565	135·6174	138·8350	106·9039	117·1295
103·1433	102·3581	95·1074	97·3639	74·9717	82·1420
100	99·2387	92·2089	94·3967	72·6861	79·6383
100·7671	**100**	92·9163	95·1208	73·2436	80·2496
108·4493	107·6237	**100**	102·3725	78·8275	86·3676
105·9359	105·1294	97·6825	**100**	77·0006	84·366
137·5779	136·5359	126·8592	129·8690	**100**	109·5653
125·5672	124·6112	115·7843	118·5312	91·2698	**100**

Tabelle

Vergleichung verschie

Metre	Pariser Fuß	England, Rußland Fuß	Preußen, Dänemark Fuß	Baiern Fuß	Hannover Fuß
100	307·8444	328·0899	318·6199	342·6310	342·3547
32·48394	**100**	106·5765	103·5003	111·3000	111·2103
30·47945	93·82928	**100**	97·11361	104·4320	104·3478
31·38535	96·61806	102·9722	**100**	107·5359	107·4492
29·18592	89·84722	95·75606	92·99217	**100**	99·91937
29·20947	89·91973	95·83333	93·06721	100·0807	**100**
28·31901	87·17847	92·91180	90·23000	97·02968	96·95144
28·53624	87·84722	93·62453	90·92216	97·77400	97·69516
28·76991	88·56655	94·39117	91·66667	98·57461	98·49513
28·64903	88·19444	93·99459	91·28154	98·16046	98·08131
30·00000	92·35332	98·42697	95·58598	102·7893	102·7064
31·61109	97·31299	103·7128	100·7193	108·3094	108·2221

Tabelle

Vergleichung verschie

Quadr. Metre	Pariser Quadr. Fuß	England, Rußland Quadr. Fuß	Preußen, Dänemark Quadr. Fuß	Baiern Quadr. Fuß	Hannover Quadr. Fuß
100	947·6817	1076·430	1015·187	1173·960	1172·067
10·55207	**100**	113·5856	107·1232	123·8770	123·6773
9·28997	88·0393	**100**	94·3105	109·0605	108·8847
9·85041	93·3505	106·0327	**100**	115·6398	115·4534
8·51818	80·7252	91·6922	86·4754	**100**	99·8388
8·53193	80·8556	91·8403	86·6151	100·1615	**100**
8·01966	76·0009	86·3260	81·4145	94·1476	93·9958
8·14317	77·1713	87·6555	82·6684	95·5976	95·4435
8·27708	78·4403	89·0969	84·0278	97·1695	97·0129
8·20767	77·7826	88·3498	83·3232	96·3548	96·1994
9·00000	85·2914	96·8787	91·3668	105·6564	105·4861
9·99261	94·6982	107·5635	101·4437	117·3093	117·1202

XXI.

dener Fußmaße.

Sachsen Fuß	Braunschweig Fuß	Kurhessen Kasseler Fuß	Würtemberg Fuß	Baden Schweiz Fuß	Oesterreich Wiener Fuß
353·1197	350·4316	347·5854	349·0519	333·3333	316·3446
114·7072	113·8340	112·9094	113·3858	108·2798	102·7612
107·6290	106·8096	105·9421	106·3891	101·5982	96·42010
110·8279	109·9842	109·0909	109·5512	104·6178	99·28588
103·0612	102·2767	101·4460	101·8740	97·28640	92·32809
103·1444	102·3592	101·5279	101·9562	97·36491	92·40260
100	99·23874	98·43273	98·84803	94·39668	89·58565
100·7671	**100**	99·18781	99·60630	95·12081	90·27287
101·5922	100·8188	**100**	100·4219	95·89969	91·01206
101·1654	100·3953	99·57986	**100**	95·49678	90·62968
105·9359	105·1295	104·2756	104·7156	**100**	94·90339
111·6250	110·7753	109·8756	110·3391	105·3703	**100**

XXII.

dener Quadratfuße.

Sachsen Quadr. Fuß	Braunschweig Quadr. Fuß	Kurhessen Quadr. Fuß	Würtemberg Quadr. Fuß	Baden Schweiz Quadr. Fuß	Oesterreich Wiener Quadr. Fuß
1246·936	1228·023	1208·156	1218·372	1111·111	1000·739
131·5775	129·5818	127·4854	128·5635	117·2452	105·5987
115·8399	114·0829	112·2373	113·1864	103·2219	92·96836
122·8282	120·9652	119·0083	120·0146	109·4489	98·57686
106·2162	104·6052	102·9129	103·7832	94·6464	85·24476
106·3877	104·7741	103·0791	103·9507	94·7993	85·38240
100	98·84833	96·8900	97·7093	89·1073	80·25589
101·5401	**100**	98·3822	99·2142	90·4797	81·49191
103·2098	101·6444	**100**	100·8456	91·9675	82·83195
102·3444	100·7921	99·1615	**100**	91·1964	82·13738
112·2242	110·5221	108·7340	109·6535	**100**	90·06653
124·6014	122·7116	120·7264	121·7472	111·0290	**100**

Tabelle

Vergleichung verschie

Kubik Metre	Pariser Kubik Fuß	England, Rußland Kubik Fuß	Preußen, Dänemark Kubik Fuß	Baiern Kubik Fuß	Hannover Kubik Fuß
100	2917·385	3531·658	3234·587	4022·350	4012·627
3·427727	**100**	121·0556	110·8728	137·8752	137·5419
2·831531	82·60668	**100**	91·58836	113·8941	113·6188
3·091584	90·19342	109·1842	**100**	124·3543	124·0538
2·486109	72·52938	87·80087	80·41537	**100**	99·75830
2·492133	72·70511	88·01360	80·61021	100·2423	**100**
2·271088	66·25639	80·20706	73·46033	91·35110	91·13031
2·323755	67·79288	82·06707	75·16389	93·46955	93·24363
2·381307	69·47190	84·09962	77·02546	95·78450	95·55299
2·351418	68·59993	84·04405	76·05868	94·58227	94·35366
2·700000	78·76940	95·35476	87·33386	108·6034	108·3409
3·158774	92·15362	111·5571	102·1733	127·0570	126·7499

Tabelle

Vergleichung verschiedener

Decameter à 10 Meters	Alte Toise à 6 Fuß	England Ruthe (Pole) à 16½ Fuß	Preußen Ruthe à 12 Fuß	Baiern Ruthe à 10 Fuß	Hannover Ruthe à 16 Fuß
100	513·0740	198·8424	265·5166	342·6310	213·9717
19·49037	**100**	38·75511	51·75016	66·78003	41·70386
50·29109	258·0305	**100**	133·5312	172·3129	107·6087
37·66243	193·2361	74·88886	**100**	129·0431	80·58692
29·18592	149·7454	58·03398	77·49347	**100**	62·44960
46·73516	239·7859	92·92929	124·0896	160·1291	**100**
42·95049	220·3678	85·40378	114·0407	147·1617	91·90189
45·65799	234·2593	90·78742	121·2295	156·4384	97·69516
28·64903	146·9907	56·96642	76·06795	98·16046	61·30082
30·00000	153·9222	59·65271	79·65499	102·7893	64·19150
18·96666	97·31299	37·71375	50·35963	64·98564	40·58327
21·33562	109·4675	42·42424	56·64960	73·10242	45·65217

XXIII.

dener Kubik Fuße.

Sachsen Kubik Fuß	Braunschweig Kubik Fuß	Kurhessen Kubik Fuß	Würtemberg Kubik Fuß	Baden Schweiz Kubik Fuß	Oesterreich Wiener Kubik Fuß
4403·176	4303·380	4199·374	4252·752	3703·704	3165·785
150·9288	147·5081	143·9431	145·7727	126·9529	108·5145
124·6773	121·8515	118·9066	120·4180	104·8715	89·64019
136·1279	133·0426	129·8272	131·4774	114·5031	97·87291
109·4678	106·9867	104·4010	105·7281	92·07812	78·70486
109·7330	107·2459	104·6540	105·9842	92·30121	78·89556
100	97·73355	95·37149	96·58375	84·11438	71·89776
102·3190	**100**	97·58317	98·82354	86·06500	73·56508
104·8531	102·4767	**100**	101·2711	88·19656	75·38706
103·5371	101·1905	98·74486	**100**	87·08957	74·44084
118·8857	116·1913	113·3831	114·8243	**100**	85·47619
139·0864	135·9341	132·6488	134·3349	116·9916	**100**

XXIV.

Ruthen und Klafter u. s. w.

Sachsen Ruthe à 15⅛ Fuß	Braunschweig Ruthe à 16 Fuß	Würtemberg Ruthe à 10 Fuß	Baden, Schweiz Ruthe à 10 Fuß	Oesterreich Wiener K. à 6 Fuß	Rußland Faden (sashen) à 7 Fuß
232·8262	219·0197	349·0519	333·3333	527·2410	468·6999
45·37868	42·68775	68·03150	64·96789	102·7612	91·35132
117·0908	110·1474	175·5420	167·6370	265·1553	235·7143
87·68800	82·48814	131·4614	125·5414	198·5718	176·5237
67·95247	63·92292	101·8740	97·28640	153·8802	136·7944
108·8117	102·3592	163·1300	155·7839	246·4069	219·0476
100	94·07005	149·9195	143·1683	226·4526	201·3089
106·3038	**100**	159·3701	152·1933	240·7276	213·9989
66·70246	62·74704	**100**	95·49678	151·0499	134·2780
69·84786	65·70592	104·7156	**100**	158·1723	140·6100
44·15935	41·54072	66·20348	63·22219	**100**	88·89670
49·67490	46·72921	74·47237	71·11872	112·4901	**100**

Tabelle

Vergleichung verschie

Frankreich Hectare =100 Quadr. Decimeter	England Acre =160 Quadr. Ruthen	Preußen Morgen =180 Quadr. Ruthen	Baiern Tagewerk =400 Quadr. Ruthen	Hannover Morgen =120Quad. Ruthen	Sachsen Acker =300Quad. Ruthen
100	247·1143	391·6615	293·4899	381·5323	180·6935
40·46710	**100**	158·4941	118·7669	154·3951	73·12142
25·53225	63·09384	**100**	74·93458	97·41378	46·13511
34·07272	84·19856	133·4497	**100**	129·9984	61·56718
26·21010	64·76890	102·6549	76·92400	**100**	47·35994
55·34234	136·7588	216·7549	162·4242	211·1489	**100**
25·01582	61·81747	97·97735	73·41892	95·44345	45·20196
31·51746	77·88414	123·4418	92·50056	120·2493	56·94999
36·00000	88·96115	140·9982	105·6564	137·3516	65·04965
49·36411	121·9858	193·3403	144·8787	188·3401	89·19773
57·55745	142·2327	225·4304	168·9253	219·6003	104·0026
109·2500	269·9725	427·8904	320·6379	416·8242	197·4077

Tabelle

Vergleichung verschie

Frankreich Myriameter = 10000 Meters	England Meile = 5280′	Preußen, Dänemark Meile = 24000′	Hannover Meile = 25400′	Sachsen Pol. Meile = 32000′	Braunschweig Meile = 26000′
100	621·3824	132·7583	134·7853	110·3499	134·7814
16·09315	**100**	21·36499	21·69120	17·75878	21·69057
75·32485	468·0554	**100**	101·5268	83·12091	101·5239
74·19206	461·0164	98·49613	**100**	81·87088	99·99708
90·62082	563·1018	120·3067	122·1435	**100**	122·1400
74·19423	461·0299	98·49901	100·0029	81·87327	**100**
88·88889	552·3399	118·0074	119·8092	98·08882	119·8057
48·00000	298·2636	63·72399	64·69695	52·96796	64·69506
74·20158	461·0755	98·50876	100·0128	81·88138	100·0099
75·86663	471·4219	100·7193	102·2571	83·71876	102·2541
10·66781	66·28788	14·16240	14·37864	11·77192	14·37822
55·65118	345·8067	73·88157	75·00962	61·41104	75·00743

dener Feldmaße.

Braunschweig Feldmorgen =120 Quadr. Ruthen	Würtemberg Morgen =384 Quadr. Ruthen	Baden Morgen, Schweiz Icht =400 Quadr. Ruthen	Schweden Tonne Land =56000 Quadrat Fuß	Oesterreich Wiener Joch =1600 Quadr. Klaft.	Rußland Dessätine =2400 Qdr. Faden
399·7470	317·2845	277·7778	202·5763	173·7394	91·53315
161·7660	128·3958	112·4086	81·97676	70·30732	37·04082
102·0644	81·00986	70·92291	51·72229	14·35959	23·37047
136·2047	108·1074	94·64644	69·02326	59·19775	31·18783
104·7741	83·16058	72·80583	53·09545	45·53728	23·99093
221·2294	175·5927	153·7287	112·1105	96·15148	50·65659
100	79·37132	69·48839	50·67613	43·46235	22·89777
125·9901	**100**	87·54849	63·84690	54·75826	28·84892
143·9089	114·2224	**100**	72·92747	62·54620	32·95194
197·3316	156·6247	137·1225	**100**	85·76494	45·18453
230·0842	182·6209	159·8818	116·5978	**100**	52·68415
436·7238	346·6334	303·4723	221·3147	189·8104	**100**

XXVI.

dener Meilenmaße.

Baden Meile $=29629\,^{17}/_{27}{}'$	Schweiz neue Wegst. =16000′	Deutsche oder geograph. Meile 15=1 Grad	Oesterreichische Meile =24000′	Rußland Werst =3500′	Französische und Englische Seemeile 20=1 Grad
112·5000	208·3333	134·7680	131·8103	937·3997	179·6907
18·10479	33·52740	21·68842	21·21242	150·8571	28·91789
84·74046	156·9268	101·5138	99·28588	706·0950	135·3518
83·46607	154·5668	99·98718	97·79275	695·4762	133·3162
101·9484	188·7934	122·1279	119·4475	849·4794	162·8372
83·46851	154·5713	99·99010	97·79561	695·4965	133·3201
100	185·1852	119·7938	117·1647	833·2442	159·7251
54·00000	**100**	64·68865	63·26893	449·9519	86·25154
83·47677	154·5866	**100**	97·80529	695·5654	133·3333
85·34996	158·0555	102·2440	**100**	711·1736	136·3253
12·00128	22·22460	14·37679	14·06126	**100**	19·16906
62·60758	115·9400	75·00000	73·35397	521·6740	**100**

Tabelle

Vergleichung verschiedener

Frankreich Hektolitre = 100 Litres	England Bushel = 8 Gallons	Preußen Scheffel = 3072 Kubik Zoll	Baiern Scheffel = 208 Maßkanne	Hannover Himten = 1¼ Kubik Fuß	Sachsen Dresdner Scheffel = 7900 Kubik Zoll
100	275·1208	181·9455	44·97260	321·0102	96·31250
36·34767	**100**	66·13296	16·34649	116·6797	35·00735
54·96150	151·2105	**100**	24·71762	176·4320	52·93480
222·3576	611·7521	404·5697	**100**	713·7906	214·1582
31·15166	85·70470	56·67905	14·00971	**100**	300·0294
103·8287	285·6543	188·9117	46·69446	333·3007	**100**
31·14477	85·68575	56·66652	14·00661	99·97789	29·99631
128·0000	352·1547	232·8903	57·56493	410·8931	123·2800
177·2264	487·5868	322·4555	79·70333	568·9148	170·6912
150·0000	412·6812	272·9183	67·45890	481·5153	144·4688
61·50450	169·2117	111·9047	27·66017	197·4357	59·23652
26·21788	72·13086	47·70227	11·79086	84·16208	25·25110

Tabelle

Vergleichung verschiedener

Frankreich Litre = 0·001 Kubik Metre	England Gallon = 277·27384 Kubik Zoll	Preußen Quart = 64 Kubik Zoll	Baiern Maßkanne = 0·043 Kubik Fuß	Hannover Stübchen = 270 Kubik Zoll	Sachsen Dresd. Kanne = 47·213 Kub. Zoll par.
100	22·00967	87·33386	93·54301	25·68082	106·7765
454·3458	**100**	396·7977	425·0088	116·6797	485·1344
114·5031	25·20176	**100**	107·1097	29·40534	122·2624
106·9027	23·52893	93·36225	**100**	27·45348	114·1469
389·3957	85·70470	340·0743	364·2525	**100**	415·7830
93·6536	20·61285	81·79130	87·60640	24·05101	**100**
93·68438	20·61962	81·81818	87·63519	24·05891	100·0329
183·7046	40·43276	160·4363	171·8428	47·17683	196·1532
150·0000	33·01450	131·0008	140·3145	38·52122	160·1647
261·7188	57·60344	228·5692	244·8197	67·21153	279·4541
141·5131	31·14656	123·5889	132·3756	36·34172	151·1027
122·8963	27·04907	107·3301	114·9609	31·56078	131·2243

Hohlmaße für feste Körper.

Braunschweig Himten = 2316 Kubik Zoll	Hessen Darmst. Malter = 128 Litres	Würtemberg Scheffel = 7537 Kubik Zoll	Baden Schweiz Malter = 100 Maß	Oesterreich Wien. Metzen = 1·9471 Kubik Fuß	Rußland Tschetwerik = 1600 Kubik Zoll
321·0812	78·12500	56·42500	66·66667	162·5897	381·4190
116·7055	28·39661	20·50917	24·23178	59·09757	138·6369
176·4710	42·93867	31·01203	36·64100	89·36176	209·6336
713·9484	173·7169	125·4653	148·2384	361·5306	848·1142
100·0221	24·33723	17·57732	20·76777	50·64940	118·8184
333·3744	81·11616	58·58533	69·21912	168·8148	396·0224
100	24·33185	17·57344	20·76318	50·63820	118·7921
410·9839	**100**	72·22400	85·33333	208·1149	488·2164
569·0406	138·4581	**100**	118·1509	288·1519	675·9753
481·6218	117·1875	84·63750	**100**	243·8846	572·1286
197·4794	48·05039	34·70391	41·00300	**100**	234·5899
84·18069	20·48272	14·79344	17·47859	42·62759	**100**

XXVIII.

Hohlmaße für flüßige Körper.

Braunschweig Quartier = 52⁴/₁₁ Kubik Zoll preuß.	Würtemberg Helleichmaß = 78⅕ Kub. Zoll	Baden Schweiz Maß = ¹/₁₈ Kubik Fuß	Schweden Kanne = 0·1 Kubik Fuß	Oesterreich. Maß = 0·0448 Kub. Fuß	Rußland, Stoof = 75 Kubik Zoll
106·7414	54·43523	66·66667	38·20894	70·66484	81·36940
484·9750	247·3242	302·8972	173·6007	321·0627	369·6985
122·2222	62·33004	76·33542	43·75043	80·91345	93·17050
114·1094	58·19273	71·26846	40·84639	75·54261	86·98608
415·6464	211·9685	259·5972	148·7840	275·1659	316·8490
99·96715	50·98055	62·43573	35·78405	66·18016	76·20537
100	50·99730	62·45625	35·79581	66·20191	76·23041
196·0888	**100**	122·4697	70·19157	129·8145	149·4793
160·1121	81·65284	**100**	57·31341	105·9973	122·0541
279·3623	142·4672	174·4792	**100**	184·9432	212·9590
151·0530	77·03298	94·34206	54·07066	**100**	115·1484
131·1812	66·89890	81·93088	46·95739	86·84449	**100**

Tabelle

Gewichts=

Frankreich Kilogramm	Frankreich altes Pfund poids de marc	England Pfund Adp.	Preußen, Hannover, Braunschweig, Kurhessen Pfund	Baiern Pfund	Sachsen neues Pfund, Zollpfund
100	204·2877	220·4597	213·8072	178·5714	200·0000
48·95058	**100**	107·9163	104·6599	87·41176	97·90117
45·35976	92·66439	**100**	96·98245	80·99957	90·71952
46·77110	95·54758	103·1114	**100**	83·51982	93·54220
56·00000	114·4011	123·4574	119·7321	**100**	112·0000
50·00000	102·1438	110·2299	106·9036	89·28571	**100**
46·77280	95·55105	103·1152	100·0036	83·52286	93·54560
49·93090	102·0027	110·0775	106·7559	89·16232	99·86180
42·53395	86·89171	93·77023	90·94066	75·95348	85·06790
23·38123	47·76497	51·54619	49·99076	41·75220	46·76246
56·00122	114·4036	123·4601	119·7347	100·0022	112·0024
40·95200	83·65988	90·28266	87·55834	73·12857	81·90400

Tabelle

Gewichts=

Frankreich Quintal =100 Kilogr.	Frankreich Quintal =100 alte Pfund	England Hndrdwght =112 Pfund Adp.	Preußen, Kurhessen Zent. =110 Pfund	Baiern Zent. =100 Pfund	Hannover, Braunschweig Zenten =100 Pfd.
100	204·2877	196·8390	194·3702	178·5714	213·8072
48·95058	**100**	96·35386	95·14536	87·41176	104·6599
50·80293	103·7841	**100**	98·74577	90·71952	108·6203
51·44821	105·1623	101·2702	**100**	91·87181	110·0000
56·00000	114·4011	110·2299	108·8473	**100**	119·7321
46·77110	95·54758	92·06378	90·90909	83·51982	**100**
50·00000	102·1438	98·41952	97·18511	89·28571	106·9036
48·64371	99·37310	95·74981	94·54889	86·86377	104·0038
49·93090	102·0027	98·28350	97·05080	89·16232	106·7559
51·04074	104·2699	100·4681	99·20800	91·14418	109·1288
56·00122	114·4036	110·2323	108·8497	100·0022	119·7347
16·38080	33·46395	32·24381	31·83940	29·25143	35·02334

XXIX.

Vergleichungen.

Würtemberg Pfund	Dännemark, Norwegen Pfund	Schweden Pfund Schallgewicht	Köln alte Mark	Oesterreich Pfund	Rußland Pfund
213·7995	200·2768	235·1063	427·6935	178·5675	244·1883
104·6561	98·03666	115·0858	209·3585	87·40985	119·5316
96·97893	90·84507	106·6437	194·0007	80·99781	110·7632
99·99637	93·67166	109·9618	200·0370	83·51800	114·2096
119·7277	112·1550	131·6595	239·5084	99·99782	136·7455
106·8997	100·1384	117·5532	213·8467	89·28377	122·0942
100	93·67506	109·9658	200·0442	83·52104	114·2137
106·7520	**100**	117·3907	213·5512	89·16038	121·9254
90·93736	85·18563	**100**	181·9149	75·95183	103·8629
49·98895	46·82718	54·97075	**100**	41·75129	57·09423
119·7303	112·1574	131·6624	239·5136	**100**	136·7484
87·55516	82·01735	96·28074	175·1490	73·12698	**100**

XXX.

Vergleichungen.

Sachsen Zollgewicht Zenten = 100 Pfund	Würtemberg Zenten = 104 Pfund	Dänemark, Norwegen Znt. = 100 Pfd.	Schweden Zenten = 120 Pfund	Oesterreich Zenten = 100 Pfd.	Rußland Pud = 40 Pfund
200·0000	205·5764	200·2768	195·9219	178·5675	610·4708
97·90117	100·6309	98·03666	95·90493	87·40985	298·8290
101·6059	104·4388	101·7465	99·53408	90·71754	310·1371
102·8964	105·7654	103·0388	100·7983	91·86980	314·0763
112·0000	115·1228	112·1550	109·7163	99·99782	341·8636
93·54220	96·15035	93·67166	91·63484	83·51800	285·5239
100	102·7882	100·1384	97·96096	89·28377	305·2354
97·28742	**100**	97·42206	95·30370	86·86188	296·9557
99·86180	102·6462	**100**	97·82558	89·16038	304·8136
102·0815	104·9277	102·2228	**100**	91·14219	311·5888
112·0024	115·1253	112·1574	109·7187	**100**	341·8711
32·7616	33·67506	32·80694	32·09358	29·25079	**100**

Tabelle XXXI.

Kapital 1000 fl. Verzinsung 5% anticipando. Abstattung 10%.

Semester	Abstattung	Hievon an Interessen	Hievon an Kapitals-Zahlung	Rest der Schuld
1	Halbjährig fünfzig Gulden.	24·358974	25·641026	974·358974
2		23·701512	26·298488	948·060486
3		23·027191	26·972809	921·087677
4		22·335581	27·664419	893·423258
5		21·626237	28·373763	865·049495
6		20·898705	29·101295	835·948200
7		20·152518	29·847482	806·100718
8		19·387198	30·612802	775·487916
9		18·602254	31·397746	744·090170
10		17·797184	32·202816	711·887354
11		16·971471	33·028529	678·858825
12		16·124585	33·875415	644·983410
13		15·255985	34·744015	610·239395
14		14·365113	35·634887	574·604508
15		13·451398	36·548602	538·055906
16		12·514254	37·485746	500·570160
17		11·553081	38·446919	462·123241
18		10·567263	39·432737	422·690504
19		9·556168	40·443832	382·246672
20		8·519145	41·480855	340·765816
21		7·455534	42·544466	298·221350
22		6·364650	43·635350	254·586000
23		5·245795	44·754205	209·831795
24		4·098251	45·901749	163·930046
25		2·921283	47·078717	116·851329
26		1·714137	48·285863	68·565466
27		0·476038	49·523962	19·041504
28			19·041504	

Tabelle XXXII.

Kapital 12000 fl. Verzinsung 4% anticipando. Abstattung 8%.

Semester	Abstattung	Hiervon an Interessen	Hiervon an Kapitals-Rückzahlung	Rest der Schuld.
1	Halbjährig 480 Gulden	235·102041	244·897959	11755·102041
2		230·104123	249·895877	11505·206164
3		225·004207	254·995793	11250·210371
4		219·800212	260·199788	10990·010583
5		214·490012	265·509988	10724·500595
6		209·071440	270·928560	10453·572035
7		203·542287	276·457713	10177·114322
8		197·900294	282·099706	9895·014616
9		192·143158	287·856842	9607·157774
10		186·268528	293·731472	9313·426302
11		180·274008	299·725992	9013·700310
12		174·157144	305·842856	8707·857454
13		167·915453	312·084547	8395·772907
14		161·546382	318·453618	8077·319289
15		155·047330	324·952670	7752·366619
16		148·415643	331·584357	7420·782262
17		141·648616	338·351384	7082·430878
18		134·743485	345·256515	6737·174363
19		127·697433	352·302567	6384·871796
20		120·507586	359·492414	6025·379382
21		113·171007	366·828993	5658·550389
22		105·684701	374·315299	5284·235090
23		98·045613	381·954387	4902·280703
24		90·250626	389·749374	4512·531329
25		82·296557	397·703443	4114·827886
26		74·180160	405·819840	3709·008046
27		65·898122	414·101878	3294·906168
28		57·447062	422·552938	2872·353230
29		48·823534	431·176466	2441·176764
30		40·024015	439·975985	2001·200779
31		31·044915	448·955085	1552·245694
32		21·882567	458·117433	1094·128261
33		12·533231	467·466769	626·661492
34		2·993094	477·006906	149·654586
35			149·654586	

Tabelle XXXIII. Verzinsung

jedes noch schuldigen Restes mit 5%. Abstattungs%$=\pi$; $x=K\left(\frac{\pi-5}{195}\right)$, $E=1{\cdot}025641$

Anzahl der Rückzahlungen	Nte Potenz	E^N	Summe	Anzahl der Rückzahlungen	Nte Potenz	E^N	Summe
1	0	1	1	51	50	3·546250	102·849960
2	1	1·025641	2·025641	52	51	3·637180	106·487140
3	2	1·051939	3·077580	53	52	3·730441	110·217581
4	3	1·078912	4·156492	54	53	3·826093	114·043674
5	4	1·106576	5·263068	55	54	3·924198	117·967872
6	5	1·134950	6·398018	56	55	4·024819	121·992691
7	6	1·164051	7·562069	57	56	4·128019	126·120710
8	7	1·193899	8·755968	58	57	4·233865	130·354575
9	8	1·224512	9·980480	59	58	4·342424	134·696999
10	9	1·255910	11·236390	60	59	4·453768	139·150767
11	10	1·288112	12·524502	61	60	4·567967	143·718734
12	11	1·321140	13·845642	62	61	4·685094	148·403828
13	12	1·355016	15·200658	63	62	4·805224	153·209052
14	13	1·389759	16·590417	64	63	4·928435	158·137487
15	14	1·425393	18·015810	65	64	5·054805	163·192292
16	15	1·461942	19·477752	66	65	5·184415	168·376707
17	16	1·499430	20·977182	67	66	5·317348	173·694055
18	17	1·537877	22·515059	68	67	5·453690	179·147745
19	18	1·577309	24·092368	69	68	5·593528	184·741273
20	19	1·617753	25·710121	70	69	5·736953	190·478226
21	20	1·659234	27·369355	71	70	5·884054	196·362280
22	21	1·701779	29·071134	72	71	6·034927	202·397207
23	22	1·745415	30·816549	73	72	6·189673	208·586880
24	23	1·790169	32·606718	74	73	6·348382	214·935262
25	24	1·836071	34·442789	75	74	6·511162	221·446424
26	25	1·883152	36·325941	76	75	6·678115	228·124539
27	26	1·931438	38·257379	77	76	6·849349	234·973888
28	27	1·980962	40·238341	78	77	7·024974	241·998862
29	28	2·031755	42·270096	79	78	7·205102	249·203964
30	29	2·083851	44·353947	80	79	7·389848	256·593812
31	30	2·137282	46·491229	81	80	7·579330	264·173142
32	31	2·192083	48·683312	82	81	7·773673	271·946815
33	32	2·248290	50·931602	83	82	7·972998	279·919813
34	33	2·305938	53·237540	84	83	8·177434	288·097247
35	34	2·365064	55·602604	85	84	8·387111	296·484358
36	36	2·425706	58·028310	86	85	8·602164	305·086522
37	36	2·487904	60·516214	87	86	8·822732	313·909254
38	37	2·551696	63·067910	88	87	9·048956	322·958210
39	38	2·617124	65·685034	89	88	9·280980	332·239190
40	39	2·684231	68·369265	90	89	9·518953	341·758143
41	40	2·753058	71·122323	91	90	9·763029	351·521172
42	41	2·823649	73·954972	92	91	10·013364	361·534536
43	42	2·896050	76·842022	93	92	10·270117	371·804653
44	43	2·970308	79·812330	94	93	10·533453	382·338106
45	44	3·046470	82·858800	95	94	10·803541	393·141647
46	45	3·124585	85·983385	96	95	11·080555	404·222202
47	46	3·204703	89·188088	97	96	11·364670	415·586872
48	47	3·286875	92·474963	98	97	11·656072	427·242944
49	48	3·371153	95·846116	99	98	11·954946	439·197890
50	49	3·457594	99·303710	100	99	12·261483	451·459373

Tabelle XXXIV.

Sterblichkeits-Tafel nach

Alter	Duvillard	Deparcieux	für Northampton	Süßmilch Baumann	Alter	Duvillard	Deparcieux	für Northampton	Süßmilch Baumann
0 J.	1,000000		11650	1000	32	424583	718	4235	427
3 M.			10310		33	417744	710	4160	421
6 M.			9756		34	410886	702	4085	415
9 M.			9203		35	404012	694	4010	409
1 J.	767525		8650	750	36	397123	686	3935	402
2	671834		7283	661	37	390219	678	3860	395
3	624668	1000	6781	618	38	383300	671	3785	388
4	598713	970	6446	593	39	376363	664	3710	381
5	583151	948	6249	579	40	369404	657	3635	374
6	573025	930	6065	567	41	362419	650	3559	367
7	565838	915	5925	556	42	355400	643	3482	360
8	560245	902	5815	547	43	348342	636	3404	353
9	555486	890	5735	539	44	341235	629	3326	346
10	551122	880	5675	532	45	334072	622	3248	339
11	546888	972	5623	527	46	326843	615	3170	332
12	542630	866	5573	523	47	319539	607	3092	324
13	538255	860	5523	519	48	312148	599	3014	316
14	533711	854	5473	515	49	304662	590	2936	308
15	528969	848	5423	511	50	297070	581	2857	300
16	524020	842	5373	507	51	289361	571	2776	291
17	518863	835	5320	503	52	281527	560	2694	282
18	513502	828	5262	499	53	273560	549	2612	273
19	507949	821	5199	495	54	265450	538	2530	264
20	502216	814	5132	491	55	257193	526	2448	255
21	496317	806	5060	486	56	248782	514	2366	246
22	490267	798	4985	481	57	240214	502	2284	237
23	484083	790	4910	476	58	231488	489	2202	228
24	477777	782	4835	471	59	222605	476	2120	219
25	471366	774	4760	466	60	213567	463	2038	210
26	464863	766	4685	461	61	204380	450	1956	201
27	458282	758	4610	456	62	195054	437	1874	192
28	451635	750	4535	451	63	185600	423	1793	182
29	444932	742	4460	445	64	176035	409	1712	172
30	438183	734	4385	439	65	166377	395	1632	162
31	431398	726	4310	433	66	156651	380	1552	152

Tabelle XXXIV.

Sterblichkeits=Tafel nach

Alter	Duvillard	Deparcieux	für Northampton	Süßmilch Baumann	Alter	Duvillard	Deparcieux	für Northampton	Süßmilch Baumann
67	146882	364	1472	142	89	4686	16	62	8
68	137102	347	1392	132	90	3830	11	46	6
69	127347	329	1312	122	91	3093	7	34	5
70	117656	310	1232	112	92	2466	4	24	4
71	108070	291	1152	103	93	1938	2	16	3
72	98637	271	1072	94	94	1499	1	9	2
73	89404	251	992	85	95	1140	0	4	1
74	80423	231	912	77	96	850		1	0
75	71745	211	832	69	97	621			
76	63424	192	752	62	98	442			
77	55511	173	675	55	99	307			
78	48057	154	602	49	100	207			
79	41107	136	534	43	101	135			
80	34705	118	469	37	102	84			
81	28886	101	406	32	103	51			
82	23680	85	346	28	104	29			
83	19106	71	289	24	105	16			
84	15175	59	234	20	106	8			
85	11886	48	186	17	107	4			
86	9224	38	145	14	108	2			
87	7165	29	111	12	109	1			
88	5670	22	83	10	110	0			

Tabelle XXXV.

Duvillard'sche Sterblichkeits-Tafel.

Alter	A Es sterben	B von Lebenden	C Summe aller Lebensjahre	D mittlere	E wahrscheinliche	F Sterblichkeit nach Prozenten	G Es stirbt Einer von
				Lebensdauer			
0 bis 1	232475	1,000000	29263192	28·76	20·4	23·284	4·30
1 » 2	95691	767525	28263192	36·33	37·1	12·468	8·02
2 » 3	47166	671834	27495667	40·43	42·7	7·021	14·24
3 » 4	25955	624668	26823833	42·44	44·9	4·155	24·07
4 » 5	15562	598713	26199165	43·26	45·7	2·599	38·48
5 » 6	10126	583151	25600452	43·40	45·0	1·736	57·60
6 » 7	7187	573025	25017301	43·16	44·6	1·254	79·74
7 » 8	5593	565838	24444276	42·70	44·2	0·989	101·11
8 » 9	4759	560245	23878438	42·72	43·8	0·850	117·65
9 » 10	4364	555486	23318193	41·48	43·5	0·786	127·22
10 » 11	4234	551122	22762707	40·80	42·7	0·768	131·25
11 » 12	4258	546888	22211585	40·11	41·9	0·779	128·37
12 » 13	4375	542630	21664697	39·39	41·2	0·806	124·07
13 » 14	4544	538255	21122067	38·74	40·5	0·844	118·48
14 » 15	4742	533711	20583812	38·01	39·8	0·889	112·48
15 » 16	4949	528969	20050101	37·43	39·1	0·936	106·84
16 » 17	5157	524020	19521132	36·79	38·4	0·984	101·62
17 » 18	5361	518863	18997112	36·15	37·7	1·033	96·89
18 » 19	5553	513502	18478249	35·51	37·0	1·081	92·51
19 » 20	5733	507949	17964747	34·87	36·4	1·129	88·56
20 » 21	5899	502216	17456798	34·27	35·7	1·175	85·11
21 » 22	6050	496317	16954582	33·68	35·0	1·219	82·03
22 » 23	6184	490267	16458265	33·09	34·4	1·261	79·30
23 » 24	6306	484083	15967998	32·50	33·8	1·303	76·74
24 » 25	6411	477777	15483915	31·91	33·2	1·342	74·52
25 » 26	6503	471366	15006138	31·34	32·5	1·380	72·46
26 » 27	6581	464863	14534772	30·77	31·8	1·416	70·62
27 » 28	6647	458282	14069909	30·20	31·2	1·450	68·97
28 » 29	6703	451635	13611627	29·64	30·6	1·484	67·39
29 » 30	6749	444932	13159992	29·08	30·0	1·517	65·92
30 » 31	6785	438183	12715060	28·52	29·3	1·548	64·64
31 » 32	6815	431398	12276877	27·96	28·7	1·580	63·29
32 » 33	6839	424583	11845479	27·40	28·1	1·611	62·07
33 » 34	6858	417744	11420896	26·84	27·5	1·642	60·90
34 » 35	6874	410886	11003152	26·28	26·9	1·673	59·78
35 » 36	6889	404012	10592266	25·71	26·2	1·705	58·65
36 » 37	6904	397123	10188254	25·14	25·5	1·739	57·50
37 » 38	6919	390219	9791131	24·58	24·9	1·773	56·40
38 » 39	6937	383300	9400912	24·02	24·3	1·810	55·24
39 » 40	6959	376363	9017612	23·46	23·7	1·849	54·38

Tabelle XXXV.

Duvillard'sche Sterblichkeits-Tafel.

Alter	A Es sterben	B von Lebenden	C Summe aller Lebensjahre	D mittlere Lebensdauer	E wahrscheinliche Lebensdauer	F Sterblichkeit nach Prozenten	G Es stirbt Einer von
40 bis 41	6985	369404	8641249	22·91	23·0	1·891	52·88
41 » 42	7019	362419	8271845	22·34	22·4	1·907	51·63
42 » 43	7058	355400	7909426	21·77	21·8	1·956	50·35
43 » 44	7107	348342	7554026	21·20	21·2	2·040	49·02
44 » 45	7163	341235	7205684	20·62	20·6	2·099	47·64
45 » 46	7229	334072	6864449	20·05	19·9	2·164	46·21
46 » 47	7304	326843	6530377	19·48	19·2	2·235	44·74
47 » 48	7391	319539	6203534	18·91	18·6	2·313	43·23
48 » 49	7486	312148	5883995	18·35	18·0	2·398	41·70
49 » 50	7592	304662	5571847	17·79	17·4	2·492	40·13
50 » 51	7709	297070	5267185	17·24	16·8	2·595	38·54
51 » 52	7834	289361	4970115	16·69	16·2	2·707	36·94
52 » 53	7967	281527	4680754	16·14	15·6	2·830	35·34
53 » 54	8110	273560	4399227	15·59	15·0	2·965	33·73
54 » 55	8257	265450	4125667	15·04	14·4	3·111	32·14
55 » 56	8411	257193	3860217	14·52	13·8	3·273	30·58
56 » 57	8568	248782	3603024	14·00	13·2	3·444	29·04
57 » 58	8726	240214	3354242	13·48	12·6	3·633	27·51
58 » 59	8883	231488	3114028	12·96	12·1	3·837	26·06
59 » 60	9038	222605	2882540	12·45	11·6	4·060	24·63
60 » 61	9187	213567	2659935	11·97	11·1	4·302	23·12
61 » 62	9326	204380	2446368	11·49	10·6	4·563	21·91
62 » 63	9454	195054	2241988	11·01	10·1	4·847	20·63
63 » 64	9565	185600	2046934	10·54	9·6	5·154	19·40
64 » 65	9658	176035	1861334	10·07	9·1	5·486	18·23
65 » 66	9726	166377	1685299	9·65	8·6	5·846	17·11
66 » 67	9769	156651	1518922	9·23	8·1	6·236	16·04
67 » 68	9780	146882	1362271	8·81	7·7	6·658	15·02
68 » 69	9755	137102	1215389	8·39	7·3	7·115	14·06
69 » 70	9691	127347	1078287	7·97	6·9	7·610	13·15
70 » 71	9586	117656	950940	7·61	6·5	8·148	12·27
71 » 72	9433	108070	833284	7·25	6·1	8·729	11·46
72 » 73	9233	98637	725214	6·89	5·7	9·361	10·68
73 » 74	8981	89404	626577	6·53	5·4	10·045	9·96
74 » 75	8678	80423	537173	6·17	5·1	10·791	9·27
75 » 76	8321	71745	456750	5·89	4·8	11·598	8·62
76 » 77	7913	63424	385005	5·61	4·5	12·476	8·01
77 » 78	7454	55511	321581	5·34	4·2	13·428	7·45
78 » 79	6950	48057	266070	5·07	3·9	14·462	6·92
79 » 80	6402	41107	218013	4·80	3·7	15·584	6·43

Tabelle XXXV.

Duvillard'sche Sterblichkeits-Tafel.

Alter	A Es sterben	B von Lebenden	C Summe aller Lebensjahre	D mittlere Lebensdauer	E wahrscheinliche Lebensdauer	F Sterblichkeit nach Prozenten	G Es stirbt Einer von
80 bis 81	5819	34705	176906	4·67	3·5	16·767	5·97
81 » 82	5206	28886	142201	4·54	3·3	18·023	5·55
82 » 83	4574	23680	113315	4·41	3·1	19·320	5·18
83 » 84	3931	19106	89635	4·28	2·9	20·575	4·86
84 » 85	3289	15175	70529	4·15	2·8	21·671	4·61
85 » 86	2662	11886	55354	4·09	2·8	22·396	4·47
86 » 87	2059	9224	43468	4·03	2·7	22·431	4·46
87 » 88	1495	7165	34244	3·97	2·7		
88 » 89	984	5670	27079	3·91	2·6		
89 » 90	856	4686	21409	3·86	2·6		
90 » 91	737	3830	16723	3·70	2·5		
91 » 92	627	3093	12893	3·55	2·5		
92 » 93	528	2466	9800	3·40	2·4		
93 » 94	439	1938	7334	3·25	2·4		
94 » 95	359	1499	5396	3·10	2·4		
95 » 96	290	1140	3897	2·93	2·3		
96 » 97	229	850	2757	2·76	2·2		
97 » 98	179	621	1907	2·59	2·0		
98 » 99	135	442	1286	2·42	1·9		
99 » 100	100	307	844	2·25	1·8		
100 » 101	72	207	537	2·11	1·6		
101 » 102	51	135	330	1·97	1·5		
102 » 103	33	84	195	1·83	1·4		
103 » 104	22	51	111	1·70	1·2		
104 » 105	13	29	60	1·57	1·1		
105 » 106	8	16	31	1·42	0·8		
106 » 107	4	8	15	1·28	0·6		
107 » 108	2	4	7	1·14	0·4		
108 » 109	1	2	3	1·0	0·2		
109 » 110	1	1	1	0·5	0·0		

Tabelle XXXVI.

Süßmilch Baumann'sche Sterblichkeits-Tafel.

Alter	A Es sterben	B von Lebenden	C Summe aller Lebensjahre	D mittlere Lebensdauer	E wahrscheinliche Lebensdauer	F Steeblichkeit nach Prozenten	G Es stirbt Einer von
0	250	1000	28988	28·49	17·8	25·000	4·00
1	89	750	27988	36·82	38·9	11·867	8·43
2	43	661	27238	40·71	44·2	6·507	15·37
3	25	618	26577	42·50	45·9	4·045	24·72
4	14	593	25959	43·28	46·3	2·361	42·36
5	12	579	25366	43·31	47·2	2·073	48·24
6	11	567	24787	43·22	45·9	1·940	51·55
7	9	556	24220	43·06	45·5	1·619	61·58
8	8	547	23664	42·76	45·0	1·400	71·43
9	7	539	23117	42·39	44·5	1·299	76·99
10	5	532	22578	41·94	43·7	0·940	106·38
11	4	527	22046	41·33	43·0	0·759	131·75
12	4	523	21519	40·65	42·3	0·765	130·72
13	4	519	20996	39·96	41·6	0·771	129·70
14	4	515	20477	39·26	40·9	0·777	128·70
15	4	511	19962	38·56	40·1	0·783	127·71
16	4	507	19451	37·86	39·1	0·789	126·74
17	4	503	18944	37·16	38·5	0·795	125·78
18	4	499	18441	36·46	37·6	0·802	124·68
19	4	495	17942	35·75	36·9	0·809	123·61
20	5	491	17447	35·03	36·2	1·019	98·13
21	5	486	16956	34·39	35·3	1·030	97·09
22	5	481	16470	33·74	34·6	1·040	96·15
23	5	476	15989	33·09	33·9	1·050	95·24
24	5	471	15513	32·44	33·3	1·062	94·16
25	5	466	15042	31·78	32·6	1·073	93·29
26	5	461	14576	31·12	31·9	1·085	92·17
27	5	456	14115	30·45	31·1	1·097	91·16
28	6	451	13659	29·79	30·4	1·330	75·19
29	6	445	13208	29·18	29·6	1·349	74·13
30	6	439	12763	28·57	28·9	1·367	73·15
31	6	433	12324	27·96	28·2	1·386	72·15
32	6	427	11891	27·35	27·5	1·405	71·17
33	6	421	11464	26·73	26·8	1·425	70·17
34	6	415	11043	26·11	26·2	1·446	69·16
35	7	409	10628	25·49	25·6	1·711	58·45
36	7	402	10219	24·92	25·0	1·741	57·44
37	7	395	9817	24·35	24·4	1·772	56·43
38	7	388	9422	23·78	23·8	1·805	55·40
39	7	381	9034	23·21	23·2	1·837	54·44
40	7	374	8653	22·64	22·5	1·872	53·42
41	7	367	8279	22·06	21·8	1·908	52·41
42	7	360	7912	21·48	21·2	1·944	51·44
43	7	353	7552	20·89	20·5	1·983	50·43
44	7	346	7199	20·31	19·9	2·023	49·43
45	7	339	6853	19·72	19·2	2·065	48·43
46	8	332	6514	19·12	18·6	2·410	41·49
47	8	324	6182	18·58	18·0	2·470	40·49
48	8	316	5858	18·04	17·4	2·531	39·51
49	8	308	5542	17·49	16·8	2·600	38·46

Tabelle XXXVI.

Süßmilch Baumann'sche Sterblichkeits-Tafel.

Alter	A Es sterben	B von Lebenden	C Summe aller Lebensjahre	D mittlere Lebensdauer	E wahrscheinliche Lebensdauer	F Sterblichkeit nach Prozenten	G Es stirbt Einer von
50	9	300	5234	16·95	16·2	3·000	33·33
51	9	291	4934	16·46	15·6	3·093	32·33
52	9	282	4643	15·96	15·0	3·191	31·37
53	9	273	4361	15·48	14·5	3·297	30·33
54	9	264	4088	14·98	14·5	3·409	29·33
55	9	255	3824	14·50	13·8	3·530	28·33
56	9	246	3569	14·01	13·1	3·660	27·32
57	9	237	3323	13·52	12·5	3·796	26·34
58	9	228	3086	13·04	11·9	3·948	25·33
59	9	219	2858	12·55	11·3	4·110	24·33
60	9	210	2639	12·07	10·7	4·286	23·33
61	9	201	2429	11·58	10·2	4·478	22·33
62	10	192	2228	11·10	9·7	5·209	19·20
63	10	182	2036	10·69	9·3	5·494	18·20
64	10	172	1854	10·28	8·9	5·814	17·20
65	10	162	1682	9·88	8·4	6·172	16·20
66	10	152	1520	9·50	8·0	6·580	15·20
67	10	142	1368	9·13	7·6	7.043	14·20
68	10	132	1226	8·72	7·2	7·576	13·20
69	10	122	1094	8·47		8·196	12·20
70	9	112	972	8·18		8·035	12·44
71	9	103	860	7·85		8·738	11·44
72	9	94	757	7·55		9·577	10·44
73	8	85	663	7·30		9·412	10·62
74	8	77	578	7·01		10·390	9·62
75	7	69	501	6·76			
76	7	62	432	6·74			
77	6	55	370	6·23			
78	6	49	315	5·93			
79	6	43	266	5·69			
80	5	37	223	5·53			
81	4	32	186	5·31			
82	4	28	154	5·00			
83	4	24	126	4·75			
84	3	20	102	4·60			
85	3	17	82	4·32			
86	2	14	65	4·14			
87	2	12	51	3·75			
88	2	10	39	3·49			
89	2	8	29	3·12			
90	1	6	21	3·00			
91	1	5	15	2·50			
92	1	4	10	2·00			
93	1	3	6	1·50			
94	1	2	3	1·00			
95	1	1	1	0·50			
96	0	0	0				

Tabelle XXXVII.

Hauptsumme für das Königreich Frankreich.

In dem Jahre	Geburten: eheliche männlich	Geburten: eheliche weiblich	Geburten: uneheliche männlich	Geburten: uneheliche weiblich	Summe der Geburten	Geschlossene Ehen	Sterbefälle männlich	Sterbefälle weiblich	Summe der Sterbefälle	Vermehrung der Bevölkerung
1817	456570	425002	31887	30666	944125	205244	382813	365410	748223	195902
1818	440972	414332	30216	28335	913855	212979	376412	375495	751907	161948
1819	475651	446606	33660	32001	987918	215088	398260	389795	788055	199863
1820	460463	432121	33915	32434	958933	208893	389822	380884	770706	188227
1821	463069	432803	34552	32934	963358	221868	377062	374152	751214	212144
1822	465274	437774	35820	33928	972796	247495	391443	382719	774162	198634
1823	460807	433552	35710	33952	964021	262020	376101	366634	742735	221286
1824	471490	441488	36280	34894	984152	231680	385785	377821	763606	220546
1825	468151	436443	35381	34011	973986	243674	400444	397568	798012	175974
1826	474837	445883	37061	35410	993191	247194	419613	416045	835658	157533
1827	469209	440219	36098	34670	980196	255738	399864	391261	791125	189071
1828	465745	440098	35924	34780	976547	246839	421956	415189	837145	139402
1829	460887	434289	35276	34075	964527	248796	405366	398087	803453	161074
1830	461757	436820	35229	34018	967824	270900	408545	401285	809830	157994
1831	472614	442684	36415	34996	986709	246438	405902	396859	802761	183948
1832	449096	421413	34422	33255	938186	242041	466109	467624	933733	4453
1833	464140	434345	36460	35038	969983	264061	408970	403578	812548	157435
1834	470958	441973	37760	35799	986490	271220	462158	455670	917828	68662
1835	474098	445008	38270	36457	993833	275008	414625	401788	816413	177420
1836	467002	439316	37436	36066	979820	274145	390380	381320	771700	208120
Zusammen	9292790	8722169	707772	677719	19400450	4891321	8081630	7939184	16020814	3379636
1/20 hiervon	464640	436108	35389	33886	970022	244566	404082	396959	801041	168982

Die Durchschnitts-Resultate geben die mittlere Veränderung in der Bevölkerung im ganzen Königreiche Frankreich an, und weisen nach, daß daselbst jährlich **970022** Kinder geboren werden, und daß **801041** Personen jährlich sterben; daß ferner jährlich **244566** Ehen geschlossen werden, endlich, daß die Bevölkerung jährlich um **168982** zunimmt. Dieses Verhältniß würde sich noch weit günstiger und der Wahrheit annähernder herausstellen, wenn man das Jahr **1832**, als in welchem die Cholera in Frankreich wüthete, aus der Rechnung wegließe, was man auch für solche außerordentliche und selten sich ereignende Fälle bei Berechnungen jeder Art zu thun pflegt.

Tabelle XXXVIII.

A. Die Bevölkerung eines Landes, in welchem jährlich Eine Million Geburten vorausgesetzt werden.

Alter	Einwohner	Differenz	Alter	Einwohner	Differenz
0 bis 1 J.	28763192	883762	55 bis 56 J.	3731622	252988
» 2	27879430	719680	» 57	3478634	244498
» 3	27159750	648251	» 58	3234136	235851
» 4	26511499	611691	» 59	2998285	227047
» 5	25899808	590932	» 60	2771238	218086
» 6	25308876	578088	» 61	2553152	208973
» 7	24730788	569431	» 62	2344179	199717
» 8	24161357	563042	» 63	2144462	190328
» 9	23598315	557865	» 64	1954134	180817
» 10	23040450	553304	» 65	1773317	171207
» 11	22487146	549005	» 66	1602110	161514
» 12	21938141	544759	» 67	1440596	151766
» 13	21393382	540443	» 68	1288830	141993
» 14	20852939	535982	» 69	1146837	132224
» 15	20316957	531340	» 70	1014613	122502
» 16	19785617	526495	» 71	892111	112863
» 17	19259122	521442	» 72	779248	103353
» 18	18737680	516182	» 73	675895	94020
» 19	18221498	510726	» 74	581875	84913
» 20	17710772	505082	» 75	496962	76085
» 21	17205690	499267	» 76	420877	67584
» 22	16706423	493292	» 77	353293	59468
» 23	16213131	487175	» 78	293825	51784
» 24	15725956	480930	» 79	242041	44582
» 25	15245026	474571	» 80	197459	37906
» 26	14770455	468115	» 81	159553	31795
» 27	14302340	461573	» 82	127758	26283
» 28	13840767	454958	» 83	101475	21394
» 29	13385809	448283	» 84	80081	17140
» 30	12937526	441557	» 85	62941	13531
» 31	12495969	434791	» 86	49410	10555
» 32	12061178	427990	» 87	38855	8195
» 33	11633188	421164	» 88	30660	6417
» 34	11212024	414315	» 89	24243	5178
» 35	10797709	407448	» 90	19065	4258
» 36	10390261	400567	» 91	14807	3462
» 37	9989694	393671	» 92	11345	2780
» 38	9596023	386760	» 93	8565	2202
» 39	9209263	379832	» 94	6363	1719
» 40	8829431	372883	» 95	4644	1319
» 41	8456548	365912	» 96	3325	995
» 42	8090636	358909	» 97	2330	736
» 43	7731727	351870	» 98	1594	531
» 44	7379857	344789	» 99	1063	375
» 45	7035068	337653	» 100	688	257
» 46	6697415	330458	» 101	431	171
» 47	6366957	323191	» 102	260	109
» 48	6043766	315844	» 103	151	68
» 49	5727922	308405	» 104	83	39
» 50	5419517	300865	» 105	44	22
» 51	5118652	293216	» 106	22	12
» 52	4825436	285444	» 107	10	6
» 53	4539992	277543	» 108	4	2
» 54	4262449	269506	» 109	2	1
54 » 55	3992943	261321	» 110	1	0

Tabelle XXXVIII.

B. Die Bevölkerung eines Landes, welches zehn Millionen Einwohner hat.

Alter	Einwohner	Differenz	Alter	Einwohner	Differenz
0 bis 1 J.	10,000000	307255	55 bis 56 J.	1297360	87955
» 2	9692745	250208	» 57	1209405	85004
» 3	9442537	225375	» 58	1124401	81998
» 4	9217162	212665	» 59	1042403	78936
» 5	9004497	205447	» 60	963467	75821
» 6	8799050	200982	» 61	887646	72653
» 7	8598068	197972	» 62	814993	69435
» 8	8400096	195751	» 63	745558	66171
» 9	8204345	193951	» 64	679387	62864
» 10	8010394	192365	» 65	616523	59523
» 11	7818029	190871	» 66	557000	56153
» 12	7627158	189395	» 67	500847	52764
» 13	7437763	187893	» 68	448083	49366
» 14	7249870	186344	» 69	398717	45970
» 15	7063526	184729	» 70	352747	42590
» 16	6878797	183044	» 71	310157	39238
» 17	6695753	181288	» 72	270919	35933
» 18	6514465	179460	» 73	234986	32688
» 19	6335005	177562	» 74	202298	29521
» 20	6157443	175600	» 75	172777	26452
» 21	5981843	173576	» 76	146325	23496
» 22	5808267	171503	» 77	122829	20676
» 23	5636764	169374	» 78	102153	18003
» 24	5467390	167204	» 79	84150	15500
» 25	5300186	164993	» 80	68650	13179
» 26	5135193	162748	» 81	55471	11054
» 27	4972445	160473	» 82	44417	9138
» 28	4811972	158174	» 83	35279	7438
» 29	4653798	155853	» 84	27841	5958
» 30	4497945	153515	» 85	21883	4704
» 31	4344430	151162	» 86	17179	3670
» 32	4193268	148798	» 87	13509	2849
» 33	4044470	146424	» 88	10660	2232
» 34	3898046	144043	» 89	8428	1800
» 35	3754003	141657	» 90	6628	1480
» 36	3612346	139264	» 91	5148	1204
» 37	3473082	136866	» 92	3944	966
» 38	3336216	134463	» 93	2978	766
» 39	3201753	132055	» 94	2212	597
» 40	3069698	129639	» 95	1615	459
» 41	2940059	127215	» 96	1156	346
» 42	2812844	124781	» 97	810	256
» 43	2688063	122334	» 98	554	185
» 44	2565729	119871	» 99	369	130
» 45	2445858	117387	» 100	239	89
» 46	2328471	114890	» 101	150	60
» 47	2213581	112366	» 102	90	38
» 48	2101215	109808	» 103	52	23
» 49	1991407	107222	» 104	29	14
» 50	1884185	104601	» 105	15	7
» 51	1779584	101941	» 106	8	5
» 52	1677643	99240	» 107	3	2
» 53	1578403	96492	» 108	1	0
» 54	1481911	93698	» 109	1	1
» 55	1388213	90853	» 110	0	0

Berichtigung.

In der Interessen-Tabelle V. soll es bei der Periode 74, erste Spalte, statt 2·567450 heißen 2·507450.